LE SUPERFICIE IPERELLITTICHE CON FASCI ELLITTICI DI CURVE ELLITTICHE.

Memoria di **Concetta Bonomi** (Catania).

Adunanza del 23 marzo 1919.

Chiamiamo *determinante* di due fasci ellittici di curve ellittiche situate sopra una superficie iperellittica ¹⁾ il numero (costante) dei punti che la curva generica di uno dei due fasci ha in comune con la curva generica dell'altro.

Allora il problema che viene esaminato in questo lavoro è il seguente:

Supposto che una superficie iperellittica contenga due fasci a determinante assegnato di quale forma deve essere la matrice riemanniana a cui essa appartiene?

La via che seguo per risolverlo parte da alcune formule che si deducono subito da un teorema generale dimostrato dal Prof. SCORZA in una Nota che uscirà prossimamente negli *Atti dell'Accademia Gioenia* di Catania.

Ma per comodità del lettore e per la chiarezza dell'esposizione mi è sembrato opportuno darne la dimostrazione esplicita nel § 1.

Tra i risultati a cui pervengo mi sia permesso di richiamare l'attenzione su quelli contenuti nel § 3, ove vengono classificate le superficie iperellittiche con fasci a determinante *primo*, e nel § 5, ove viene dimostrato il teorema che *se una superficie iperellittica con due fasci ellittici di curve ellittiche appartiene a una matrice di RIEMANN semplicemente singolare dotata di una forma riemanniana alternata intera a divisore 1, il determinante dei due fasci è necessariamente un quadrato perfetto*.

Come è noto ²⁾ in tal caso la superficie rappresenta la varietà delle coppie di punti di una curva di genere 2 o delle coppie di punti estratte da due curve ellittiche.

¹⁾ Per la definizione di superficie iperellittica che qui si intende adottare veggasi G. SCORZA: *Intorno alla teoria generale delle matrici di RIEMANN e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 263-380], pag. 269. Come pure è inteso che a questa Memoria mi riferisco per tutto ciò che ha attinenza con la teoria delle matrici riemanniane.

²⁾ G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le nombre ρ de M. PICARD pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro*. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXX (2° semestre 1910), pp. 185-238], n° 16.

§ I.

**Determinante di due fasci ellittici di curve ellittiche
situati sopra una superficie iperellittica.**

1. Sia F una superficie iperellittica dello spazio ordinario dotata di fasci ellittici di curve ellittiche, cioè appartenente ad una matrice di RIEMANN (di genere 2) dotata di assi.

Ad ognuno di quei fasci situato su F corrisponderà un asse, e ad ogni asse della matrice corrisponderà uno di quei fasci.

Allora dal fatto noto che appena una matrice riemanniana è dotata di un asse ne ha pure un altro (almeno) complementare a quello, segue che la nostra superficie F contiene almeno due fasci ellittici di curve ellittiche.

Essa poi ne conterrà due soltanto o infiniti secondo che la matrice cui appartiene è ad assi isolati o ad assi non isolati.

2. Consideriamo due dei fasci ellittici della superficie F e i corrispondenti assi della matrice di RIEMANN ad essa relativa.

Applicando, ove occorra, a codesta matrice delle operazioni A e delle operazioni B unimodulari potremo supporre che essa abbia la forma

$$(I) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ a_1 w + b_1 w' & a_2 w + b_2 w' & a_3 w + b_3 w' & a_4 w + b_4 w' \end{vmatrix},$$

gli elementi delle due righe essendo le coordinate dei punti di appoggio dei suoi due assi alla sua immagine, e i numeri a_j e b_j essendo numeri interi.

Allora se la rappresentazione parametrica della superficie F mediante funzioni abeliane di due argomenti (u, v) appartenenti alla tabella di periodi (I) è data da:

$$x = f(u, v)$$

$$y = \varphi(u, v)$$

$$z = \psi(u, v)$$

essendo xyx le coordinate cartesiane del punto scorrente su F , le curve dei due fasci considerati saranno semplicemente le curve

$$u = \text{cost.}, \quad v = \text{cost.};$$

e le curve $u = \text{cost.}$ saranno curve ellittiche appartenenti al corpo di funzioni ellittiche $(a_3 w + b_3 w', a_4 w + b_4 w')$, o al corpo (Ω, Ω') , se, per comodità di scrittura, poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} \Omega = a_3 w + b_3 w' \\ \Omega' = a_4 w + b_4 w'. \end{cases}$$

Notisi che Ω e Ω' dovendo essere periodi primitivi di un corpo di funzioni ellittiche non possono essere legati da una relazione lineare omogenea a coefficienti interi non entrambi nulli; quindi l'intero:

$$(3) \quad H = a_3 b_4 - a_4 b_3$$

è certo diverso da zero.

Intanto nella (1) è lecito, ove si voglia, cambiare i segni di tutte le a_j (o di tutte le b_j) perchè ciò equivale a cambiare w in $-w$ (oppure w' in $-w'$); dunque senza venir meno alla generalità possiamo supporre H addirittura positivo.

3. Ciò posto andiamo a calcolare il determinante dei due fasci di curve

$$u = \text{cost.} \quad \text{e} \quad v = \text{cost.}$$

della nostra superficie F in funzione degli interi a_j e b_j .

Consideriamo nei due fasci le curve

$$u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0,$$

cioè le curve rappresentate parametricamente da:

$$(4) \quad \begin{cases} x = f(u_0, v) \\ y = \varphi(u_0, v) \\ z = \psi(u_0, v) \end{cases}$$

e

$$(5) \quad \begin{cases} x = f(u, v_0) \\ y = \varphi(u, v_0) \\ z = \psi(u, v_0) \end{cases}$$

Perchè il punto (u_0, v) della curva rappresentata dalle (4) coincida con un punto (u, v_0) della curva rappresentata dalle (5), occorre e basta che le coppie di valori (u_0, v) e (u, v_0) dei parametri u, v siano congrue rispetto alla tabella di periodi (1); ossia che si abbia

$$(6) \quad \begin{cases} u = u_0 - A w_1 - B w_2 \\ v_0 = v - A(a_1 w + b_1 w') - B(a_2 w + b_2 w') - C(a_3 w + b_3 w') - D(a_4 w + b_4 w') \end{cases}$$

con A, B, C, D interi.

Segue che i valori del parametro v corrispondenti ai punti della curva $u = u_0$ che appartengono anche alla curva $v = v_0$ sono dati tutti, in virtù dell'ultima delle (6) e delle (2), dalla formula

$$(7) \quad v = v_0 + A(a_1 w + b_1 w') + B(a_2 w + b_2 w') + C\Omega + D\Omega'$$

al variare degli interi A, B, C, D .

D'altronde la curva $u = u_0$ appartiene al corpo di funzioni ellittiche (Ω, Ω') , dunque il determinante dei due fasci sarà eguale al numero dei valori di v dati dalla

(7) che risultano incongrui rispetto ai periodi Ω, Ω' ; ossia al numero dei valori di v dati, al variare degli interi A e B , dalla formola

$$(8) \quad v = v_0 + A(a_1 w + b_1 w') + B(a_2 w + b_2 w')$$

che risultano incongrui rispetto ad Ω e Ω' .

Dalle (2) si ricava, per la (3),

$$w = \frac{b_4 \Omega - b_3 \Omega'}{H}, \quad w' = \frac{-a_4 \Omega + a_3 \Omega'}{H},$$

quindi la (8), posto

$$a_{11} = a_1 b_4 - a_4 b_1,$$

$$a_{12} = a_2 b_4 - a_4 b_2,$$

$$a_{21} = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$a_{22} = a_3 b_2 - a_2 b_3$$

diviene

$$(9) \quad v = v_0 + \frac{(A a_{11} + B a_{12})\Omega + (A a_{21} + B a_{22})\Omega'}{H}.$$

Nella (9) gli interi A e B possono essere calcolati rispetto al modulo H , quindi si ha intanto che la (9) non può dare più di H^2 valori per v incongrui rispetto ai periodi Ω, Ω' , perchè ad A e B non possono essere assegnati che H^2 sistemi di valori incongrui rispetto al modulo H .

Ora poniamo nella (9) per gli interi A e B due sistemi di valori A', B' e A'', B'' e vediamo sotto quale condizione accade che i valori che ne risultano per v riescano congrui rispetto ai periodi Ω e Ω' .

Perchè ciò accada occorre evidentemente e basta che sia:

$$\begin{aligned} & \frac{(A' a_{11} + B' a_{12})\Omega + (A' a_{21} + B' a_{22})\Omega'}{H} \\ & \equiv \frac{(A'' a_{11} + B'' a_{12})\Omega + (A'' a_{21} + B'' a_{22})\Omega'}{H} \pmod{\Omega, \Omega'} \end{aligned}$$

ossia

$$(10) \quad \frac{[(A' - A'')a_{11} + (B' - B'')a_{12}]\Omega + [(A' - A'')a_{21} + (B' - B'')a_{22}]\Omega'}{H} = r\Omega + s\Omega'$$

con r ed s interi.

Ma, per una ragione già addotta, la (10) non può sussistere se non a patto che sia identica rispetto ad Ω e Ω' , dunque perchè il fatto voluto accada occorre e basta che sia

$$\frac{(A' - A'')a_{11} + (B' - B'')a_{12}}{H} = r$$

$$\frac{(A' - A'')a_{21} + (B' - B'')a_{22}}{H} = s$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\begin{aligned}(A' - A'')a_{11} + (B' - B'')a_{12} &\equiv 0 \\ (A' - A'')a_{21} + (B' - B'')a_{22} &\equiv 0\end{aligned} \pmod{H}.$$

In altri termini le coppie (A', B') e (A'', B'') danno luogo per v a valori congrui rispetto ai periodi Ω e Ω' quando e solo quando le differenze $A' - A''$ e $B' - B''$ costituiscono una soluzione delle congruenze

$$(11) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \equiv 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{H}.$$

Indichiamo con N il numero delle soluzioni di queste congruenze incongrue rispetto ad H , e siano

$$(x'_1, x'_2), \quad (x''_1, x''_2), \quad \dots, \quad (x^{(N)}_1, x^{(N)}_2)$$

N soluzioni si fatte. Siccome le congruenze sono soddisfatte da $x_1 = x_2 = 0$ si potrà supporre che sia

$$x'_1 = x'_2 = 0.$$

Ciò posto è chiaro che se agli interi A e B si attribuisce nella (9) una determinata coppia di valori A_0, B_0 , vi sono in tutto, compresa la coppia A_0, B_0 , N coppie di valori per A e B incongrui rispetto al modulo H che diano per v valori congrui rispetto ai periodi Ω, Ω' a quello dato dalla coppia A_0, B_0 ; queste N coppie essendo date da:

$$\begin{aligned}A_1 &= A_0 - x'_1 = A_0, & B_1 &= B_0 - x'_2 = B_0; \\ A_2 &= A_0 - x''_1, & B_2 &= B_0 - x''_2; \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ A_N &= A_0 - x^{(N)}_1, & B_N &= B_0 - x^{(N)}_2.\end{aligned}$$

Ma allora il n° dei valori di v incongrui rispetto ai periodi Ω e Ω' forniti dalla (9) al variare degli interi A e B , cioè il determinante dei nostri due fasci, è dato dal quoziente

$$\frac{H^2}{N}.$$

Per dare di questo quoziente il valore esplicito mediante gli interi a_j e b_j distinguiamo le tre ipotesi che possono essere fatte sulla caratteristica del determinante

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

formato dai coefficienti delle (11), e stabiliamo, secondo l'uso, se $\lambda, \mu, \nu, \dots, \sigma$ sono n^i interi, di indicare con $D(\lambda, \mu, \nu, \dots, \sigma)$ il loro massimo comun divisore.

Supponiamo in primo luogo che la caratteristica di (12) sia nulla.

Allora le a_{ij} sono tutte eguali a zero e le congruenze (11) sono identiche; quindi è $N = H^2$ e il determinante dei due fasci è dato da 1.

Supponiamo in secondo luogo che la caratteristica di (12) sia uguale a 1.

Allora indicato con e_1 il divisore elementare ³⁾ (unico) di (12), cioè posto

$$e_1 = D(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

è noto che è

$$N = H \cdot D(H, e_1);$$

quindi in tal caso il determinante dei due fasci è dato da

$$\frac{H}{D(H, e_1)}.$$

Supponiamo in terzo luogo che la caratteristica di (12) sia uguale a 2.

Allora indicati con e_1 ed e_2 i due divisori elementari di (12), cioè posto

$$e_1 = D(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

$$e_2 = \frac{|a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}|}{e_1},$$

è noto che è

$$N = D(H, e_1) \cdot D(H, e_2);$$

quindi in tal caso il determinante dei due fasci è dato da

$$\frac{H^2}{D(H, e_1) \cdot D(H, e_2)}.$$

§ 2.

Riduzione a tipo canonico delle matrici di RIEMANN cui appartengono le superficie iperellittiche con due fasci ellittici di curve ellittiche.

4. Per avviarci alla soluzione del problema indicato nel titolo di questo paragrafo, torniamo a considerare la superficie F di cui nei nⁱ precedenti, e vediamo di trasformare la tabella di periodi (1) cui essa appartiene in una tabella che ponga in evidenza in qualche modo il valore del determinante dei fasci delle curve

$$u = \text{cost.} \quad \text{e} \quad v = \text{cost.}$$

Per questo cominciamo dall'osservare che, premettendo, ove occorra, delle oppor-

³⁾ Per le nozioni e i teoremi che qui vengono adoperati veggasi per es. E. CAHEN, *Théorie des nombres* (Paris, Hermann, 1914), t. I, chap. XVII.

tune operazioni di somme e sottrazioni fra le prime due o le ultime due colonne della (1) si può supporre, senza togliere nulla alla generalità, che nella (1) sia $b_1 = 0$ e $b_3 = 0$. Cosicchè possiamo supporre intanto che la tabella cui appartiene F sia la seguente

$$(13) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ a_1 w & a_2 w + b_2 w' & a_3 w & a_4 w + b_4 w' \end{vmatrix}.$$

In questa è certo $a_3 \neq 0$ e $b_4 \neq 0$, quindi in essa possiamo anche supporre $a_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$. E infatti, se fosse per es. $a_1 = 0$, noi sostituiremmo alla tabella (13) quella, equivalente ad essa, che se ne otterrebbe sommando alla prima colonna la terza.

Ciò posto, siccome per la (13) è

$$a_{11} = a_1 b_4, \quad a_{12} = a_2 b_4 - a_4 b_2, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = a_3 b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_1 a_3 b_2 b_4 \neq 0,$$

la caratteristica del determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ è uguale a 2, e quindi il determinante dei due fasci di curve considerati su F sarà dato da:

$$\frac{H^2}{D(H, e_1) \cdot D(H, e_2)}$$

dove adesso

$$H = a_3 b_4, \quad e_1 = D(a_1 b_4, a_2 b_4 - a_4 b_2, a_3 b_2), \quad e_2 = \frac{|a_1 a_3 b_2 b_4|}{e_1}.$$

Poichè e_2 è divisibile per e_1 , $D(H, e_1)$ è un divisore di $D(H, e_2)$; quindi dei due numeri

$$\frac{H}{D(H, e_1)} \quad \text{e} \quad \frac{H}{D(H, e_2)},$$

che sono certo dei numeri interi, il primo è multiplo del secondo.

Poniamo in conformità di ciò, con δ_1 e δ_2 interi,

$$(14) \quad \frac{H}{D(H, e_1)} = \delta_1 \delta_2$$

$$(15) \quad \frac{H}{D(H, e_2)} = \delta_2,$$

per modo che il determinante dei due fasci sarà dato da

$$\delta_1 \delta_2^2.$$

Siccome è stato osservato più sopra che H si può supporre positivo, gli interi δ_1 e δ_2 potranno supporsi anch'essi positivi.

Dalla (14) si ricava

$$D(H, e_1) = \frac{H}{\delta_1 \delta_2} = \frac{a_3 b_4}{\delta_1 \delta_2}$$

dunque $\frac{a_3 b_4}{\delta_1 \delta_2}$ è un intero ed e_1 è divisibile per esso.

Ma e_1 è il m. c. d. di $a_1 b_4$, $a_2 b_4 - a_4 b_2$ e $a_3 b_2$, dunque anche questi numeri debbono essere divisibili per $\frac{a_3 b_4}{\delta_1 \delta_2}$, e quindi debbono essere interi i quozienti

$$\frac{\delta_1 \delta_2 a_1}{a_3}, \quad \frac{\delta_1 \delta_2 (a_2 b_4 - a_4 b_2)}{a_3 b_4}, \quad \frac{\delta_1 \delta_2 b_2}{b_4}.$$

Ora osserviamo che senza venir meno alla generalità possiamo supporre che nella (13) a_3 e b_4 siano divisibili per $\delta_1 \delta_2$.

Infatti, se ciò non fosse, alla matrice (13) sostituiremmo la matrice equivalente

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ a_1 \delta_1 \delta_2 w & \delta_1 \delta_2 (a_2 w + b_2 w') & \delta_1 \delta_2 a_3 w & \delta_1 \delta_2 (a_4 w + b_4 w') \end{vmatrix}$$

e in questa l'ipotesi fatta sarebbe verificata. E si noti che con ciò i valori di H , $D(H, e_1)$, $D(H, e_2)$ verrebbero alterati tutti del fattore $\delta_1^2 \delta_2^2$ e quindi i quozienti

$$\frac{H}{D(H, e_1)} \quad \text{e} \quad \frac{H}{D(H, e_2)}$$

rimarrebbero sempre eguali a $\delta_1 \delta_2$ e δ_2 rispettivamente.

Poniamo dunque con a'_3 e b'_4 interi

$$(16) \quad \begin{cases} a_3 = \delta_1 \delta_2 a'_3, \\ b_4 = \delta_1 \delta_2 b'_4. \end{cases}$$

Allora, dovendo risultare interi i quozienti

$$\frac{\delta_1 \delta_2 a_1}{a_3} \quad \text{e} \quad \frac{\delta_1 \delta_2 b_2}{b_4},$$

dovrà essere intanto, con h e k interi,

$$(17) \quad a_1 = h a'_3, \quad b_2 = k b'_4.$$

Dopo ciò risulterà

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 = b'_4 (\delta_1 \delta_2 a_2 - k a_4)$$

e quindi, dovendo essere intero il quoziente

$$\frac{\delta_1 \delta_2 (a_2 b_4 - a_4 b_2)}{a_3 b_4},$$

sarà un intero il n° eguale ad esso

$$\frac{\delta_1 \delta_2 a_2 - k a_4}{\delta_1 \delta_2 a'_3}.$$

Poniamo, con r intero,

$$\frac{\delta_1 \delta_2 a_2 - k a_4}{\delta_1 \delta_2 a'_3} = r,$$

per modo che sarà

$$(18) \quad a_2 = r a'_3 + \frac{k}{\delta_1 \delta_2} a_4.$$

Allora la tabella (13), in virtù delle (16), (17) e (18) potrà scriversi

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ h a'_3 w & \left(r a'_3 + \frac{k}{\delta_1 \delta_2} a_4 \right) w + k b'_4 w' & \delta_1 \delta_2 a'_3 w & a_4 w + \delta_1 \delta_2 b'_4 w' \end{vmatrix}$$

o anche:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ \frac{h}{\delta_1 \delta_2} \Omega & \frac{r}{\delta_1 \delta_2} \Omega + \frac{k}{\delta_1 \delta_2} \Omega' & \Omega & \Omega' \end{vmatrix},$$

avendo posto, in accordo colle (2) del n° 2:

$$\Omega = \delta_1 \delta_2 a'_3 w, \quad \Omega' = a_4 w + \delta_1 \delta_2 b'_4 w'.$$

5 Dimostriamo ora che nella tabella (19) gli interi $h, r, k, \delta_1, \delta_2$ soddisfanno alle seguenti condizioni:

$\alpha)$ i numeri $\delta_1 \delta_2, h, r, k$ sono primi fra di loro, ossia è

$$D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = 1;$$

$\beta)$ il prodotto hk è divisibile per il prodotto $\delta_1 D(h, r, k)$;

$\gamma)$ gli interi δ_2 e $\frac{hk}{\delta_1 D(h, r, k)}$ sono primi tra di loro, ossia è

$$D\left[\delta_2, \frac{hk}{\delta_1 D(h, r, k)}\right] = 1.$$

Infatti si ha in primo luogo

$$D(H, e_1) = \frac{a_3 b_4}{\delta_1 \delta_2} = \delta_1 \delta_2 a'_3 b'_4,$$

ed è pure

$$D(H, e_1) = D(a_3 b_4, a_1 b_4, a_2 b_4 - a_4 b_2, a_3 b_2);$$

dunque i quozienti delle divisioni di

$$a_3 b_4, \quad a_1 b_4, \quad a_2 b_4 - a_4 b_2, \quad a_3 b_2$$

per $\delta_1 \delta_2 a'_3 b'_4$ debbono essere primi tra di loro. Ma tali quozienti sono appunto $\delta_1 \delta_2$, h , r , k dunque l'affermazione α) è dimostrata.

In secondo luogo si ha

$$\begin{aligned} e_1 &= D(a_1 b_4, a_2 b_4 - a_4 b_2, a_3 b_2) = D(\delta_1 \delta_2 h a'_3 b'_4, \delta_1 \delta_2 r a'_3 b'_4, \delta_1 \delta_2 k a'_3 b'_4) \\ &= \delta_1 \delta_2 a'_3 b'_4 D(h, r, k) \end{aligned}$$

ed

$$e_2 = \frac{|a_1 a_3 b_2 b_4|}{e_1} = \frac{|h k a'_3 b'_4 \delta_1 \delta_2|}{D(h, r, k)}.$$

Ma dalla (15) si trae

$$D(H, e_2) = \frac{H}{\delta_2} = \delta_1^2 \delta_2 a'_3 b'_4,$$

dunque

$$\frac{e_2}{\delta_1^2 \delta_2 a'_3 b'_4}$$

deve essere un intero, cioè deve essere un intero

$$\frac{h k}{\delta_1 D(h, r, k)}$$

come appunto è affermato in β).

Infine, dovendo essere primi tra di loro i quozienti delle divisioni di H ed e_2 per il loro m. c. d. $\delta_1^2 \delta_2 a'_3 b'_4$, segue che deve essere, come è affermato in γ),

$$D\left[\delta_2, \frac{h k}{\delta_1 D(h, r, k)}\right] = 1.$$

6. La discussione compiuta nei n° 4 e 5 permette di enunciare il seguente teorema:

Se una superficie iperellittica possiede due fasci ellittici di curve ellittiche col determinante n , essa si può sempre riguardare come appartenente a una matrice di RIEMANN del tipo

$$(19) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ \frac{h}{\delta_1 \delta_2} \Omega & \frac{r}{\delta_1 \delta_2} \Omega + \frac{k}{\delta_1 \delta_2} \Omega' & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}$$

dove i numeri h , r , k , δ_1 , δ_2 sono interi soddisfacenti alle seguenti condizioni:

I) δ_1 e δ_2 sono positivi ed è

$$n = \delta_1 \delta_2^2;$$

II) $D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = 1$;

III) $\frac{h k}{\delta_1 D(h, r, k)}$ è un intero;

IV) $D\left[\delta_2, \frac{h k}{\delta_1 D(h, r, k)}\right] = 1.$

Inoltre si può supporre che su di essa i due fasci considerati siano quelli corrispondenti agli assi della matrice che si appoggiano alla sua immagine nei punti le cui coordinate sono date dagli elementi delle due righe della (19).

7. Il teorema ora stabilito può essere invertito e precisato; possiamo dimostrare, infatti, che:

Se una superficie iperellittica appartiene a una matrice di RIEMANN del tipo (19) dove δ_1, δ_2 sono interi positivi e h, k, r sono interi legati fra loro e a δ_1, δ_2 dalla condizione II), perchè il determinante dei due fasci ellittici di curve ellittiche della superficie, corrispondenti nel modo chiarito più sopra alle due righe della matrice, sia dato da

$$\delta_1 \delta_2^2,$$

occorre e basta che gli interi $\delta_1, \delta_2, h, r, k$ siano legati anche dalle condizioni III) e IV).

Sostituiamo alla matrice (19) la matrice equivalente

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ h\Omega & r\Omega + k\Omega' & \delta_1 \delta_2 \Omega & \delta_1 \delta_2 \Omega' \end{vmatrix}$$

e costruiamoci per questa, col solito significato dei simboli a_{ij} , il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Esso sarà dato da:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} h\delta_1 \delta_2 & r\delta_1 \delta_2 \\ 0 & k\delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}.$$

Consideriamo dapprima il caso in cui la caratteristica del determinante (20) sia 2. Allora è, col solito significato di H, e_1 ed e_2 :

$$\begin{aligned} H &= \delta_1^2 \delta_2^2; \\ e_1 &= D(h\delta_1 \delta_2, r\delta_1 \delta_2, k\delta_1 \delta_2) = \delta_1 \delta_2 D(h, r, k); \\ e_2 &= \frac{|hk\delta_1^2 \delta_2^2|}{e_1} = \frac{|hk\delta_1 \delta_2|}{D(h, r, k)}; \\ D(H, e_2) &= \delta_1 \delta_2 D\left[\delta_1 \delta_2, \frac{hk}{D(h, r, k)}\right]. \end{aligned}$$

Poi, in virtù dell'ipotesi che i $n^i \delta_1, \delta_2, h, r, k$ soddisfacciano alla condizione II), è

$$D(H, e_1) = \delta_1 \delta_2 D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = \delta_1 \delta_2,$$

e per conseguenza il determinante dei due fasci di cui parla il teorema è dato da:

$$\frac{H^2}{D(H, e_1)D(H, e_2)} = \frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{D\left[\delta_1 \delta_2, \frac{hk}{D(h, r, k)}\right]}.$$

Ma allora, perchè questo determinante risulti eguale a $\delta_1 \delta_2^2$ occorre e basta che sia

$$D\left[\delta_1, \delta_2, \frac{hk}{D(h, r, k)}\right] = \delta_1;$$

e per questo occorre e basta appunto che siano soddisfatte le condizioni III) e IV).

Supponiamo, in secondo luogo, che la caratteristica del determinante (20) sia 1.

Allora è $hk\delta_1^2\delta_2^2 = 0$ e quindi, poichè δ_1 e δ_2 sono (positivi, cioè) non nulli, è $hk = 0$.

Poi è come prima

$$D(H, e_1) = \delta_1 \delta_2;$$

ma il determinante dei due fasci è dato ora da

$$\frac{H}{D(H, e_1)} = \delta_1 \delta_2.$$

Segue che perchè questo determinante sia eguale a $\delta_1 \delta_2^2$ occorre e basta che sia $\delta_2 = 1$.

Siccome questa volta $hk = 0$, la condizione III) è senz'altro soddisfatta e la condizione IV) si converte in $\delta_2 = 1$; quindi, per quel che è stato detto, il teorema continua a sussistere.

Supponiamo in terzo luogo che la caratteristica del determinante (20) sia zero.

Allora è $h\delta_1\delta_2 = r\delta_1\delta_2 = k\delta_1\delta_2 = 0$ e quindi, per una ragione addotta, $h = r = k = 0$.

Poi, essendo soddisfatta la condizione II) ed essendo $h = r = k = 0$ è $\delta_1\delta_2 = 1$; per conseguenza, poichè δ_1 e δ_2 sono interi positivi è pure $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Ora nelle ipotesi attuali il determinante dei due fasci è 1, e le condizioni III) e IV) sono evidentemente soddisfatte; quindi possiamo concludere che il teorema è valido in ogni caso.

8. Prendiamo ora a considerare una superficie iperellittica del tipo di quella di cui parla il teorema del n° 6, e sia la (19) la matrice di RIEMANN cui appartiene, gli interi $\delta_1, \delta_2, h, r, k$ che compariscono in questa essendo legati dalle condizioni di cui parla il teorema stesso.

Vogliamo dimostrare che:

Senza venir meno alla generalità si può supporre che nella (19) gli interi h, r, k soddisfacciano anche alle ulteriori condizioni

$$\text{V)} \quad 0 \leq h \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$$

$$\text{VI)} \quad 0 \leq r \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$$

$$\text{VII)} \quad 0 \leq k \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$$

$$\text{VIII)} \quad 0 \leq r < D(h, \delta_1, \delta_2),$$

dove delle VI) e VIII) si terrà conto della prima o della seconda, secondo che è $h = 0$ o $h \neq 0$; e infine, se $h \neq 0$, si può anche supporre che l'intero

$$D\left[r \frac{\delta_1 \delta_2}{D(k, \delta_1 \delta_2)}, \delta_1 \delta_2\right]$$

non sia un divisore di h .

Cominciamo dall'osservare che se nella matrice (19) si sottrae dalla prima colonna la terza moltiplicata per un intero q , la matrice (19) si muta in una matrice equivalente della stessa sua forma, nella quale gli interi δ_1, δ_2, r, k sono gli stessi, ma l'intero h è sostituito dall'intero

$$h' = h - q \delta_1 \delta_2.$$

Intanto, essendo $D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = 1$ è pure evidentemente $D(\delta_1 \delta_2, h', r, k) = 1$; e quindi, una volta che il determinante dei due fasci considerati sulla superficie è, per ipotesi, $\delta_1 \delta_2^2$, per il teorema del n° 7 gli interi che compariscono in questa nuova matrice soddisfanno a tutte le condizioni del teorema del n° 6.

Segue che nella (19) è lecito, senza alterare alcuna delle condizioni a cui soddisfa, supporre l'intero h calcolato rispetto al modulo $\delta_1 \delta_2$.

Ciò che è stato detto per h può ripetersi anche per r e k , e quindi è chiaro intanto che è lecito supporre h, r, k non superiori, in valore assoluto, a $\frac{\delta_1 \delta_2}{2}$.

Ma dico che è anche lecito supporli non negativi, e quindi soddisfacenti alle condizioni V), VI) e VII).

Infatti la (19) si muta in una matrice equivalente ad essa se si cambiano i segni dei due elementi che stanno in una sua stessa colonna; e, ove occorra, si può cambiare in essa Ω in $-\Omega$ e Ω' in $-\Omega'$, perchè ciò equivale a un cambiamento di denominazione dei periodi Ω e Ω' ; quindi è chiaro che è lecito supporre, che in essa nessuno degli interi h, r, k sia negativo.

Dimostriamo ora che si può supporre

$$r < D(h, \delta_1 \delta_2).$$

E infatti supponiamo che sia $r \geq D(h, \delta_1 \delta_2)$ e indichiamo con q' ed r' il quoziente e il resto della divisione di r per $D(h, \delta_1 \delta_2)$.

Sarà

$$r = q' D(h, \delta_1 \delta_2) + r'$$

ed

$$r' < D(h, \delta_1 \delta_2).$$

Ciò posto determiniamo, come è possibile, due interi x' ed y' così che sia

$$hx' + \delta_1 \delta_2 y' = D(h, \delta_1 \delta_2).$$

Allora sarà

$$r = q'(hx' + \delta_1 \delta_2 y') + r'$$

ed

$$\frac{r}{\delta_1 \delta_2} = q' x' \frac{h}{\delta_1 \delta_2} + q' y' + \frac{r'}{\delta_1 \delta_2}.$$

Segue che se nella (19) si sottrae dalla 2^a colonna la prima moltiplicata per $q' x'$ e la terza moltiplicata per $q' y'$, essa si muta in una matrice equivalente della stessa forma nella quale gli interi h, k, δ_1, δ_2 sono rimasti gli stessi, ma al posto dell'intero r compare l'intero r' che è appunto minore di $D(h, \delta_1 \delta_2)$.

Intanto essendo $D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = 1$ è pure evidentemente $D(\delta_1 \delta_2, h, r', k) = 1$ e quindi, per una ragione già addotta, la matrice ottenuta soddisfa come la (19) a tutte le condizioni del teorema del n° 6.

Dimostriamo infine che se $h \neq 0$ si può supporre che l'intero

$$D\left[r \frac{\delta_1 \delta_2}{D(k, \delta_1 \delta_2)}, \delta_1 \delta_2\right]$$

non sia un divisore di h .

Per questo basterà far vedere che se l'intero in discorso è un divisore di h , la matrice (19) si può mutare in un'altra dello stesso tipo con $h = 0$.

Infatti nella (19) indicando per un momento con x, y, t delle indeterminate intere, immaginiamo di sottrarre dalla prima colonna la seconda moltiplicata per x , la terza moltiplicata per y e la quarta moltiplicata per t .

Essa si muterà in una matrice equivalente nella quale il primo elemento della seconda riga sarà dato da

$$\left(\frac{h}{\delta_1 \delta_2} - \frac{rx}{\delta_1 \delta_2} - y\right) \Omega - \left(\frac{kx}{\delta_1 \delta_2} + t\right) \Omega'.$$

Ora si può in primo luogo determinare gli interi x e t in modo che sia

$$\frac{kx}{\delta_1 \delta_2} + t = 0,$$

bastando prendere per ciò

$$x = -\frac{\delta_1 \delta_2}{D(k, \delta_1 \delta_2)} u, \quad t = \frac{k}{D(k, \delta_1 \delta_2)} u$$

con u intero.

Dopo ciò si può determinare l'intero y in modo che risulti anche

$$\frac{h}{\delta_1 \delta_2} - \frac{rx}{\delta_1 \delta_2} - y = 0.$$

Infatti per $x = -\frac{\delta_1 \delta_2}{D(k, \delta_1 \delta_2)} u$ questa equazione si muta nell'altra

$$\frac{h}{\delta_1 \delta_2} + \frac{r}{D(k, \delta_1 \delta_2)} u - y = 0$$

ossia nell'equazione

$$\frac{r\delta_1\delta_2}{D(k, \delta_1\delta_2)}u - \delta_1\delta_2y = -h,$$

e questa ammette certo delle soluzioni intere in u ed y una volta che per l'ipotesi fatta il m. c. d. di $\frac{r\delta_1\delta_2}{D(k, \delta_1\delta_2)}$ e $\delta_1\delta_2$ divide h .

Si conclude pertanto che la matrice (19) è nell'ipotesi fatta equivalente ad una matrice della stessa forma nella quale gli interi δ_1, δ_2, r, k sono gli stessi, ma l'intero h è sostituito dallo zero.

Resterebbe a far vedere che gli interi che compariscono in questa nuova matrice soddisfanno a tutte le condizioni del n° 6. Ma non ci fermiamo su ciò, perchè, tenendo conto che il determinante dei fasci considerati sulla superficie è $\delta_1\delta_2^2$, la cosa si vedrebbe con un ragionamento analogo a quello che nel n° 7 ci ha servito a discutere i due ultimi casi.

9. A maggiore determinazione delle osservazioni fatte nel n° precedente dimostriamo ora che *se nella nostra matrice (19) uno degli interi h o k è nullo, è $\delta_2 = 1$, e inoltre è lecito senza venir meno alla generalità supporli entrambi nulli.*

Che per h o k uguale a zero sia $\delta_2 = 1$ risulta subito dall'osservare che deve esser soddisfatta la condizione IV).

Supponiamo ora che k sia zero. Allora essendo anche $\delta_2 = 1$ la matrice (19) diventa

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ \frac{h}{\delta_1}\Omega & \frac{r}{\delta_1}\Omega & \Omega & \Omega' \end{vmatrix};$$

quindi operando per somme e sottrazioni tra le prime due colonne uno degli interi h ed r si può certo ridurre a zero. E si può supporre che nella matrice a cui si perviene l'intero nullo sia quello che comparisce nella prima colonna, perchè in caso contrario basterebbe cambiare fra di loro le prime due colonne.

Secondo il solito è chiaro che la matrice ridotta soddisfa a tutte le condizioni del teorema del n° 6.

Supponiamo invece che sia $h = 0$; cioè che la matrice (19) sia

$$(21) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\delta_1}\Omega + \frac{k}{\delta_1}\Omega' & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}.$$

Ponendo

$$r = D(r, k)r', \quad k = D(r, k)k'$$

per modo che gli interi r' e k' risultano primi tra di loro, essa si scriverà

$$(22) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D(r, k)}{\delta_1}(r'\Omega + k'\Omega') & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}.$$

Poichè r' e k' sono primi fra di loro, ai due periodi primitivi (Ω, Ω') del corpo di funzioni ellittiche (Ω, Ω') si possono sostituire due altri periodi primitivi di cui uno sia $r'\Omega + k'\Omega'$. Chiamiamo Ω_1 e Ω'_1 , questi due nuovi periodi, essendo $\Omega_1 = r'\Omega + k'\Omega'$.

Allora la matrice (19) sarà equivalente alla matrice

$$(23) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D(r, k)}{\delta_1} \Omega_1 & \Omega_1 & \Omega'_1 \end{vmatrix}.$$

Notisi che per la condizione II) nella (21) è $D(\delta_1, r, k) = 1$, e quindi nella (23) $D(r, k)$ è primo con δ_1 .

Si conclude che basta sostituire alla matrice (19) la matrice (23) per avere una matrice che sia dello stesso suo tipo, ma nella quale gli interi h e k siano entrambi nulli.

10. Una matrice riemanniana del tipo (19) si dirà *canonica* quando gli interi $h, r, k, \delta_1, \delta_2$ che compariscono in essa soddisfanno alle condizioni del teorema del n° 6, e quando inoltre o è $h = k = 0$, o è

$$\text{IX)} \quad 0 < h \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{2},$$

$$\text{X)} \quad 0 < k \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{2},$$

$$\text{XI)} \quad 0 \leq r < D(h, \delta_1 \delta_2),$$

$$\text{XII)} \text{ e l'intero } D\left[r \frac{\delta_1 \delta_2}{D(k, \delta_1 \delta_2)}, \delta_1 \delta_2\right] \text{ non è un divisore di } h.$$

Ciò posto, la discussione fatta si riassume nel seguente teorema:

Una superficie iperellittica con due fasci (ellittici di curve ellittiche) si può sempre supporre come appartenente a una matrice riemanniana canonica.

§ 3.

Superficie iperellittiche con fasci a determinante primo.

11. Applichiamo le ricerche compiute nel § precedente alla enumerazione dei vari tipi di matrici canoniche corrispondenti a superficie iperellittiche con fasci a determinante n assegnato, trattando in questo paragrafo e nel successivo alcuni dei casi più notevoli.

12. Sebbene si tratti di cosa ben nota, per essere completi, consideriamo in primo luogo il caso $n = 1$.

Sia per la matrice (19) del teorema del n° 6 $n = 1$.

Allora dovrà essere $\delta_1 \delta_2 = 1$ e quindi $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Poi essendo $\frac{\delta_1 \delta_2}{2} = \frac{1}{2}$, gli interi h , k ed r per le V), VI) e VII) del n° 8 dovranno essere tutti nulli.

Si conclude che per $n = 1$ si ha un solo tipo di matrice canonica dato da

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}.$$

13. Supponiamo in secondo luogo che per la solita matrice (19), sia n uguale a un numero primo p , e che la matrice stessa sia canonica.

Sarà $\delta_1 \delta_2^2 = p$ e quindi $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = p$.

Poichè p è primo non è possibile nel caso attuale soddisfare con h e k alle condizioni IX), X) e III), dunque è $h = k = 0$ e quindi la (19) è della forma

$$(24) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{p} \Omega & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}$$

dove (n° 9) r è primo con p , ed è inoltre per la VI) $r \leq \frac{p}{2}$.

Se $p = 2$, ciò dimostra che per la (19) si ha il solo tipo canonico

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Omega}{2} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix};$$

se $p > 2$, e quindi dispari, si avranno per la (19) $\frac{p-1}{2}$ tipi canonici che si ottengono dalla (24) ponendovi per r i numeri

$$1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

14. Dimostriamo ora che questi $\frac{p-1}{2}$ tipi (p dispari) sono certo *non* equivalenti, se i periodi w_1 , w_2 , Ω e Ω' si suppongono affatto generici.

All'uopo considero le due seguenti tabelle

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & r \frac{\Omega}{p} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & s \frac{\Omega}{p} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}$$

(dove r ed s sono due numeri interi diversi della serie: $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$) o ciò che è lo stesso, per trasformazioni evidenti,

$$(25) \quad \begin{vmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{p} & 1 & \tau' \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{p} & 1 & \tau' \end{vmatrix}$$

e dico che esse *non* sono equivalenti.

Infatti supponiamo che siano equivalenti, e siano AB e AB' le immagini delle due matrici (25); per modo che A sia il punto di coordinate $(1, \sigma, 0, 0)$, B il punto di coordinate $(0, \frac{r}{p}, 1, \tau')$ e B' il punto di coordinate $(0, \frac{s}{p}, s, \tau')$.

Allora esisterà una omografia razionale dello spazio ambiente atto a trasformare la retta AB nella retta AB' ; e se essa è l'omografia definita dalle formule

$$(26) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

i coefficienti a_{ij} si potranno supporre interi e tali che il determinante $|a_{ij}|$ sia uguale a ± 1 .

Siccome il punto A si deve trasformare in un punto della AB' , dovrà essere, indicando con l ed m due numeri convenienti,

$$(27) \quad \begin{cases} l = a_{11} + a_{12}\sigma, \\ l\sigma + \frac{s}{p}m = a_{21} + a_{22}\sigma, \\ m = a_{31} + a_{32}\sigma, \\ m\tau' = a_{41} + a_{42}\sigma. \end{cases}$$

Eliminando dalle (27) l ed m , si ha:

$$\sigma(a_{11} + a_{12}\sigma) + \frac{s}{p}(a_{31} + a_{32}\sigma) = a_{21} + a_{22}\sigma$$

e

$$(a_{31} + a_{32}\sigma)\tau' = a_{41} + a_{42}\sigma;$$

quindi data la genericità di σ e τ' deve essere

$$a_{32} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{41} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Allora le equazioni dell'omografia, chiamando a il valore comune di a_{11} e a_{22} , assumono, intanto, l'aspetto

$$(28) \quad \begin{cases} x'_1 = ax_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ x'_2 = ax_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ x'_3 = a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ x'_4 = a_{43}x_3 + a_{44}x_4. \end{cases}$$

Siccome anche il punto B si deve trasformare in un punto della retta AB' , si dovrà avere, come prima, indicando con h' e k' numeri opportuni:

$$\begin{aligned} h' &= a_{13} + a_{14}\tau', \\ h'\sigma + \frac{s}{p}k' &= \frac{r}{p}a + a_{23} + a_{24}\tau', \\ k' &= a_{33} + a_{34}\tau', \\ k'\tau' &= a_{43} + a_{44}\tau'; \end{aligned}$$

quindi eliminando h' e k' , per le stesse ragioni addotte più sopra si perviene alle condizioni

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{14} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{33} = a_{44}, \quad a_{24} = 0, \\ \frac{s}{p} a_{33} - \frac{r}{p} a - a_{23} = 0. \end{array} \right.$$

Posto $a_{33} = a_{44} = b$ e $a_{23} = c$, le formole dell'omografia diventano:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = ax_1, \\ x'_2 = ax_2 + cx_3, \\ x'_3 = bx_3, \\ x'_4 = bx_4 \end{array} \right.$$

e la condizione (29) si scrive

$$(31) \quad \frac{s}{p} b - \frac{r}{p} a - c = 0.$$

Ma il determinante dei coefficienti delle (30) è uguale ad $a^2 b^2$ e deve pure essere uguale a ± 1 , dunque si ha

$$a^2 b^2 = \pm 1 \quad \text{cioè} \quad ab = \pm 1$$

e quindi, essendo a e b interi, è:

$$a = b = 1, \quad \text{o} \quad a = b = -1,$$

ovvero

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{o} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Ora con nessuna delle quattro ipotesi possibili che possono essere fatte sugli interi a e b è possibile soddisfare alla condizione (31) con c intero; quindi le due matrici non sono equivalenti.

C. V. D.

§. 4.

Superficie iperellittiche con fasci a determinante

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20.

15. La matrice (19) del teorema del n° 6, sia canonica, e per essa sia $n = 4$.

Allora o è $\delta_1 = 4, \delta_2 = 1$; o è $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2$.

Nel primo caso o è $h = k = 0$ e quindi per il n° (9), e per la VI), $r = 1$; o è per le IX), X) e III) $h = k = 2$ e per la VIII) $r = 0, 1$.

Ma quest'ultime alternative vanno escluse perchè per esse non è soddisfatta la XII), dunque nel primo caso la (19) non può essere che del tipo

$$(32) \quad \left| \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Omega}{4} & \Omega & \Omega' \end{array} \right|.$$

Nel secondo caso, essendo $\frac{\delta_1 \delta_2}{2} = 1$, per le IX), X) e XI) è $h = k = 1$, $r = 0$, quindi la (19) è della forma

$$(33) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{\Omega'}{2} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}.$$

Cosicchè:

Per $n = 4$ la (19) non può presentare che due aspetti differenti dati dalle matrici (32) e (33).

16. Sia adesso $n = 6$.

Allora è necessariamente $\delta_1 = 6$, $\delta_2 = 1$.

Poi o è $h = k = 0$ e quindi per il n° 9 e per la VI) $r = 1$; o è per la IX), X) e III) $h = 2$, $k = 3$ oppure $h = 3$, $k = 2$. Quando è $h = 2$, $k = 3$, per le XI) e XII) è necessariamente $r = 0$; quando è $h = 3$ e $k = 2$, per le XI) e XII) è necessariamente $r = 0$ o 2.

Osservando che le ipotesi $h = 2$, $r = 0$, $k = 3$; $h = 3$, $r = 0$, $k = 2$ non danno luogo a tipi di matrici canoniche essenzialmente distinti, per modo che si può supporre, ad esempio, $h = 3$, $r = 0$, $k = 2$, si conclude che:

Per $n = 6$ la (19) non può presentare che due tipi differenti dati da

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Omega}{6} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{\Omega}{3} & \Omega & \Omega' \end{vmatrix}.$$

17. Come mostrano gli esempi già sviluppati, la ricerca dei tipi canonici procede con un metodo semplice ed uniforme.

Quindi per i casi $n = 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20$ ci basterà riassumere i risultati della discussione nel seguente quadro.

In esso, per brevità, si scrive di ogni tabella la sola 2^a riga e si suppone, come è lecito, $\Omega = 1$, $\Omega' = \tau$.

In questo senso si hanno per $n = 8$ le tabelle:

$$\left| 0, \frac{1}{8}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{3}{8}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{\tau}{4}, 1, \tau \right|;$$

per $n = 9$ le tabelle

$$\left| 0, \frac{1}{9}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{2}{9}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{4}{9}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{3}, \frac{\tau}{9}, 1, \tau \right|;$$

per $n = 10$ le tabelle

$$\left| 0, \frac{1}{10}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{3}{10}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{\tau}{5}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{2\tau}{5}, 1, \tau \right|;$$

per $n = 12$ le tabelle

$$\left| 0, \frac{1}{12}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{5}{12}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{\tau}{6}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{3}, \frac{\tau}{4}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{4}, \frac{1}{6} + \frac{\tau}{3}, 1, \tau \right|;$$

per $n = 14$ le tabelle

$$\left| 0, \frac{1}{14}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{3}{14}, 1, \tau \right|;$$

$$\left| 0, \frac{5}{14}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{7}\tau, 1, \tau \right|;$$

per $n = 15$ le tabelle

$$\left| 0, \frac{1}{15}, 1, \tau \right|,$$

$$\left| 0, \frac{2}{15}, 1, \tau \right|,$$

$$\begin{aligned}
 & \left| 0, \quad \frac{4}{15}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{7}{15}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{3}, \quad \frac{\tau}{5}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}\tau, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{3}, \quad \frac{1+2\tau}{5}, \quad 1, \quad \tau \right|;
 \end{aligned}$$

per $n = 16$ le tabelle

$$\begin{aligned}
 & \left| 0, \quad \frac{1}{16}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{3}{16}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{5}{16}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{7}{16}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{2}, \quad \frac{\tau}{8}, \quad 1, \quad \tau \right|;
 \end{aligned}$$

per $n = 18$ le tabelle

$$\begin{aligned}
 & \left| 0, \quad \frac{1}{18}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{5}{18}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| 0, \quad \frac{7}{18}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{9}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}\tau, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{2}, \quad \frac{\tau}{9}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\
 & \left| \frac{1}{6}, \quad \frac{1+3\tau}{9}, \quad 1, \quad \tau \right|;
 \end{aligned}$$

per $n = 20$ le tabelle

$$\begin{aligned} & \left| 0, \quad \frac{1}{20}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\ & \left| 0, \quad \frac{3}{20}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\ & \left| 0, \quad \frac{7}{20}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\ & \left| 0, \quad \frac{9}{20}, \quad 1, \quad \tau \right|, \\ & \left| \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}\tau, \quad 1, \quad \tau \right|. \end{aligned}$$

§ 5.

**Caso di una superficie che appartenga a una tabella
con una forma alternata di RIEMANN a coefficienti interi e divisore uno.**

18. Consideriamo la tabella

$$\left| \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & 0 \quad 0 \\ h \frac{\Omega}{\delta_1 \delta_2} & r \frac{\Omega}{\delta_1 \delta_2} + k \frac{\Omega'}{\delta_1 \delta_2} & \Omega \quad \Omega' \end{array} \right|$$

coi periodi $w_1, w_2, \Omega, \Omega'$ non vincolati e supponiamo che essa ammetta una forma alternata di RIEMANN a coefficienti interi e divisore uno.

Sia, questa, la forma

$$(34) \quad \sum_{r,s}^{1,\dots,4} c_{rs} x_r y_s \quad (c_{rs} + c_{sr} = 0).$$

Dico che:

Il determinante dei fasci è un quadrato perfetto.

Scrivendo che la (34) è una forma alternata di RIEMANN della nostra tabella si trova

$$(35) \quad c_{12} \left[w_1 \left(\frac{r\Omega + k\Omega'}{\delta_1 \delta_2} \right) - w_2 \frac{h\Omega}{\delta_1 \delta_2} \right] + c_{13} w_1 \Omega + c_{14} w_1 \Omega' + c_{23} w_2 \Omega + c_{24} w_2 \Omega' = 0;$$

e siccome le w, Ω non sono legate, per l'ipotesi fatta, da alcuna relazione bilineare a coefficienti interi, segue che la (35) deve essere una identità rispetto a $w_1, w_2, \Omega, \Omega'$ ossia deve essere

$$\frac{r}{\delta_1 \delta_2} c_{12} + c_{13} = 0, \quad \frac{k}{\delta_1 \delta_2} c_{12} + c_{14} = 0, \quad c_{23} - \frac{h}{\delta_1 \delta_2} c_{12} = 0, \quad c_{24} = 0.$$

Di qua si trae

$$\frac{c_{12}}{c_{13}} = -\frac{\delta_1 \delta_2}{r}, \quad \frac{c_{12}}{c_{14}} = -\frac{\delta_1 \delta_2}{k}, \quad \frac{c_{12}}{c_{23}} = \frac{\delta_1 \delta_2}{h}$$

ossia, indicando con t, l, m degli interi

$$\begin{aligned} c_{12} &= -\frac{\delta_1 \delta_2}{D(\delta_1 \delta_2, r)} \cdot t, & c_{13} &= \frac{r}{D(\delta_1 \delta_2, r)} \cdot t, \\ c_{12} &= -\frac{\delta_1 \delta_2}{D(\delta_1 \delta_2, k)} \cdot l, & c_{14} &= \frac{k}{D(\delta_1 \delta_2, k)} \cdot l, \\ c_{12} &= \frac{\delta_1 \delta_2}{D(\delta_1 \delta_2, h)} \cdot m, & c_{23} &= \frac{h}{D(\delta_1 \delta_2, h)} \cdot m. \end{aligned}$$

Ma la (34) è per ipotesi a divisore uno, il che porta che deve essere

$$c_{12} c_{34} + c_{13} c_{42} + c_{14} c_{23} = 1;$$

dunque posto

$$s = \frac{t}{D(\delta_1 \delta_2, r)} = \frac{l}{D(\delta_1 \delta_2, k)} = \frac{-m}{D(\delta_1 \delta_2, h)}$$

dove s è intero una volta che essendo $D(\delta_1 \delta_2, h, r, k) = 1$ i numeri $D(\delta_1 \delta_2, r)$, $D(\delta_1 \delta_2, k)$, $D(\delta_1 \delta_2, h)$ sono primi fra loro, si trova che deve essere

$$(36) \quad -\delta_1 \delta_2 s c_{34} - h k s^2 = 1.$$

Siccome il primo membro è divisibile per s , segue che

$$s = \pm 1;$$

quindi la (36) dà

$$(37) \quad -\delta_1 \delta_2 c_{34} - h k = 1$$

oppure

$$(38) \quad \delta_1 \delta_2 c_{34} - h k = 1.$$

Ma

$$\frac{h k}{\delta_1}$$

deve essere un intero, dunque per la (37) o (38) si ha

$$\delta_1 = 1$$

e il determinante dei fasci è, come volevasi, un quadrato.

Catania, luglio 1918.

CONCETTA BONOMI.