Über zwei Fragen der Theorie des Extremums eines einfachen Integrals.

Von

ALFRED ROSENBLATT in Krakau.

I. Es ist wohlbekannt, daß hinsichtlich der Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein starkes Extremum eines einfachen Integrals ein fundamentaler Unterschied besteht zwischen der gewöhnlichen und der Parameterdarstellung. Während im letzteren Falle Zermelo in seiner Dissertation beweist, daß die Legendresche, Jacobische und Weierstraßsche Bedingung, von Ausnahmefällen abgesehen, für ein starkes Extremum hinreichen, wenn sie längs einer Extremale erfüllt sind, hat man im Falle gewöhnlicher Darstellung diesbezüglich nur den Lindbergschen Satz*), daß für Kurven „mit Gefällsbeschränkung“ die drei klassischen Bedingungen genau wie vorher genügen.

Eine neue notwendige Bedingung wurde von Bolza**) folgendermaßen formuliert: Ist $P_2(x_2, y_2)$ irgend ein Punkt der die Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und $P_1(x_1, y_1)$ verbindenden Extremalen E_0 , sind weiter $p_0(x, y)$, $p_1(x, y)$ die Gefällsfunktionen der durch P_0 , P_1 gehenden, die Extremale E_0 enthaltenden Extremalenbüschel B_0 , B_1 und betrachtet man die aus dem Stück $P_0 P_2$ von E_0 , aus dem Geradenstück $P_2 P_3$, wo die Koordinaten von P_3 $x_2 + h$, $y_2 + k$ sind ($h > 0$), und aus der durch P_2 gehenden Extremalen des Büschels B_1 bestehenden Kurven, sowie die aus der Extremale des Büschels B_0 $P_0 P_3$, wo die Koordinaten von P_3 $x_2 - h$, $y_2 + k$ sind ($h > 0$), aus dem Geradenstück $P_3 P_2$, endlich aus dem Stück $P_3 P_1$ von E_0 bestehenden Kurven, dann lautet die Bedingung:

$$(1) \quad \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^1 h E \left(x_2 \pm ht, y_2 \pm kt; p_1(x_2 \pm ht, y_2 \pm kt), \frac{k}{h} \right) dt \geq 0.$$

*) Mathematische Annalen Bd. 59.

**) Transactions of the American Mathematical Society, 1906, Bd. 7; siehe auch dessen „Vorlesungen über Variationsrechnung“, Erste Lieferung, 1908, Leipzig.

Hier ist für $x_0 < x_2 < x_1$ $i = 0$ für das $-$ Zeichen, $i = 1$ für das $+$ Zeichen, für $x_2 = x_0$ hat man $i = 1$ und das $+$ Zeichen, für $x_2 = x_1$ $i = 0$ und das $-$ Zeichen, während die E -Funktion aus dem Integranden $f(x, y, y')$ gebildet ist. Bedingung (1) ist äquivalent mit Bedingung:

$$(2) \quad \liminf_{h \rightarrow +0} \int_0^1 h f\left(x_2 \pm ht, y_2 \pm kt, \frac{k}{h}\right) dt \\ - k \int_0^1 f_{y'}(x_2, y_2 \pm kt, p_i(x_2, y_2 \pm kt)) dt \geq 0.$$

Dabei wird k als fest absolut beliebig klein vorausgesetzt.

Daß diese Bedingung nicht hinreichend ist, zeigt das folgende Beispiel:

$$(3) \quad J = \int_{x_0}^{x_1} (ay'^2 + 3by'^4y^3 - 4by'^5yx + by'^6x^2) dx.$$

Hier ist:

$$f_y = 6by'^4y - 4by'^5x, \quad f_{y'} = 2ay' + 12by'^3y^2 - 20by'^4yx + 6by'^5x^2$$

und die Lagrangesche Gleichung lautet

$$y''(2a + 36by'^2y^3 - 80by'^3yx + 30by'^4x^2) = 2by'^4y + 4by'^5x.$$

Es ist also längs der Extremalen $y = 0$ erstens die Legendresche Bedingung in der stärkeren Form

$$f_{y''}(x, y(x), y') = 2a + 36by'^2x^2 > 0$$

für jedes y' erfüllt; zweitens die Jacobische Bedingung, denn die Jacobische Gleichung lautet jetzt $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$; drittens die Weierstraßsche, denn man hat

$$E(x, y(x); y'(x), y') = ay'^2 + by'^6x^2 \geq 0$$

mit ordentlichem Verschwinden. Die Bolzasche Bedingung ist auch erfüllt, denn man hat

$$\liminf_{h \rightarrow +0} h \int_0^1 \left[a \left(\frac{k}{h} \right)^2 + 3b \left(\frac{k}{h} \right)^4 (y_2 \pm kt)^2 - 4b \left(\frac{k}{h} \right)^5 (y_2 \pm kt) \cdot (x_2 \pm ht) \right. \\ \left. + b \left(\frac{k}{h} \right)^6 (x_2 \pm ht)^2 \right] dt \\ = \liminf_{h \rightarrow +0} \frac{k^2}{h} \left[a + b \left(\frac{k}{h} \right)^4 x_2 (x_2 \mp h) \right].$$

Dieser Limes ist $+\infty$ für $x_2 \geq 0$ und jedes feste k . Setzt man aber $x_2 = \alpha h$, $0 < \alpha < 1$, so ist

$$\liminf_{h \rightarrow +0} \frac{k^2}{h} \left[a + \frac{bk^4}{h^2} \alpha(\alpha - 1) \right] = -\infty,$$

also ist das Integral J kein Minimum längs $y = 0$.

Das Beispiel zeigt noch mehr. Es kann geschehen, daß die Bolzasche Bedingung in einem Punkte P_2 für alle festen genügend kleinen k erfüllt ist, ohne daß für E_0 ein Extremum stattfindet im Vergleiche mit allen Kurven $P_0 P_2 P_3 P_1$ resp. $P_0 P_3 P_2 P_1$, für die $|k| \leq k_1$ ist. Findet dies aber für jeden Punkt und ein zugehöriges k_1 statt, so muß doch kein Extremum stattfinden, wie unser Beispiel lehrt. Denn da ein schwaches Extremum vorhanden ist, so können wir $\left|\frac{k}{h}\right| > A_1$ annehmen, wo A_1 eine genügend kleine positive Zahl bedeutet die von x_2 abhängt; dabei sei $h < h_1$, das genügend klein ist. Wenn ich jetzt k_1 so klein wähle, daß das zweite Integral in (2) gegen A_1 beliebig klein ist, dann ist für alle diese Vergleichskurven, für die $|k| < k_1$, $h < h_1$, $\left|\frac{k}{h}\right| = A > A_1$ ist, $\Delta J > 0$, desgleichen für die schwachen Variationen im Punkte x_2 , ohne daß ein Extremum stattfindet.

Um den Unterschied zwischen Parameterdarstellung und gewöhnlicher Darstellung noch klarer hervortreten zu lassen, will ich ein anderes lehrreiches Beispiel angeben, das dem bekannten Peanoschen Beispiel in der Theorie der Maxima und Minima mehrerer Veränderlicher nachgebildet ist.*) Dasselbe ist bekanntlich

$$f(x, y) = (y^2 - px)(y^2 - qx) \quad p > 0, q > 0$$

und die Funktion ist nur negativ in den beiden Teilen der Koordinatenebene zwischen den zwei Parabeln $y^2 - px = 0$, $y^2 - qx = 0$. Analog betrachten wir das Integral:

$$(4) \quad J = \int_0^1 y'^2 [y^4 (y^2 - px)(y^2 - qx) + a] dx, \quad p > 0, q > 0, a > 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f_y &= 2y'^6 y [2y^2 - (p+q)x], & f_{y'} &= y' [2a + 6y'^4 (y^2 - px)(y^2 - qx)] \\ y'' [2a + 30y'^4 (y^2 - px)(y^2 - qx)] &= 6y'^5 [y^2(p+q) - 2pqx] \\ &\quad + 10y'^6 y [x(p+q) - 2y^2]. \end{aligned}$$

Längs der Extremalen $y = 0$ ist die Legendresche Bedingung in der stärkeren Form

$$f_{y'^2}(x, y(x), y') = 2a + 30y'^4 pqx^2$$

erfüllt, ebenso die Jacobische Bedingung, da die Jacobische Gleichung $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ ist, endlich die Weierstraßsche, denn man hat

$$E(x, y(x); y'(x), y') = y'^2 [a + y'^4 x^2 pq].$$

*) In den „Monatsheften für Mathematik und Physik“ 1909, 3.—4. Vierteljahr veröffentlicht Herr H. Hahn ein ähnliches Beispiel.

$$\int_0^{h_0} \frac{p+q}{2h_0} \left[\left(\frac{p+q}{2h_0} \right)^2 \left(\frac{p+q}{2h_0} x^2 - px \right) \left(\frac{p+q}{2h_0} x^2 - qx \right) + a \right] dx$$

$$= \frac{p+q}{2} \left[\frac{(p+q)^2}{4} \left(\frac{pq}{3} - \frac{3(p+q)^2}{40} \right) + a \right]$$

und

$$\int_{h_0}^h \frac{p+q}{8x} \left[- \left(\frac{p+q}{8x} \right)^2 \left(\frac{p-q}{2} \right)^2 x^2 + a \right] dx = \frac{p+q}{8} \left[- \frac{(p^2+q^2)^2}{256} + a \right] \log \frac{h}{h_0}.$$

Ist also die Bedingung erfüllt

$$(5) \quad a < \frac{(p^2 - q^2)^2}{256},$$

dann findet kein Extremum statt, da $\frac{h}{h_0}$ beliebig groß gemacht werden kann.

Wir berechnen jetzt das Integral der E -Funktion über den in der Figur eingezeichneten Weg 041, der aus dem Geradenstück 04 und der Extremalen 41 besteht. Es genügt wieder das Integral $\int_0^4 f(x, y, y') dx$ zu finden, und man hat

$$\int_0^h \frac{p}{h} \left[\left(\frac{p}{h} \right)^2 \left(\frac{p}{h} x^2 - px \right) \left(\frac{p}{h} x^2 - qx \right) + a \right] dx = p \left[a - \frac{p^3}{20} \left(p - \frac{5}{3} q \right) \right].$$

Wir sehen also, daß, wenn die Bedingung

$$(6) \quad a < \frac{p^3}{20} \left(p - \frac{5}{3} q \right),$$

$\left(p > \frac{5}{3} q \right)$ besteht, die Bolzasche Bedingung hier nicht ausreicht, um ein Extremum längs aller Wege $P_0 P_2 P_3 P_1$ zu sichern.

Nun möge aber dies stattfinden. Setzt man $s = kA = \frac{k^2}{h}$ in den vorher berechneten Ausdruck für die Bolzasche Bedingung ein, so erhält man

$$as + s^3 \left(\frac{s^2}{5} - \frac{p+q}{4} s + \frac{pq}{3} \right),$$

und da der Koeffizient von s^3 für $s = \frac{5}{8} (p+q)$ das Minimum

$$- \frac{5}{64} (p+q)^2 + \frac{pq}{3}$$

hat, so findet sicher ein Extremum längs aller Wege $P_0 P_2 P_3 P_1$ statt, wenn

$$(7) \quad (p+q)^2 < \frac{64pq}{15},$$

also z. B. $p = \frac{5}{4} q$ ist. Denn da $\left| \frac{k}{h} \right| > A_1$ vorausgesetzt werden kann, so genügt es k_1 genügend klein zu machen, um alle Glieder des Integrals über die E -Funktion gegenüber as vernachlässigen zu können.

Wir haben somit das vollständige Analogon zum Peano-Beispiel. Und wie es im Falle der Maxima und Minima nicht richtig ist, aus dem Verhalten der Funktion längs aller Geraden auf das Vorhandensein eines Extremalwertes zu schließen, ebenso ist es nicht möglich, durch Bedingungen, die der Bolza-Bedingung ähnlich sind, ans Ziel zu kommen. Man muß vielmehr in der von Scheefer*) und Stolz**) gezeigten Richtung vorgehen.

Nun ist aber das Beispiel (4) wesentlich weiterreichend als Beispiel (3). Denn man könnte glauben, daß, wenn für alle Wege $P_0 P_2 P_3 P_1$ und $P_0 P_3 P_2 P_1$, für ein von dem Punkte P_2 , der nur im ersten Falle nicht unendlich nahe an P_1 , im zweiten Falle nicht unendlich nahe an P_0 heranrücken darf, unabhängiges k_1 das Extremum besteht, was im Beispiel (3) nicht der Fall ist, daß dann vielleicht ein Extremum stattfindet. Nun hat man für (4), wenn $x - x_2 = x'$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k}{h}\right)^6 \int_0^h \left(\left(\frac{k}{h}\right)^2 x'^2 - p(x' + x_2) \right) \left(\left(\frac{k}{h}\right)^2 x'^2 - q(x' + x_2) \right) dx' + \left(\frac{k}{h}\right)^2 ah \\ &= A^5 k \left(\sqrt{pq} x_2 - \frac{p+q}{6\sqrt{pq}} k^2 \right)^2 + s^3 \left(s^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{(p+q)^2}{36pq} \right) - s \frac{p+q}{4} + \frac{pq}{8} \right) \\ &+ A^4 k^2 pq x_2 + as \end{aligned}$$

durch einfaches Ausrechnen. Der Koeffizient von s^3 ist sicher positiv, wenn wie vorher $p = \frac{5}{4} q$ angenommen wird, da dann die Diskriminante

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{(p+q)^2}{36pq} \right) \frac{pq}{8} - \left(\frac{p+q}{8} \right)^2 = \left(\frac{7}{6} - \frac{81}{32} \right) \cdot \frac{1}{32} < 0$$

ist, und es gelten alle vorher gemachten Schlüsse. Mit Kurven der Gestalt $P_0 P_2 P_3 P_1$, $P_0 P_3 P_2 P_1$ kommt man also nicht zum Ziel.

II. Das vorher ausführlich untersuchte Beispiel (4) wird uns auch in der Untersuchung gute Dienste leisten, der wir uns jetzt zuwenden, und die nicht nur für die reine Mathematik von Interesse ist: über die Gültigkeit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel im isoperimetrischen Problem.

Handelt es sich darum, das Integral

$$(8) \quad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

zu einem Extremum zu machen, während das Integral

$$(9) \quad K = \int_{x_0}^{x_1} g(r, y, y') dx$$

*) Mathematische Annalen Bd. 35.

**) „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ I. Teil. V. Abschnitt.

einen konstanten Wert behält, dann verfährt man folgendermaßen: Man bildet die Variation

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= y(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x), \\ \eta_1(x_0) &= \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0,\end{aligned}$$

und erhält aus (8) und (9):

$$(8a) \quad \Delta J = \varepsilon_1 \int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x) F(x) dx + \varepsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x) F(x) dx + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)_2,$$

$$(9a) \quad \Delta K = \varepsilon_1 \int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x) G(x) dx + \varepsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x) G(x) dx + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)_2 = 0,$$

wo

$$F(x) = f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}, \quad G(x) = g_y - \frac{d}{dx} g_{y'},$$

und die Klammerausdrücke in (8a), (9a) von höherer als der ersten Ordnung in $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind. Ist nun $G(x)$ nicht identisch Null längs der ein Extremum liefernden Kurve E_0 , dann kann man, wenn noch die Koeffizienten von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in (8a) und (9a) mit $J_1, J_2; K_1, K_2$ bezeichnet werden, $\eta_2(x)$ so wählen, daß $K_2 \neq 0$ wird; dann erhält man aus (9a) eine einzige Funktion ε_2 von ε_1

$$\varepsilon_2 = -\frac{K_1}{K_2} \varepsilon_1 + (\varepsilon_1)_1 \varepsilon_1,$$

wo $(\varepsilon_1)_1$ eine Funktion von ε_1 ist, die mindestens von der ersten Ordnung ist. Aus (8a) hat man

$$\Delta J = \varepsilon_1 \left(F_1 - \frac{K_1}{K_2} F_2 \right) + (\varepsilon_1)_1 \varepsilon_1,$$

also erfüllt, wie aus der willkürlichen Wahl von $\eta_1(x)$ folgt, die Funktion $y = y(x)$ von E_0 die Lagrangesche Gleichung

$$(10) \quad F(x) + \lambda G(x) = 0,$$

wo λ eine von $\eta_2(x)$ unabhängige endliche Konstante ist.

Was geschieht nun, wenn E_0 Extremale für das Integral (9) ist? Formal kann man diesen Fall, auf den Hilbert*) und Zermelo**) besonders hinweisen, durch Ersetzen der jetzt unbestimmten Konstante λ durch $\lambda_1 : \lambda_0$ mit dem allgemeinen Fall in Eins zusammenfassen. Offenbar ist der Fall, wo E_0 ein starkes Extremum für K liefert, trivial. Es fragt sich, wann die Lagrangesche Gleichung (10) mit endlichem λ gilt.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Ist E_0 eine Extremale von K , die kein schwaches Extremum liefert, dann ist, von Ausnahmefällen abgesehen, die Lagrangesche Regel richtig.

*) In seinen Vorlesungen über Variationsrechnung 1904/1905.

**) Enzyklopädie der Math. Wiss. II A. 8a.

Liefert aber E_0 ein schwaches Extremum, dann kann die Lagrangesche Regel versagen.

Es sei zuerst im Intervalle (x_0, x_1) die Legendresche Bedingung nicht erfüllt, und zwar können wir $g_{y'}$ in (x_0, x_2) positiv, in (x_2, x_1) negativ annehmen. Wir betrachten die zweite Variation von K :

$$\begin{aligned} \delta^2 K = & \varepsilon_1^2 \int_{x_0}^{x_1} (g_{y''} \eta_1'^2 + 2g_{y'y} \eta_1' \eta + g_{y^2} \eta_1^2) dx \\ & + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} (g_{y''} \eta_1' \eta_2' + g_{y'y} (\eta_1' \eta_2 + \eta_1 \eta_2')) + g_{y^2} \eta_1 \eta_2) dx \\ & + \varepsilon_2^2 \int_{x_0}^{x_1} (g_{y''} \eta_2'^2 + 2g_{y'y} \eta_2' \eta_2 + g_{y^2} \eta_2^2) dx, \end{aligned}$$

und bestimmen die beiden Variationen $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ derart, daß die Gleichung

$$\Delta K = \frac{1}{2} \delta^2 K + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)_3 = 0$$

durch zwei reelle Funktionen ε_2 von ε_1 befriedigt wird, die voneinander für $\varepsilon_1 = 0$ verschieden sind. Die Funktionen $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ wählen wir nun folgenderweise. Es sei $F(x)$ für x_3 , das im Intervalle (x_0, x_2) liegen möge, von Null verschieden; dann wählen wir x_4 so, daß

$$x_0 < x_3 < x_2 < x_4 < x_1,$$

und bestimmen

$$\eta_1(x) = [x - (x_3 - \delta)]^2 [x - (x_3 + \delta)]^2$$

in $x_3 - \delta$, $x_3 + \delta$, sonst Null, und

$$\eta_2(x) = [x - (x_4 - \delta)]^2 [x - (x_4 + \delta)]^2$$

in $x_4 - \delta$, $x_4 + \delta$, sonst Null. Wir beachten jetzt, daß

$$\int_{x_{3,4}-\delta}^{x_{3,4}+\delta} \eta_1'(x)^2 dx = A\delta^7, \quad \int_{x_{3,4}-\delta}^{x_{3,4}+\delta} |\eta_1'(x) \eta_1(x)| dx = B\delta^8,$$

$$\int_{x_{3,4}-\delta}^{x_{3,4}+\delta} \eta_1'(x)^2 dx = C\delta^9, \quad (A, B, C \text{ von Null verschiedene Konstanten}),$$

und sehen, daß, wenn δ klein genug angenommen wird, $\delta^2 K$ in der Form $\varepsilon_1^2 f_1 + \varepsilon_2^2 f_2$, wo $f_1 > 0$, $f_2 < 0$ konstant sind, geschrieben werden kann. Macht man jetzt in (9a) den Ansatz

$$\varepsilon_2 = a\varepsilon_1 + \alpha(\varepsilon_1) \varepsilon_1,$$

wo a eine von Null verschiedene Konstante ist und $\alpha(\varepsilon_1)$ mit ε_1 verschwindet, so erhält man die Gleichungen

$$a^2 f_2 + f_1 = 0, \quad 2a\alpha(\varepsilon_1) f_2 + \varepsilon_1 \beta(\varepsilon_1) = 0,$$

wo $\beta(\varepsilon_1)$ endlich ist, also zwei reelle Funktionen

$$(11) \quad \varepsilon_2^{(1,2)} = a^{(1,2)} \varepsilon_1 + \alpha^{(1,2)}(\varepsilon_1) \varepsilon_1,$$

$a^{(1,2)} = \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_3}}$; dies in (8a) eingesetzt gibt

$$\Delta J = \varepsilon_1 (F_1 + a^{(1,2)} F_2) + (\varepsilon_1)_2,$$

somit $F_1 = 0$. Somit ist $F = 0$ in (x_0, x_1) und die Lagrangesche Regel behält ihre Gültigkeit.

Ist die Legendresche, nicht aber die Jacobische Bedingung erfüllt, d. h., wenn x_0' der zu x_0 konjugierte Punkt ist, $x_0 < x_0' < x_1$, dann benutzt man mit Vorteil die Schwarzsche*) Funktion. Es sei wieder $F(x) \neq 0$ für x_3 , dann wähle man:

$$\eta_1(x) = [x - (x_3 - \delta)]^2 [x - (x_3 + \delta)]^2$$

in $x_3 - \delta$, $x_3 + \delta$, sonst Null, und

$$\eta_2(x) = u(x) + ks(x) \text{ in } (x_0, x_0'),$$

$$\eta_2(x) = ks(x) \text{ in } (x_0', x_1).$$

Hier ist $u(x)$ ein Integral der Jacobischen Gleichung, das in x_0, x_0' verschwindet, $s(x)$ irgend eine stetige mit zwei Ableitungen versehene, in x_0 und x_1 verschwindende, in x_0' von Null verschiedene Funktion, endlich k eine Konstante. Schreibt man die zweite Variation von k

$$\delta^2 K = \varepsilon_1^2 f_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 f_2 + \varepsilon_2^2 f_3,$$

dann hat man für f_3

$$f_3 = 2kg_{y,z}(x_0') u'(x_0') s(x_0') + k^2 \int_{x_0}^{x_1} s \Psi(s) dx,$$

wenn $\Psi(s)$ den Algorithmus der Jacobischen Gleichung bedeutet. Jetzt erhält man wieder aus (9a)

$$a^0 f_3 + 2a f_2 + f_1 = 0, \quad \alpha(\varepsilon_1) (2f_3 a + 2f_2) + \varepsilon_1 \beta(\varepsilon_1) = 0,$$

somit zwei Funktionen ε_2

$$\varepsilon_2^{(1,2)} = a^{(1,2)} \varepsilon_1 + \alpha^{(1,2)}(\varepsilon_1) \varepsilon_1,$$

$$(11') \quad a^{(1,2)} = -\frac{f_2}{f_3} \pm \frac{1}{f_3} \sqrt{f_2^2 - f_1 f_3};$$

denn da k beliebig klein und von beliebigem Vorzeichen ist, kann ich f_1, f_3 entgegengesetzte Vorzeichen erteilen. In (8) eingesetzt gibt dies wieder

$$\Delta J = \varepsilon_1 (F_1 + a^{(1,2)} F_2) + (\varepsilon_1)_2,$$

also $F_1 = 0$. Somit ist $F = 0$ und die Lagrangesche Regel wieder richtig.

*) Vgl. Sommerfeld: „Bemerkungen zur Variationsrechnung“. Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. 1900. Bd. VIII.

Wir kommen jetzt zum zweiten Teile des ausgesprochenen Satzes, indem wir folgendes Beispiel betrachten. Als Integral K wählen wir das Integral in (4)

$$(4) \quad K = \int_0^1 y'^2 [y^4 (y^2 - px) (y^2 - qx) + a] dx$$

$$p > 0, \quad q > 0, \quad a > 0,$$

dem die Extremale E_0 : $y = 0$ den Wert Null erteilt, und als Integral J das folgende

$$(12) \quad J = \int_0^1 (ay'^2 + y) dx,$$

dessen Lagrangesche Gleichung

$$1 - 2ay'' = 0$$

lautet, so daß E_0 dafür keine Extremale ist. Ist K Null längs irgend einer Kurve C , so muß dieselbe notwendigerweise in das Gebiet zwischen den beiden Parabeln K_1, K_2 eintreten. Es sei 5 ein Punkt zwischen den Parabeln, dann ist $k_1^2 > qh_1$, also gibt das die Punkte 0, 5 verbindende Geradenstück

$$\int_0^5 y'^2 dx = \frac{k_1^2}{h_1} > q,$$

und da für jede andere die Punkte 0,5 verbindende Kurve

$$\int_0^5 y'^2 dx > \frac{k_1^2}{h_1} > q$$

ist, und durch Verkleinerung des Bereiches das Integral $\int_0^1 y dx$ beliebig klein gemacht werden kann, so ist gewiß $\Delta J > 0$ längs aller Kurven, für welche $K = 0$ ist. Solcher Kurven gibt es aber in jedem noch so kleinen $y = 0$ umschließenden Bereiche stetig unendlich viele, wenn die Bedingung (5) erfüllt ist. Damit ist unser Ziel erreicht.

Wir übertragen noch unsere Entwicklungen auf den Fall des isoperimetrischen Problems mit mehreren Nebenbedingungen. Es ist also

$$(13) \quad J = \int f(x, y, y') dx$$

zu einem Extremum zu machen, während gleichzeitig die Integrale

$$(14) \quad K_i = \int g_i(x, y, y') dx \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

bestimmte Werte annehmen sollen. Wird $y(x)$ variiert

$$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \eta_i(x),$$

dann kommt

$$\Delta J = \varepsilon \int \eta F dx + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \int \eta_i F dx + (\varepsilon, \varepsilon)_2,$$

$$\Delta K_j = \varepsilon \int \eta G_j dx + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \int \eta_i G_j dx + (\varepsilon, \varepsilon)_2 = 0,$$

$$(j = 1, 2, \dots, m),$$

wo

$$F = f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}, \quad G_j = (g_j)_y - \frac{d}{dx} (g_j)_{y'}.$$

Bestehen zwischen den G_j genau $k \leq m$ identisch in x erfüllte linear unabhängige Gleichungen

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} G_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

dann ist die Determinante

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \int \eta_1 G_1 dx & \dots & \int \eta_m G_1 dx \\ \dots & \dots & \dots \\ \int \eta_1 G_m dx & \dots & \int \eta_m G_m dx \end{vmatrix}$$

vom Range $m - k$, d. h. für gewisse $\eta_i(x)$ verschwinden nicht alle Unterdeterminanten $m - k^{\text{ter}}$ Ordnung, während für alle $\eta_i(x)$ alle Unterdeterminanten $m - k + 1^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden. Wäre $m - k' < m - k$ der Rang der Determinante, und die Unterdeterminante der ersten $m - k'$ Zeilen und Kolonnen von Null verschieden für gewisse $\eta_i(x)$,

$$(i = 1, 2, \dots, m - k'),$$

dann bestünden zwischen den G die $k' > k$ linear unabhängigen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \int \eta_1 G_1 dx & \dots & \int \eta_m G_1 dx & G_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int \eta_1 G_{m-k'} dx & \dots & \int \eta_m G_{m-k'} dx & G_{m-k'} \\ \int \eta_1 G_\mu dx & \dots & \int \eta_m G_\mu dx & G_\mu \end{vmatrix} = 0. \quad (\mu = m - k' + 1, \dots, m).$$

Sind die G_j ($j = 1, 2, \dots, m$) linear unabhängig und ist also (15) vom Range m , dann besteht für die Extremale E_0 die Lagrangesche Gleichung

$$(16) \quad F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x) = 0,$$

wo die λ_i endliche Konstanten sind, und es handelt sich um den Beweis der Gültigkeit derselben, wenn zwischen den G_j lineare Identitäten in x bestehen, und die Extremale gewisse Voraussetzungen erfüllt.

Wir nehmen den einfachsten Fall an, wo $k = 1$, d. h. zwischen den G_j eine einzige Gleichung

$$(17) \quad G_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i G_i = 0$$

besteht. Bezeichnet man mit Δ die Unterdeterminante der ersten $m-1$ Zeilen und Kolonnen von (15), mit $\Delta_{i,0}$, $\Delta_{i,m}$ das Resultat der Ersetzung der i^{ten} Kolonne in Δ durch

$$\int \eta G_1 dx, \dots, \int \eta G_{m-1} dx$$

und durch

$$\int \eta_m G_1 dx, \dots, \int \eta_m G_{m-1} dx,$$

dann hat man

$$\varepsilon_i = - \frac{\varepsilon \Delta_{i,0} + \varepsilon_m \Delta_{i,m}}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

und es handelt sich um die Auflösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{m-1} (\varepsilon \Delta_{i,0} + \varepsilon_m \Delta_{i,m})^2 \int (\bar{g}_y^2 \eta_i'^2 + 2 \bar{g}_{y'y'} \eta_i' \eta_i + \bar{g}_y^2 \eta_i^2) dx \right. \\ \left. + \varepsilon_m^2 \Delta^2 \int (\bar{g}_y^2 \eta_m'^2 + 2 \bar{g}_{y'y'} \eta_m' \eta_m + \bar{g}_y^2 \eta_m^2) dx \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \Delta^2 \int (\bar{g}_y^2 \eta^2 + 2 \bar{g}_{y'y'} \eta' \eta + \bar{g}_y^2 \eta^2) dx + (\varepsilon, \varepsilon_m)_3 \right] = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\bar{g} = g_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i g_i,$$

und die $\eta_i(x)$ sind ($i = 1, 2, \dots, m-1$) derart angenommen, daß $\Delta \neq 0$, und für voneinander verschiedene Werte $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$

$$\eta_i(x) = [x - (\xi_i - \delta)]^2 [x - (\xi_i + \delta)]^2$$

in $\xi_i - \delta$, $\xi_i + \delta$, sonst aber Null sind. Ist jetzt für $\bar{g}_y$ die Legendresche Bedingung nicht erfüllt, dann bestimmt man wieder durch geeignete Wahl von $\eta_m(x)$ und $\eta(x)$ ε_m als zweiwertige reelle für $\varepsilon \neq 0$ zwei verschiedene Werte annehmende Funktion

$$\varepsilon_m = \alpha^{(1,2)} \varepsilon + \alpha^{(1,2)}(\varepsilon) \varepsilon,$$

wobei $\alpha^{(1,2)}$ mit ε verschwindet. Durch Einsetzen in ΔJ erhält man

$$\Delta J = \varepsilon \left[\int \eta F dx - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{i,0} + \alpha^{(1,2)} \Delta_{i,m}}{\Delta} \int \eta_i F dx + \alpha^{(1,2)} \int \eta_m F dx \right] + (\varepsilon)_3,$$

und daraus

$$\int \eta F dx - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\Delta_{i,0}}{\Delta} \int \eta_i F dx = 0,$$

woraus man auf das Bestehen der Lagrangeschen Gleichung (16) schließt. Dasselbe Resultat erhält man, wenn die Jacobische Bedingung nicht erfüllt ist.

Das insbesondere von den Herren v. Escherich*) und Hahn**) behandelte „Lagrangesche Problem“ erfordert eine ähnliche Ergänzung durch das Studium des sogenannten „Ausnahmefalles“, wie sie hier für das isoperimetrische Problem zu geben versucht worden ist.

Göttingen, Juni 1909.

*) In den „Wiener Berichten“ Bände 107—110.

**) Mathematische Annalen Bd. 58.