Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Das Auftreten der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichte e^{-x^2} bei wiederholten Versuchen, bei Messungsfehlern, die aus der Zusammensetzung von sehr vielen und sehr kleinen Elementarfehlern resultieren, bei Diffusionsvorgängen usw. ist bekanntlich aus einem und demselben Grenzwertsatz zu erklären, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Der eigentliche Entdecker dieses Grenzwertsatzes ist Laplace zu nennen, seine strenge Begründung hat zuerst wohl Tschebyscheff unternommen und seine schärfste Formulierung findet sich, soweit mir bekannt, in einer Arbeit von Liapounoff[1]. Für den genauen Wortlaut soll etwa auf die letztgenannte Stelle oder auf andere Arbeiten über den Gegenstand[2] oder auf die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung[3] verwiesen werden.

Ich befasse mich hier bloß mit einer mathematischen Methode, die zum Beweise dieses Grenzwertsatzes herangezogen werden kann, oder genauer gesagt, mit einigen rein analytischen Sätzen über Folgen monotoner Funktionen, auf die der Beweis aufgebaut werden kann. Dem Kenner des Gegenstandes wird es nicht entgehen, an welchem Punkte des üblichen Beweisganges meine Sätze zu benutzen sind. Man hat z. B. damit an die Formel (13) auf S. 27 der v. Misesschen Abhandlung[2] anzuknüpfen.

[1] Liapounoff, Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIIIe série, vol. XII, No. 5.

[2] Vgl. z. B. R. v. Mises Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr., 4 (1919), S. 1–97, Sätze III, III_2. Die Sätze I, II, IV und V dieser Abhandlung berühren sich mit dem hier gemeinten Grenzwertsatze, aber sind darin nicht enthalten.

[3] Vgl. z. B. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von H. Liebmann (Leipzig 1912), S. 67–81, 259–271.

Der Beweis wird nachher durch eine ähnliche Formel [vgl. Formel (17) dieser Abhandlung] erbracht, wie die Formel (25) auf S. 34 der v. Misesschen Abhandlung.

Ich erwähne nur, daß auch die schärfste mir bekannte Fassung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzwertsatzes, nämlich die von Liapounoff, meinen Hilfsmitteln erreichbar ist. Die ausführliche Darstellung spare ich mir für ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf, das ich seit langem vorbereite[4]).

Die Benutzung diskontinuierlicher Faktoren in diesen Fragen geht bis auf Laplace zurück. Liapounoff erreichte sein Ziel durch eine geistreiche Modifikation der herkömmlichen Gestalt des diskontinuierlichen Faktors von Dirichlet. Meine Untersuchung im § 1 stützt sich ebenfalls auf eine Art von diskontinuierlichem Faktor, nämlich auf ein über das komplexe Gebiet erstrecktes Integral, das in der analytischen Zahlentheorie ständig verwendet wird [vgl. (18)]. Mein Weg zum Beweise des Laplace-Tschebyscheffschen Grenzwertsatzes ist ähnlich beschaffen, nur viel weniger verschlungen als der Weg, auf dem man zum Beweise des Primzahlsatzes gelangt.

Der springende Punkt in dem Tschebyscheff-Markoffschen Beweisgange bildet der Nachweis einer Eigenschaft der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx.$$

Die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ seien monoton; wenn die Momente von $f_n(x)$ gegen die von $f(x)$ streben, so strebt $f_n(x)$ gegen $f(x)$. Ich zeige im § 2, daß diese Eigenschaft jeder monotonen und stetigen Funktion $f(x)$ zukommt, die von 0 bis 1 wächst, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, wenn nur die Momente von $f(x)$ gewissen einfachen Ungleichungen genügen. Diesen Satz möchte ich als den „Stetigkeitssatz des Momentenproblems" bezeichnen. Der Stetigkeitssatz des Momentenproblems wird sich in § 2 als eine leicht übersichtliche Folgerung des Schlußsatzes des § 1 ergeben.

§ 1.

Sätze über Folgen monotoner Funktionen.

Die Sätze, die ich im folgenden ableite, lassen sich auch für ein endliches Intervall aussprechen und auch auf solche Funktionen mehrerer

---

[4]) Eine Probe meiner Untersuchungen habe ich in der Arbeit „Über das Gaußsche Fehlergesetz", Astronomische Nachrichten, 208 (1919), Nr. 4981 veröffentlicht.

Variablen übertragen, die in jeder Variablen monoton sind. Mit Rücksicht auf die Anwendung, die mir vorschwebt, ziehe ich es vor, nur eine spezielle Art von monotonen Funktionen einer Veränderlichen zu untersuchen.

Ich betrachte solche Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Werte von x definiert sind, nie abnehmen, von rechts stetig sind (von links können sie jedoch unstetig sein) und überdies die Eigenschaft haben, daß

$$(1) \qquad \lim_{x=-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x=+\infty} f(x) = 1.$$

Eine solche Funktion will ich, im Anschluß an Herrn v. Mises, kurz als eine Verteilungsfunktion bezeichnen.

Satz I. *Wenn eine Folge von Verteilungsfunktionen gegen eine stetige Verteilungsfunktion konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig.*

Gemeint ist natürlich Konvergenz in jedem Punkt. (Wie aus dem Beweis hervorgeht, würde es genügen, weniger, nämlich bloß Konvergenz in einer überall dichten Punktmenge, vorauszusetzen.)

Die fragliche Folge soll

$$(2) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

heißen, und die Grenzfunktion $f(x)$. Da letztere der Bedingung (1) genügt, ist es möglich, bei beliebig vorgegebenem positiven ε eine ganze Zahl l zu finden, derart, daß

$$(3) \qquad f(-l) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad f(+l) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da die Grenzfunktion $f(x)$ stetig und folglich gleichmäßig stetig ist, existiert eine ganze positive Zahl m, so daß die Ungleichungen

$$(4) \qquad f\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\mu = -lm+1,\ -lm+2,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ lm)$$

erfüllt sind. Da die Folge (2) gegen $f(x)$ konvergiert, sind für alle n von einem gewissen an auch die $2lm+1$ Ungleichungen

$$(5) \qquad \left| f_n\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu}{m}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\mu = -lm,\ -lm+1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ lm-1,\ lm)$$

erfüllt.

Ich betrachte nacheinander die drei Intervalle von $-\infty$ bis $-l$, von $-l$ bis $+l$, von $+l$ bis $+\infty$, jedes für sich. Wenn

$$(6) \qquad x \leqq -l,$$

so ist

$$(7) \qquad 0 - f(-l) \leqq f_n(x) - f(x) \leqq f_n(-l) - 0,$$

da die betrachteten Funktionen monoton sind und den Bedingungen (1) genügen. Nun ist nach (3) und nach (5) ($\mu = -lm$ gesetzt)

$$f_n(-l) \leqq |f_n(-l) - f(-l)| + f(-l) \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Berücksichtigung dieser Ungleichung und der Ungleichung (3) ergibt sich aus (7) im Intervalle (6)

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \varepsilon.$$

Ähnlich läßt sich der Fall $x \geqq +l$ behandeln. Liegt aber x zwischen $-l$ und $+l$, so ist

$$\frac{\mu - 1}{m} \leqq x \leqq \frac{\mu}{m}$$

für ein passendes μ der Reihe $\mu = -lm + 1, \dots 0, \dots + lm$. Somit ist nach (4) und (5), und weil die betrachteten Funktionen monoton wachsen,

$$f_n(x) - f(x) \leqq \left(f_n\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu}{m}\right)\right) + \left(f\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$f_n(x) - f(x) \geqq \left(f_n\left(\frac{\mu-1}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) - \left(f\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) \geqq -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D. h. es ist für alle Werte von x

$$-\varepsilon \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \varepsilon$$

für alle n von einem passenden an, w. z. b. w.

Satz II. *Es sei die Derivierte von rechts der stetigen Funktion $F_n(x)$ eine Verteilungsfunktion* ($n = 1, 2, 3, \dots$). *Wenn die Folge*

$$(8) \qquad F_1(x),\ F_2(x),\ \dots,\ F_n(x),\ \dots$$

gegen eine derivable Funktion $F(x)$ konvergiert, deren Derivierte eine Verteilungsfunktion ist, so konvergiert auch die Folge der rechten Derivierten der Funktionen $F_n(x)$, und zwar gleichmäßig gegen $F'(x)$.

Ich bezeichne die *rechte* Derivierte von $F_n(x)$ mit $f_n(x)$, die Derivierte von $F(x)$ mit $f(x)$. Die Funktionen $f_n(x)$ können eventuell an unendlich vielen Stellen Unstetigkeit durch Sprung erleiden. Eine andere Art von Unstetigkeit ist bei monotonen Funktionen ausgeschlossen. Die Funktion $f(x)$ ist jedoch eine Derivierte, nimmt als solche alle Zwischenwerte an, kann folglich keine Sprungstellen haben und ist somit *stetig*. Gestützt auf Satz I genügt es also, bloß die Konvergenz der Folge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ zu beweisen, die gleichmäßige Konvergenz folgt daraus von selbst.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu einer gegebenen Zahl x lassen sich zwei andere x_1 und x_2 so bestimmen, daß

$$x_1 < x < x_2$$

$$(9) \qquad \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $f_n(x)$ eine Verteilungsfunktion und die rechte Derivierte von $F_n(x)$ ist, folgt für alle n

$$F_n(x) - F_n(x_1) = \int_{x_1}^{x} f_n(x)\,dx \leqq (x - x_1)\, f_n(x),$$

$$F_n(x_2) - F_n(x) = \int_{x}^{x_2} f_n(x)\,dx \geqq (x_2 - x)\, f_n(x),$$

oder anders geschrieben

$$\frac{F_n(x)-F_n(x_1)}{x-x_1} \leqq f_n(x) \leqq \frac{F_n(x_2)-F_n(x)}{x_2-x}.$$

Daraus folgt, da die Folge (8) gegen $F(x)$ konvergiert, daß für alle n von einem gewissen an

$$(10) \qquad \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq f_n(x) \leqq \frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Kombiniert man (9) und (10), so ergibt sich für alle fraglichen n

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz III. *Ich betrachte die Folge von uneigentlichen Stieltjesschen Integralen*

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_1(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_2(t), \quad \ldots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t), \quad \ldots,$$

wo $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ Verteilungsfunktionen bedeuten und eine positive Größe a existiert, derart, daß jedes Integral für $-a \leqq u \leqq +a$ konvergiert. Es sei vorausgesetzt, daß für dieselben Werte von u

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df(t),$$

wo $f(t)$ eine stetige Verteilungsfunktion bedeutet.

Dann ist, gleichmäßig für alle Werte von x,

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze ich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df(t) = \Phi(u), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t) = \Phi_n(u)$$

und betrachte die Funktionen $\Phi(u)$, $\Phi_n(u)$ für komplexe Werte der Variablen u, insbesondere für solche, die im unendlichen vertikalen Streifen

$$(14) \qquad -a \leqq \Re(u) \leqq +a$$

von der Dicke $2a$ liegen. Es ist für $b>0$, wenn (14) erfüllt ist,

$$(15) \qquad \left|\int_0^b e^{ut}\,df_n(t)\right| \leqq \int_0^\infty e^{at}\,df_n(t), \qquad \left|\int_{-b}^0 e^{ut}\,df_n(t)\right| \leqq \int_{-\infty}^0 e^{-at}\,df_n(t).$$

Daraus folgt, daß die Integrale (11) im ganzen Streifen (14) existieren, und daß in dessen Innerem die Funktionen $\Phi_n(u)$ sämtlich analytisch sind. Es folgt übrigens aus (15), indem man b unendlich werden läßt, daß in demselben Streifen (14)

$$(16) \qquad |\Phi_n(u)| \leqq \Phi_n(a) + \Phi_n(-a).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung hat, nach Voraussetzung (12), für $n=\infty$ einen Grenzwert. Sie hat also a fortiori eine von n unabhängige endliche obere Schranke, und folglich bleibt die Funktionenfolge $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \ldots, \Phi_n(u), \ldots$ in dem Streifen (14) gleichmäßig beschränkt. Die Konvergenz der Folge (11) pflanzt sich somit, kraft des grundlegenden Vitalischen Satzes, von der reellen Achse auf den ganzen Streifen (14) fort und findet gleichmäßig in jedem endlichen Teil davon statt.

Es sei die Zahl α, $0<\alpha<a$ fest gewählt. Es folgt aus dem erschlossenen Verhalten der Folge $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \ldots, \Phi_n(u), \ldots$, daß

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi_n(u)\frac{e^{-xu}}{u^2}\,du = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(u)\frac{e^{-xu}}{u^2}\,du,$$

für beliebige reelle Werte von x, die Integrale entlang einer zur imaginären Achse parallelen Gerade erstreckt. In der Tat: die Integrale links haben, nach (16), eine gemeinsame Majorante.

Es ist, wie bekannt,

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{uz}}{u^2}\,du = \begin{cases} z & \text{für } z \geqq 0, \\ 0 & \text{für } z \leqq 0. \end{cases}$$

Da man bei absoluter Konvergenz die Integrationsfolge vertauschen darf, ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi_n(u)\frac{e^{-xu}}{u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} df_n(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{u(t-x)}}{u^2}\,du\right) = \int_x^\infty (t-x)\,df_n(t).$$

Eine ähnliche Formel gilt für $\Phi(u)$. Setzt man also

$$F_n(x) = x + \int_x^\infty (t-x)\, df_n(t), \qquad F(x) = x + \int_x^\infty (t-x)\, df(t),$$

so kann man (17) auch so schreiben:

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = F(x). \tag{19}$$

Die rechte Derivierte von $F_n(x)$ ist $f_n(x)$, die Derivierte von $F(x)$ ist $f(x)$, wie man leicht nachrechnet. Somit wird der Satz II auf die eben definierte Folge $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ anwendbar, und der Satz III ist bewiesen.

In den Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx,$$

und die Gleichung (12) läßt sich gewöhnlich verhältnismäßig einfach erhalten, wie z. B. bei dem Markoffschen Problem der verketteten Größen. Die Stellung meines Beweisganges zu den eingangs erwähnten läßt sich so charakterisieren: Tschebyscheff und Markoff betrachten hauptsächlich die Derivierten von $\Phi_n(u)$ für $u=0$, Liapounoff betrachtet $\Phi_n(u)$ für rein imaginäre Werte von u, ich betrachte $\Phi_n(u)$ als analytische Funktion von u im Streifen (14). Einer Verallgemeinerung auf mehrere Variablen, die zur Behandlung mehrdimensionaler Wahrscheinlichkeitsprobleme dienen kann, steht keine Schwierigkeit im Wege.

§ 2.

Der Stetigkeitssatz des Momentenproblems.

Ich beweise den folgenden allgemeinen Satz:

Die Verteilungsfunktion $f(x)$ sei stetig. Die Momente von $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, df(x) = t_m \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

sollen der Bedingung genügen, daß

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\ \frac{\sqrt[2m]{t_{2m}}}{m} \tag{21}$$

endlich ist. Genügt dann die Folge von Verteilungsfunktionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{22}$$

den unendlich vielen Grenzbedingungen

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\mu\, df_n(x) = t_\mu' \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{23}$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$$

gleichmäßig in jedem Intervalle.

Kurz gefaßt, besagt dieser Satz, daß wenn die Momente der Funktionenfolge (22) gegen die von $f(x)$ konvergieren, so konvergiert die Folge gegen $f(x)$. Tschebyscheff und Markoff haben diesen Satz bloß für den Fall

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx$$

bewiesen[5]). Heute, wo neuere Untersuchungen das Stieltjessche Momentenproblem in verschiedenen Richtungen vertieft und klargelegt haben, ist der Satz verhältnismäßig leicht abzuleiten. Er ist ein einfaches Korollar einer kürzlich publizierten Bemerkung des Herrn H. Hamburger[6]), die sich ihrerseits auf die wichtigen Untersuchungen des Herrn Grommer[7]) stützt.

Es sei mir gestattet, für diesen Satz, dem so viele berühmte Bemühungen gegolten haben, hier einen kurzen, direkten Beweis zu führen, der sich neben einigen rein algebraischen Sätzen, die jedem Kenner des Momentenproblems völlig geläufig sind, sich bloß auf meinen eben bewiesenen Hilfssatz III stützt.

Ich will zuerst die nötigen algebraischen Sätze in passender Fassung zusammenstellen, die bis auf einen, den man Herrn Grommer verdankt, sich schon in den ersten Arbeiten von Tschebyscheff und Stieltjes finden[8]).

1. Eine Verteilungsfunktion, die nur endlich viele Sprungstellen hat und zwischen zwei konsekutiven Sprungstellen konstant ist, bezeichne ich als eine *Treppenfunktion*. *Ist $f(x)$ eine Verteilungsfunktion, jedoch keine Treppenfunktion, so gehört zu $f(x)$ eine nie abbrechende Folge von annähernden Treppenfunktionen $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$.*

Hierbei ist $T_n(x)$ eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß sie genau n Sprungstellen haben und den $2n$ Gleichungen

---

[5]) Ein außerordentlich eleganter Beweis befindet sich bei A. Markoff, Démonstration du second théorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments. (Supplément à la 3-ième édition russe du „Calcul des probabilités".) (St. Pétersbourg, 1913.) Vgl. auch v. Mises a. a. O. S. 51.

[6]) H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschrift, 4 (1919), S. 186—222. Vgl. S. 212—222.

[7]) J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Crelles Journal f. Mathematik, 144 (1913), S. 114—166.

[8]) Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, Annales de l'Ecole Normale, 3. Folge, 1 (1884), S. 409—426.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu d\,T_n(x) = t_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1) \tag{24}$$

genügen soll.

2. *Befindet sich x zwischen zwei benachbarten Sprungstellen von $T_n(x)$, so kann die Differenz $f(x) - T_n(x)$ den größeren der beiden zu diesen Stellen gehörigen Sprünge dem absoluten Werte nach nicht übertreffen.*

Die beschriebene Ungleichung bringt nur einen Teil der Tatsache zum Ausdruck: die die Funktion $f(x)$ darstellende monotone Kurve muß alle vertikalen Strecken der Treppe passieren, die $T_n(x)$ darstellt.

3. Während die $2n$ ersten Momente von $f(x)$ mit denjenigen von $T_n(x)$ gemäß (24) übereinstimmen, besteht für die höheren Momente von geradem Index die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu} d\,T_n(x) < t_{2\nu} \qquad (\nu = n, n+1, n+2, \ldots), \tag{25}$$

die von Herrn Grommer herrührt[9]).

Ich betrachte nun das Stieltjessche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} d\,T_n(x) = t_0 + \frac{t_1}{1!}u + \ldots + \frac{t_{2n-1}}{2n-1!}u^{2n-1} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu d\,T_n(x), \tag{26}$$

das eigentlich bloß die Summe von n Exponentialgrößen und als solche eine ganze Funktion der Variablen u ist. Die Voraussetzung (21) könnte auch so gefaßt werden, daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[2n]{\frac{t_{2n}}{2n!}} = \frac{e}{2}\, \overline{\lim_{n=\infty}}\, \frac{\sqrt[2n]{t_{2n}}}{n}$$

endlich ist, oder auch so, daß die Potenzreihe

$$t_0 + \frac{\sqrt{t_0 t_2}}{1!}u + \frac{t_2}{2!}u^2 + \frac{\sqrt{t_2 t_4}}{3!}u^3 + \frac{t_4}{4!}u^4 + \ldots \tag{27}$$

einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius hat. Die Potenzreihe (27) ist jedoch eine gemeinsame Majorante aller Reihen, die man erhält, wenn man rechts in (26) $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt. Auf die Glieder mit geradem Index ist die Ungleichung (25) ohne weiteres anwendbar, für die Glieder mit ungeradem Index besteht die Ungleichung

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu+1} d\,T_n(x)\right)^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu} d\,T_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu+2} d\,T_n(x).$$

[9]) Vgl. l. c. [7]) S. 132, Formel (16).

Da wir mit einer Folge von Potenzreihen mit gemeinsamer Majorante zu tun haben, folgt aus (26) im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (27)

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} dT_n(x) = t_0 + \frac{t_1}{1!} u + \frac{t_2}{2!} u^2 + \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} df(x).$$

Die Verwandlung der Reihe in das Integral ist gestattet, da auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u|x|} df(x)$$

von der Reihe (27) majorisiert wird[10]).

Mit (28) ist jedoch die Bedingung (12) des Hilfssatzes III erfüllt, durch dessen Anwendung sich

$$(29) \qquad \lim_{n=\infty} T_n(x) = f(x)$$

ergibt, und zwar gleichmäßig für alle x, da doch $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde. Die Limesgleichung (29) ist gemäß (24) nur ein Spezialfall des zu beweisenden Satzes, aber in diesem Spezialfall ist der Kernpunkt der Sache enthalten[11]).

Ordnen wir jetzt nämlich der Verteilungsfunktion $f_n(x)$, die das allgemeine Glied der Folge (22) bildet, die annähernden Treppenfunktionen

$$T_1^{(n)}(x),\ T_2^{(n)}(x), \ldots T_m^{(n)}(x), \ldots$$

zu und zerlegen wir die Differenz

$$(30) \qquad f(x) - f_n(x) = (f(x) - T_m(x)) + (T_m(x) - T_m^{(n)}(x)) + (T_m^{(n)}(x) - f_n(x)),$$

deren drei Teile wir nacheinander betrachten wollen.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Limesgleichung (29) gleichmäßig für alle x stattfindet, und die Funktion $f(x)$ gleichmäßig stetig ist, ist es zunächst möglich ein m zu bestimmen, so daß für dieses m

[10]) Vgl. bei Hamburger, l. c. [6]) S. 195, Hilfssatz 2. Übrigens wäre in unserem Fall auch der Weierstraßsche Doppelreihensatz anwendbar.

[11]) Die Beziehung (29) kann auch so ausgedrückt werden, daß der zu der Reihe $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n df(x)$ assoziierte Kettenbruch, dessen n-ter Näherungsbruch eben $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT_n(x)}{z+x}$ ist, konvergiert. Vgl. Hamburger a. a. O. Übrigens ist das Hauptlemma des Herrn Hamburger a. a. O. S. 196—198 in unwesentlich verschiedener Form schon in meiner unter [4]) zitierten Arbeit zu finden.

$$|f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{31}$$

wird, und daß alle Sprünge der Funktion $T_m(x)$ ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sind.

Die m Sprungstellen und die m dazugehörigen Sprünge der Funktion $T_m(x)$ sind algebraische Funktionen der $2m$ Zahlen $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2m-1}$ ebenso, wie die m Sprungstellen und Sprünge von $T_m^{(n)}(x)$ von den ersten $2m$ Momenten von $f_n(x)$ es sind (vgl. unter 1). Des genaueren soll man sich daran erinnern, daß die m Sprungstellen von $T_m(x)$ die verschiedenen (und folglich einfachen) Nullstellen einer Gleichung m-ten Grades sind, deren Koeffizienten rational von $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2m-1}$ abhängen, und daß jeder Sprung sich rational durch die betreffende Sprungstelle und durch $t_0, t_1, \ldots, t_{2m-1}$ ausdrückt. Beschränken wir uns auf die ersten $2m$ Limesgleichungen unter (23), indem wir $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2m-1$ setzen. Beachten wir, daß algebraische Funktionen stetig sind und daß unter den beschriebenen Bedingungen eine Verwechselung der m verschiedenen Zweige unmöglich (und auch irrelevant) ist. So sehen wir, daß es eine ganze Zahl N existiert, so daß für $n > N$ einerseits

$$|T_m(x) - T_m^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{32}$$

und andererseits die Sprünge von $T_m^{(n)}(x)$, ebenso wie diejenigen von $T_m(x)$, kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ausfallen.

Aus der letzterwähnten Tatsache folgt, gemäß dem unter 2 zitierten Satze, daß

$$|T_m^{(n)}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33}$$

Die Gleichung (30) und die Ungleichungen (31), (32), (33) ergeben zusammengefaßt

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle fragliche n und gleichmäßig für alle x, w. z. b. w.

Es liegt auf der Hand, daß die hervorgehobene Gleichmäßigkeit der Konvergenz ohne die vorausgesetzte Stetigkeit von $f(x)$ für beliebige Folgen (22) nicht stattfinden könnte. Läßt man die Bedingung der Stetigkeit von $f(x)$ fallen, so gibt der dargestellte Beweisgang noch immer bestimmte Resultate, auf deren Formulierung ich kein Gewicht lege.

(Eingegangen am 4. September 1919.)