**9. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen
an parallelen,
unendlich langen Kreiszylindern¹⁾;
von Franz Závíska.**

Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem unendlich langen Zylinder von kreiförmigem Querschnitt gehört zu den wenigen Problemen, deren strenge Lösung sich aus den Maxwell'schen Gleichungen heraus ohne jede vereinfachende Annahme über die Konstanten des Zylindermaterialies durchführen läßt. Die einzige Beschränkung, die man machen muß, betrifft die Größe des Zylinderradius, der klein gegen die Wellenlänge sein soll, was ja bei den Hertz'schen Wellen ohnedies erfüllt ist. Das Problem wurde zuerst von Seitz²⁾ und Ignatowsky³⁾ gelöst, später hat Schaefer⁴⁾ den Fall des dielektrischen Zylinders eingehend diskutiert und sehr interessante Resonanzphänomene gefunden; theoretische Resultate sind von Grossmann⁵⁾ experimentell bestätigt worden. Schaefer und Reiche⁶⁾ haben auch die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Drahtgitter untersucht, aber unter der Annahme, daß der Abstand der Stäbe so groß gegen die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist, daß man die gegenseitige Beeinflussung derselben vernachlässigen kann, und die Wirkung des ganzen Gitters sich einfach als Summe der Einzelwirkungen der Stäbe ergibt.

1) Teilweise in den „Rozpravy“ der böhm. Kaiser-Franz Josef-Akademie der Wissenschaften Prag, Nr. 41. 1912 abgedruckt.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. **16**. p. 746. 1905; **19**. p. 554. 1906.

3) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18**. p. 495. 1905.

4) C. Schaefer, Physik. Zeitschr. **10**. p. 261. 1909.

5) C. Schaefer u. F. Grossmann, Ann. d. Phys. **31**. p. 455. 1910.

6) C. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. **32**. p. 577. 1910; **35**. p. 817. 1911.

Im folgenden will ich eine exakte Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an mehreren parallelen Zylindern von kreisförmigem Querschnitt entwickeln, über deren Abstand wir keine Voraussetzung machen, so daß auch die Wirkung der Zylinder aufeinander zur Geltung kommen kann. Freilich werden wir uns hauptsächlich nur mit der Beugung an zwei und drei Zylindern beschäftigen, da, wenn die Zahl der Zylinder wächst, die Rechnung ziemlich unübersichtlich wird. Die einfallende Welle sei eine ebene und geradlinig polarisierte; es genügt zwei Hauptfälle zu untersuchen, nämlich erstens, wenn die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft, zweitens, wenn dieselbe senkrecht zu den letzteren gerichtet ist. Durch Superposition beider so erhaltenen Lösungen ergibt sich sofort die Lösung für den allgemeinen Fall. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle sei senkrecht zur Ebene der Zylinderachsen. Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir noch voraussetzen, daß alle Zylinder in jeder Hinsicht identisch sind und gleichen Abstand haben.

Zum Schluß werden wir auch die Beugung an zwei hintereinander stehenden Zylindern untersuchen; die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle sei hier parallel zur Ebene der Zylinderachsen. Die Lösung dieses Falles wird uns ermöglichen, einige Abweichungen von den theoretischen Resultaten, die Grossmann bei seinen Messungen der Beugung an einem Zylinder beobachtet hatte, zu erklären.

Wir gehen jetzt an die Betrachtung der einzelnen Fälle.

1. Die elektrische Kraft parallel zu den Zylinderachsen.

Wir wählen die Ebene der Zylinderachsen zur xz -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die z -Achse sei zu den Zylinderachsen parallel. Anstatt der Koordinaten x und y führen wir ebene Polarkoordinaten r und φ ein, und transformieren die Maxwellschen Gleichungen auf die Zylinderkoordinaten r, φ, z . Da offenbar alle Feldgrößen von z unabhängig sind und die elektrische Kraft nicht nur in der einfallenden Welle, sondern auch in den reflektierten und in den in die Zylinder eindringenden Wellen parallel zur z -Achse

verläuft, so nehmen bei Benutzung der üblichen Bezeichnungsweise die Maxwell'schen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_z \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ aus diesen Gleichungen erhalten wir die bekannte Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_z$:

$$(1') \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \varphi^2},$$

in welcher der Einfachheit halber $\mathfrak{E}$ für $\mathfrak{E}_z$ gesetzt wird, und deren Integral unter der Berücksichtigung des Umstandes, daß wir mit rein periodischen Vorgängen zu tun haben, lautet

$$(2) \quad \mathfrak{E} = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (F_n(kr) \cos n\varphi + G_n(kr) \sin n\varphi),$$

wo F_n und G_n allgemeine Besselsche Funktionen n^{ter} Ordnung und vom Argument kr sind, und k durch die Gleichung

$$(3) \quad k^2 = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2 - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \omega i$$

definiert erscheint.

Nehmen wir Vakuum als Außenraum und bezeichnen die auf denselben bezüglichen Größen durch den Index 1, die auf den Innenraum bezüglichen mit 2, so folgt

$$(3') \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

für k_2 aber bekommt man, wenn die Zylinder aus einem Dielektrikum bestehen,

$$(3'') \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2};$$

sind dagegen die Zylinder gute Leiter, so daß man ε gegen σ vernachlässigen kann, so folgt

$$(3''') \quad k_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma_2 \mu_2}{c \lambda}} (1 - i).$$

Die resultierende elektrische Kraft im Außenraum besteht aus der elektrischen Kraft der einfallenden Welle und der von

den einzelnen Zylindern ausgehenden Störungswellen. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle fällt in die y -Achse; setzen wir voraus, daß die Welle sich in der Richtung der abnehmenden y bewegt, so folgt

$$\mathfrak{E}_1 e = e^{i(\omega t + k_1 y)},$$

wobei die Amplitude gleich Eins gesetzt wurde. Für die Störungswellen setzen wir den Ausdruck (2); aus der Bedingung, daß derselbe für sehr große r eine in der Richtung der steigenden r fortschreitende Welle mit abnehmender Amplitude bezeichnen soll, folgt, wie Ignatowsky zuerst gezeigt hat, daß die Besselschen Funktionen F_n und G_n sich auf eine einzige reduzieren, die wir mit Q_n bezeichnen wollen und die mit den wohlbekannten Besselschen Funktionen erster und zweiter Art, J_n und K_n , mittels der Gleichung

$$Q_n = K_n - i \frac{\pi}{2} J_n$$

zusammenhängt. Sind nun r_h und φ_h Polarkoordinaten des Aufpunktes M , bezogen auf den Mittelpunkt C_h des h -ten Zylinders

Fig. 1.

(Fig. 1), so bekommt man für die von demselben ausgehende Störungswelle folgenden Ausdruck:

$$e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{hn} \cos n \varphi_h + B_{hn} \sin n \varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

und für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum erhält man:

$$(4) \quad \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_h^{1, N} \sum_n^{0, \infty} (A_{hn} \cos n \varphi_h + B_{hn} \sin n \varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

wo N die Zahl der Zylinder bedeutet. Die Zahl der Koeffizienten A_{hn} und B_{hn} läßt sich mittels Symmetriebeziehungen noch herabsetzen.

Für innere Punkte kommen nur diejenigen Besselschen Funktionen in Betracht, die für $r_h = 0$ endlich bleiben; dieser Bedingung genügt nur die Besselsche Funktion erster Art J_n , so daß die in den h^{ten} Zylinder eindringende Welle durch die Gleichung

$$(5) \quad \mathfrak{E}_{2h} = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (C_{hn} \cos n \varphi_h + D_{hn} \sin n \varphi_h) J_n(k_2 r_h)$$

gegeben ist. Auch hier ergeben sich bei Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse Relationen zwischen den Koeffizienten C_{hn} und D_{hn} , durch welche die Zahl derselben herabgesetzt wird.

Die übrig bleibenden Koeffizienten A_{hn} , B_{hn} , C_{hn} und D_{hn} sind aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Nach denselben müssen die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft an der Oberfläche eines jeden Zylinders stetig bleiben. Betrachten wir also die Oberfläche des h^{ten} Zylinders, so muß für $r_h = \rho$ (ρ bedeutet den Zylinderradius) und jedes φ_h gelten:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_{2h} \\ (\mathfrak{H}_{\varphi})_1 = (\mathfrak{H}_{\varphi})_{2h}; \end{cases}$$

statt der letzten Gleichung hat man auch, wie aus der dritten Gleichung (1) folgt,

$$(6') \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r_h} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{2h}}{\partial r_h}.$$

Da die Grenzbedingungen (6) und (6') für ein konstantes r_h und beliebiges φ_h erfüllt sein sollen, so wird es offenbar am zweckmäßigsten sein, den Ausdruck (4) für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum in eine nach dem Kosinus und Sinus des vielfachen φ_h fortschreitende Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten Funktionen von r_h wären, zu entwickeln, wie es mit dem Ausdrücke (5) für $\mathfrak{E}_{2h}$ schon der Fall ist. Dies läßt sich verhältnismäßig einfach durchführen. Zuerst folgt aus einer bekannten Beziehung

$$e^{i k_1 y} = e^{i k_1 r_h \sin \varphi_h} = J_0(k_1 r_h) + 2 \sum_n^{1, \infty} J_{2n}(k_1 r_h) \cos 2n \varphi_h \\ + 2i \sum_n^{1, \infty} J_{2n-1}(k_1 r_h) \sin (2n-1) \varphi_h.$$

Weiter müssen wir die in Gleichung (4) auftretenden Produkte

$$Q_n(k_1 r_p) \cos n \varphi_p \quad \text{und} \quad Q_n(k_1 r_p) \sin n \varphi_p,$$

wo p eine beliebige ganze und positive, von h verschiedene Zahl, die nicht größer als N ist, bedeutet, in der Form einer Fourierschen Reihe darstellen. Ist zuerst $p > h$, so setzen wir $p = h + s$; aus dem $\Delta MC_h C_{h+s}$ folgt dann

$$r_{h+s}^2 = r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h,$$

wo a den gegenseitigen Abstand der Zylinderachsen bezeichnet. Weiter gilt:

$$r_{h+s} \cos \varphi_{h+s} = r_h \cos \varphi_h - s a,$$

$$r_{h+s} \sin \varphi_{h+s} = r_h \sin \varphi_h.$$

Addiert man die letzte mit i multiplizierte Gleichung zur vorstehenden, so folgt:

$$r_{h+s} e^{i \varphi_{h+s}} = r_h e^{i \varphi_h} - s a,$$

ähnlich folgt:

$$r_{h+s} e^{-i \varphi_{h+s}} = r_h e^{-i \varphi_h} - s a,$$

und aus beiden letzten Gleichungen ergibt sich, wenn $r_h < s a$ ist:

$$e^{i \varphi_{h+s}} = - \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{1/2};$$

das Zeichen der rechten Seite wird dadurch bestimmt, daß für $\varphi_h = 0$ die Wurzel gleich -1 sein muß; es ist dann nämlich $\varphi_{h+s} = \pi$. Daraus folgt

$$Q_n(k_1 r_{h+s}) e^{-i n \varphi_{h+s}} \\ = (-1)^n \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{-\frac{n}{2}} Q_n(k_1 \sqrt{r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h}).$$

Nun läßt sich die rechte Seite in eine Neumannsche Reihe entwickeln. Nach einer Formel, die Graf¹⁾ zuerst angegeben hat, hat man

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{-\frac{n}{2}} F_n(k_1 \sqrt{r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h}) \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{m+n}(k_1 s a) J_m(k_1 r_h) e^{i m \varphi_h}, \end{aligned} \right.$$

1) J. H. Graf, Mathemat. Annalen 43. p. 136. 1893.

wo F_n eine beliebige Besselsche Funktion sein kann, von der wir hier voraussetzen wollen, daß sie für ein reelles Argument auch reell ist. Die rechts stehende Reihe ist sicher konvergent, sobald $r_h < s a$ ist, was in der Nähe der Oberfläche des h^{ten} Zylinders immer gilt. Diejenigen Besselschen Funktionen, deren Ordnung durch eine negative Zahl gegeben ist, sind durch die Gleichung

$$F_{-n} = (-1)^n F_n$$

definiert. Durch Trennung der reellen Bestandteile von den imaginären erhält man leicht die Entwicklungen für

$$F_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} \quad \text{und} \quad F_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}.$$

Setzt man nun zuerst $F_n = K_n$, dann $F_n = J_n$, so folgen nach einer einfachen Rechnung auch die Entwicklungen für

$$Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} \quad \text{und} \quad Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}.$$

Wir schreiben

$$(8) \quad \begin{cases} Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \cos m \varphi_h, \\ Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s} = (-1)^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \sin m \varphi_h, \end{cases}$$

wo

$$(9) \quad \begin{cases} a_{n0}^{(s)} = Q_n(s k_1 a), \\ a_{nm}^{(s)} = Q_{n+m}(s k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(s k_1 a), \\ b_{nm}^{(s)} = Q_{n+m}(s k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(s k_1 a). \end{cases}$$

Durch Derivation der Gleichungen (8) erhält man weitere Entwicklungen in der Form:

$$(8') \quad \begin{cases} \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial r_h} (Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s}) \\ \quad = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}^{(s)} J'_m(k_1 r_h) \cos m \varphi_h, \\ \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial r_h} (Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}) \\ \quad = (-1)^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(s)} J'_m(k_1 r_h) \sin m \varphi_h, \end{cases}$$

wo

$$J'_m(x) = \frac{dJ_m(x)}{dx}$$

gesetzt wurde.

Ist nun $p < h$, also $p = h - s$, so hat man zuerst:

$$e^{i\varphi_{h-s}} = \left(\frac{s a + r_h e^{-i\varphi_h}}{s a + r_h e^{i\varphi_h}} \right)^{-1/2},$$

solange $r_h < s a$ ist. Setzt man nun

$$\varphi_h = \pi - \vartheta,$$

so findet man in derselben Weise wie früher folgende Entwicklungen:

$$(10) \quad \begin{cases} Q_n(k_1 r_{h-s}) \cos n \varphi_{h-s} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{nm}^{(e)} J_m(k_1 r_h) \cos m \varphi_h, \\ Q_n(k_1 r_{h-s}) \cos n \varphi_{h-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_{nm}^{(e)} J_m(k_1 r_h) \sin m \varphi_h. \end{cases}$$

Führt man die Entwicklungen (8) und (10) in die Gleichung (4) ein, so bekommt man leicht aus den Grenzbedingungen (6) und (6') lineare Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_{hn} usw., die zur Bestimmung derselben dienen können.

Um uns aber nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, wollen wir zur Betrachtung spezieller Fälle übergehen. Setzen wir

Fig. 2.

voraus, daß die Beugung an zwei parallelen Zylindern vor sich geht. Es seien r' und φ' die Polarkoordinaten des Aufpunktes M in bezug auf den Mittelpunkt C' des rechten Zylinders (Fig. 2), r'' , φ'' in bezug auf den Mittelpunkt C'' des linken Zylinders, so erhält man für die resultierende elektrische

Kraft im Außenraum $\mathfrak{E}_1$ aus der Gleichung (4) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_n' \cos n \varphi' + B_n' \sin n \varphi') Q_n(k_1 r') \\ + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_n'' \cos n \varphi'' + B_n'' \sin n \varphi'') Q_n(k_1 r').\end{aligned}$$

Da nun offenbar die yz -Ebene eine Symmetrieebene für die elektrische Kraft ist, so muß gelten:

$$A_n' = (-1)^n A_n'' = A_n, \quad B_n' = (-1)^{n-1} B_n'' = B_n,$$

es ist also:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} \\ + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} A_n (Q_n(k_1 r') \cos n \varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n \varphi'') \\ + e^{i\omega t} \sum_n^{1, \infty} B_n (Q_n(k_1 r') \sin n \varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n \varphi'') \end{aligned} \right.$$

Für die in den rechten Zylinder eindringende Welle setzen wir nach Gleichung (5)

$$(12) \quad \mathfrak{E}_2' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (C_n \cos n \varphi' + D_n \sin n \varphi') J_n(k_2 r'),$$

und daraus folgt für die in den linken Zylinder eindringende Welle der Ausdruck:

$$(12') \quad \mathfrak{E}_2'' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (-1)^n (C_n \cos n \varphi'' - D_n \sin n \varphi'') J_n(k_2 r''),$$

wobei die Symmetrieverhältnisse schon berücksichtigt sind.

Die Grenzbedingungen (6) und (6') sollen nun für die Oberfläche beider Zylinder erfüllt werden. Man sieht aber, daß es wegen der Symmetrie der Ausdrücke (11), (12) und (12') genügt, dieselben nur für die Oberfläche des einen von ihnen, z. B. des rechten, aufzustellen. Aus den Gleichungen (10) folgt dann:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_n(k_1 r'') \cos n \varphi'' &= \sum_m^{0, \infty} (-1)^m a_{nm} J_m(k_1 r') \cos m \varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \sin n \varphi'' &= \sum_m^{1, \infty} (-1)^{m-1} b_{nm} J_m(k_1 r') \sin m \varphi', \end{aligned} \right.$$

wo

$$(14) \quad \begin{cases} a_{n0} = Q_n(k_1 a), \\ a_{nm} = Q_{n+m}(k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(k_1 a), \\ b_{nm} = Q_{n+m}(k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(k_1 a) \end{cases}$$

gesetzt wurde.

Die linearen Gleichungen für A_n , B_n usw., die sich aus den Grenzbedingungen (6) und (6') ergeben, zerfallen in zwei voneinander unabhängige Systeme. Setzt man der Kürze halber

$$(15) \quad \begin{cases} k_1 \varrho = p_1, & k_2 \varrho = p_2, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{p_2}{p_1} = \eta, \end{cases}$$

so lautet das erste System

$$(16) \quad \begin{cases} A_0 Q_0(p_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J_0(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + J_0(p_1) = C_0 J_0(p_2), \\ A_1 Q_1(p_1) - (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J_1(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad = C_1 J_1(p_2), \\ A_2 Q_2(p_1) + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} - \dots) J_2(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + 2 J_2(p_1) = C_2 J_2(p_2), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(16') \quad \begin{cases} A_0 Q'_0(p_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J'_0(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + J'_0(p_1) = C_0 \eta J'_0(p_2), \\ A_1 Q'_1(p_1) - (A_1 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J'_1(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad = C_1 \eta J'_1(p_2), \\ A_2 Q'_2(p_1) + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{21} - \dots) J'_2(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + 2 J'_2(p_1) = C_2 \eta J'_2(p_2), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

und ähnlich erhält man für das zweite System:

$$(17) \quad \begin{cases} B_1 Q_1(p_1) + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) J_1(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + 2 i J_1(p_1) = D_1 J_1(p_2), \\ B_2 Q_2(p_1) - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) J_2(p_1) = D_2 J_2(p_2), \\ B_3 Q_3(p_1) + (B_1 b_{13} - B_2 b_{23} + \dots) J_3(p_1) \\ \qquad \qquad \qquad + 2 i J_3(p_1) = D_3 J_3(p_2), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(17') \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 Q_1'(p_1) + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) J_1'(p_1) \\ \quad \quad \quad + 2i J_1'(p_1) = D_1 \eta J_1'(p_2), \\ B_2 Q_2'(p_1) - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) J_2'(p_1) = D_2 \eta J_2'(p_2), \\ B_3 Q_3'(p_1) + (B_1 b_{13} - B_2 b_{23} + \dots) J_3'(p_1) \\ \quad \quad \quad + 2i J_3'(p_1) = D_3 \eta J_3'(p_2), \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

In erster Reihe handelt es sich um die Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n , welche im Ausdrucke (11) für die elektrische Kraft im Außenraum auftreten. Eliminiert man also C_n und D_n aus den letzten Gleichungen und setzt man der Kürze halber

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n'(p_1) J_n(p_2) - \eta J_n(p_1) J_n'(p_2) = G_n, \\ Q_n'(p_1) J_n(p_2) - \eta Q_n(p_1) J_n'(p_2) = H_n, \end{array} \right.$$

so folgt

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 H_0 + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) G_0 + G_0 = 0, \\ A_1 H_1 - (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) G_1 = 0, \\ A_2 H_2 + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} - \dots) G_2 + 2G_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 H_1 + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) G_1 + 2i G_1 = 0, \\ B_2 H_2 - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) G_2 = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gestaltet sich sehr einfach, wenn das Verhältnis ρ/λ , und also auch p_1 , hinreichend klein ist, weil dann die Koeffizienten A_n und B_n mit steigendem Index n rasch abnehmen. Beschränkt man sich nämlich in den bekannten Reihen für die Zylinderfunktionen $K_n(p_1)$ und $J_n(p_1)$ stets auf das erste Glied, was für kleine p_1 als erste Annäherung zu betrachten ist, so folgt aus den Gleichungen (18) für $n > 1$

$$G_n = \frac{1}{n!} \frac{p_1^{n-1}}{2^n} \left(n J_n(p_2) - \frac{p_2}{\mu_2} J_n'(p_2) \right),$$

$$H_n = -(n-1)! \frac{2^{n-1}}{p_1^{n+1}} \left(n J_n(p_2) + \frac{p_2}{\mu_2} J_n'(p_2) \right)$$

Man sieht also, daß die Koeffizienten A_n und B_n im allgemeinen von der Ordnung p_1^{2n} sind, ja sogar, wenn man

auch p_2 als klein betrachten darf, und μ_2 gleich eins ist, was bei dielektrischen Zylindern und bei äußerst feinen, unmagnetischen Metalldrähten erfüllt ist, erhält man in der hier benutzten Annäherung $G_n = 0$, so daß die Werte von A_n und B_n noch kleiner ausfallen.

Daraus folgt nun eine einfache Methode zur Auflösung der Gleichungen (19) und (19'). Vernachlässigt man in der ersten Gleichung (19) alle Glieder mit $A_1, A_2, \dots$, so erhält man durch die Auflösung derselben den ersten Näherungswert für A_0 . Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung (19), in der man nur die Glieder mit A_1 behält, so folgt daraus der erste Näherungswert für A_1 , in gleicher Weise bestimmt man den ersten Näherungswert für A_2 usw. Wenn man dann die so erhaltenen Werte für $A_1, A_2, \dots$ in die erste Gleichung (19) einführt, so bekommt man den zweiten Näherungswert für A_0 , ähnlich folgt aus der zweiten Gleichung (19) der zweite Näherungswert für A_1 usw. Das Verfahren führt rasch zum Ziele; manchmal genügt es schon, nur die ersten Näherungswerte zu kennen.

Das Feld im Außenraum ist durch den Ausdruck (11) gegeben, von dem nur der reelle Teil zu berücksichtigen ist. Setzt man also

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha_n + i\gamma_n, \\ B_n &= \beta_n + i\delta_n, \end{aligned}$$

so bringt man $\mathfrak{E}_1$ leicht auf die Form

$$(20) \quad \mathfrak{E}_1 = P \cos \omega t - Q \sin \omega t,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(20') \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \cos k_1 y + \sum K_n(k_1 r')(\alpha_n \cos n \varphi' + \beta_n \sin n \varphi') \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum J_n(k_1 r')(\gamma_n \cos n \varphi' + \delta_n \sin n \varphi') \\ &\quad + \sum (-1)^n K_n(k_1 r'')(\alpha_n \cos n \varphi'' - \beta_n \sin n \varphi'') \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum (-1)^n J_n(k_1 r'')(\gamma_n \cos n \varphi'' - \delta_n \sin n \varphi''), \\ Q &= \sin k_1 y + \sum K_n(k_1 r')(\gamma_n \cos n \varphi' + \delta_n \sin n \varphi') \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \sum J_n(k_1 r')(\alpha_n \cos n \varphi' + \beta_n \sin n \varphi') \\ &\quad + \sum (-1)^n K_n(k_1 r'')(\gamma_n \cos n \varphi'' - \delta_n \sin n \varphi'') \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \sum (-1)^n J_n(k_1 r'')(\alpha_n \cos n \varphi'' - \beta_n \sin n \varphi''). \end{aligned} \right.$$

Bei experimentellen Messungen kommt es hauptsächlich auf den zeitlichen Mittelwert von $\mathfrak{E}_1^2$, d. h. auf

$$\bar{\mathfrak{E}}_1^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathfrak{E}_1^2 dt$$

an; τ bezeichnet die Schwingungsperiode. Nach der Gleichung (20) ist einfach

$$(21) \quad \bar{\mathfrak{E}}_1^2 = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2).$$

Der Ausdruck für $\bar{\mathfrak{E}}_1^2$, zu dem man nach Einführung von P und Q aus den Gleichungen (20') gelangt, ist für die Diskussion nicht geeignet. Man kann ihm eine einfachere Gestalt geben, indem man voraussetzt, daß die Entfernungen r' und r'' des Aufpunktes von beiden Zylinderachsen hinreichend groß gegen die Wellenlänge sind, so daß man für die Besselschen Funktionen J_n und K_n die bekannten asymptotischen Darstellungen benutzen darf. Man findet dann:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \cos k_1 y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \sin \psi' - T' \cos \psi') \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \sin \psi'' - T'' \cos \psi''), \\ Q = \sin k_1 y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \cos \psi' + T' \sin \psi') \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \cos \psi'' + T'' \sin \psi''), \end{array} \right.$$

wo gesetzt wurde:

$$(22') \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi' = k_1 r' - \frac{\pi}{4}, \quad \psi'' = k_1 r'' - \frac{\pi}{4}, \\ S' = \sum_m^{0, \infty} (-1)^m (\alpha_{2m} \cos 2m \varphi' + \beta_{2m} \sin 2m \varphi' \\ \quad - \gamma_{2m+1} \cos (2m+1) \varphi' - \delta_{2m+1} \sin (2m+1) \varphi'), \\ T' = \sum_m^{0, \infty} (-1)^m (\gamma_{2m} \cos 2m \varphi' + \delta_{2m} \sin 2m \varphi' \\ \quad + \alpha_{2m+1} \cos (2m+1) \varphi' + \beta_{2m+1} \sin (2m+1) \varphi'). \end{array} \right.$$

Die Ausdrücke für S'' und T'' folgen aus denen für S' und T' , wenn man in dieselben $180^\circ - \varphi''$ statt φ' einführt.

Aus der Gleichung (21) ergibt sich

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_1^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4\sqrt{r'r''}} ((S' S'' + T' T'') \cos(\psi' - \psi'') \\ &\quad - (S' T'' - S'' T') \sin(\psi' - \psi'')) \\ &\quad + \frac{\lambda}{8r'} (S'^2 + T'^2) + \frac{\lambda}{8r''} (S''^2 + T''^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \sin(k_1 y + \psi') - T' \cos(k_1 y + \psi')) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \sin(k_1 y + \psi'') - T'' \cos(k_1 y + \psi'')). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung besagt, daß sich die mittlere Feldintensität mit der Lage des Aufpunktes periodisch ändert, oder daß sich Interferenzstreifen bilden. Aus der Form derselben sieht man, daß es am einfachsten ist, den Verlauf der Feldintensität an denjenigen Kurven zu betrachten, an welchen die Differenz $\psi' - \psi''$ oder auch $r' - r''$ konstant bleibt. Es sind Hyperbeln (im Raume hyperbolische Zylinder), die in Gerade, welche durch den Mittelpunkt verlaufen, übergehen, sobald die Entfernung des Aufpunktes von den beiden Zylinderachsen gegen ihren Abstand groß ist. Unter derselben Bedingung bleiben auch die Werte von S', T', S'', T'' nahezu konstant, wenn sich der Aufpunkt auf einer solchen Geraden bewegt, denn die Winkel φ' und φ'' ändern sich langsam, und außerdem nehmen die Koeffizienten α_m, β_m usw. mit steigendem Index m rasch ab. Wächst nun beim Übergange von einem Maximum oder Minimum der Feldintensität zum nächstfolgenden y um Δy , ψ' (oder ψ'') um $\Delta \psi'$, so folgt aus Gleichung (23) mit großer Annäherung

$$(24) \quad k_1 \Delta y + \Delta \psi' = 2\pi.$$

Es sei nun r die Entfernung des Aufpunktes M vom Mittelpunkte O , χ der Winkel, den die Verbindungslinie beider dieser Punkte mit der negativen y -Achse einschließt — wir wollen χ den „Beugungswinkel“ nennen —; man hat dann $y = -r \cos \chi$, weiter folgt aus der ersten Gleichung (22')

$$\Delta \psi' = k_1 \Delta r',$$

oder auch, weil r' groß gegen den Abstand beider Zylinder ist,

$$\Delta \psi' = k_1 \Delta r.$$

So bekommt man aus der Gleichung (24) für den Abstand Δr zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima folgenden Wert:

$$(24') \quad \Delta r = \frac{\lambda}{1 - \cos \chi}$$

Die Interferenzstreifen liegen also am häufigsten nebeneinander, wenn $\chi = \pi$ ist, d. h. in der Symmetrieebene, vor den Zylindern; es ist dann $\Delta r = \lambda/2$. In der Ebene beider Zylinderachsen ist $\chi = \pi/2$, also $\Delta r = \lambda$, endlich in der Symmetrieebene, aber hinter den Zylindern, ist $\chi = 0$, und Δr ist unendlich groß, hier also kommen keine Interferenzstreifen zustande, wenigstens nicht für Entfernungen, die groß gegen a und λ sind.

Ganz denselben Beziehungen begegnet man auch bei der Untersuchung der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem einzigen Zylinder; auch da ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima bei festem χ durch die Gleichung (24') gegeben. Überhaupt sieht man aus dem allgemein gültigen Ausdrucke (4) für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum, daß man wieder zur Gleichung (24') gelangt, sobald die Entfernungen des Aufpunktes von den Zylindern gegen die Wellenlänge und gegen den Abstand der beiden äußeren Zylinder groß sind. Speziell folgt auch für zwei Zylinder, daß, wenn der Abstand der Zylinder klein ist, das Feld im Außenraum im großen und ganzen demjenigen eines einzigen Zylinders ähnlich verläuft, weil die Phasendifferenz der beiden von den Zylindern ausgehenden Störungswellen klein ist. Erst mit wachsendem Abstand der Zylinder tritt der Einfluß der Interferenz beider Wellen zutage; so z. B. bilden sich in der Symmetrieebene, hinter den Zylindern, Interferenzstreifen, deren Zahl aber endlich bleibt und mit zunehmendem Abstand der Zylinder auch zunimmt.

Um nun die Wirkung beider Zylinder aufeinander zu verfolgen, wollen wir voraussetzen, daß beide Zylinder dünn sind, daß also p_1 hinreichend klein ist. Die Rechnung wird dadurch bedeutend vereinfacht, denn es fallen dann die Koeffizienten A_n und B_n , wie wir schon früher gezeigt haben, sehr rasch ab, so daß man in erster Annäherung alle gegen A_0 vernachlässigen darf, wenigstens, insofern es sich um die Be-

stimmung der Feldintensität in Punkten, die nicht allzu nahe an der Oberfläche der Zylinder liegen, handelt. Es folgt dann aus der ersten Gleichung (19)

$$A_0 = - \frac{G_0}{H_0 + Q_0(k_1 a) G_0},$$

wo die Werte von G_0 und H_0 durch die Gleichungen (18) gegeben sind, in welche $n=0$ zu setzen ist.

Für die weitere Diskussion müssen wir noch auseinanderhalten, ob die Beugung an dielektrischen oder an leitenden Zylindern erfolgt. Im ersten Falle ist $p_2 = p_1 \sqrt{\epsilon}$, es ist also auch klein; weiter ist nach der letzten Gleichung (15) $\eta = \sqrt{\epsilon}$, wenn man der Einfachheit wegen $\mu_2 = 1$ setzt, woraus folgt

$$H_0 = - \frac{1}{p_1}, \quad G_0 = \frac{p_1}{2} (\epsilon - 1),$$

und mit derselben Genauigkeit folgt weiter

$$(25') \quad A_0 = \frac{\epsilon - 1}{2} p_1^2 \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{2} p_1^2 Q_0(k_1 a) \right)$$

Das Glied mit $Q_0(k_1 a)$ entspricht der gegenseitigen Beeinflussung beider Zylinder. Bedenkt man, daß $Q_0(k_1 a)$ für kleine Werte von a von der Ordnung $\log k_1 a$ ist, und daß $k_1 a$ nimmer kleiner sein kann als $2p_1$, so sieht man, daß auch bei kleiner Entfernung beider Zylinder die Wirkung derselben aufeinander gering ist, und daß man das Feld im Außenraum mit großer Annäherung einfach als durch Übereinanderlagerung beider Felder, die die Zylinder für sich allein hervorrufen würden, entstanden denken kann. Aus der letzten Gleichung folgt auch, daß sich die gegenseitige Beeinflussung beider Zylinder bei wachsendem Abstand a periodisch — natürlich mit sinkender Amplitude — ändert.

Ganz anders stehen die Verhältnisse, wenn beide Zylinder gute Leiter sind. Wegen des großen Wertes der Leitungsfähigkeit, die in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt wird, ist k_2 , und also auch η , sehr groß, so daß man, den Fall äußerst feiner Metalldrähte ausgenommen, in den Ausdrücken (18) für G_0 und H_0 die mit η nicht behafteten Glieder ohne Bedenken streichen kann. Man erhält dann:

$$(25'') \quad A_0 = - \frac{J_0(p_1)}{Q_0(p_1) + Q_0(k_1 a)},$$

eine Formel, aus welcher alle den Zylindern zugehörigen Konstanten verschwunden sind, und welche für unendlich gute Leiter streng gültig wäre. Aus dieser Gleichung sieht man auch, daß die gegenseitige Beeinflussung der beiden Zylinder in diesem Falle recht beträchtlich sein kann, denn für kleine Werte von a sind beide im Nenner auftretenden Glieder von derselben Ordnung; erst für große Werte von a verschwindet sie, und das Feld entsteht einfach durch Superposition der Wirkungen einzelner Zylinder.

Es sei noch bemerkt, daß sich die Wirkung der Zylinder aufeinander leicht interpretieren läßt, falls ihr Abstand hinreichend groß ist. Für große Werte von a ist nämlich

$$Q_n(k_1 a) = -i^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2 k_1 a}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - k_1 a\right)} = i^n Q_0(k_1 a),$$

und aus den Gleichungen (14) folgt dann

$$\begin{aligned} a_{n0} &= Q_n(k_1 a), \\ a_{nm} &= 2 i^{n+m} Q_0(k_1 a) = 2 i^m Q_n(k_1 a), \\ b_{nm} &= 0. \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in die Gleichungen (17) und (17') ein, so erhält man für die Koeffizienten B_n ganz dieselben Gleichungen wie im Falle der Beugung an einem einzigen Zylinder. Es ist hier $B_{2m} = 0$. In den Gleichungen (16) und (16') darf man zuerst in diejenigen Glieder, in denen die Koeffizienten a_{mn} auftreten, statt A_n annähernd richtige Werte einführen, die man erhält, wenn man $a_{mn} = 0$ setzt, und welche auch dem Falle eines einzigen Zylinders entsprechen. Wir bezeichnen sie mit $\bar{A}_n$; es ist $\bar{A}_{2m+1} = 0$. Setzt man nun der Kürze halber (26)

$$\bar{A}_0 Q_0 + \bar{A}_2 Q_2 + \bar{A}_4 Q_4 + \dots = M,$$

so lauten die Gleichungen (16) und (16')

$$\begin{aligned} A_0 Q_0(p_1) + M J_0(p_1) + J_0(p_1) &= C_0 J_0(p_2), \\ A_1 Q_1(p_1) - 2 i M J_1(p_1) &= C_1 J_1(p_2), \\ A_2 Q_2(p_1) + 2 i^2 M J_2(p_1) + 2 J_2(p_1) &= C_2 J_2(p_2), \\ \dots &\dots \\ A_0 Q_0'(p_1) + M J_0'(p_1) + J_0'(p_1) &= C_0 \eta J_0'(p_2), \\ A_1 Q_1'(p_1) - 2 i M J_1'(p_1) &= C_1 \eta J_1'(p_2), \\ A_2 Q_2'(p_1) + 2 i^2 M J_2'(p_1) + 2 J_2'(p_1) &= C_2 \eta J_2'(p_2), \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen würde man auch erhalten, wenn man voraussetzte, daß die Beugung an einem einzigen Zylinder entsteht, daß aber neben der einfallenden Welle, die sich in der Richtung der negativen y -Achse bewegt, noch eine andere einfallende Welle auftritt, die durch den Ausdruck

$$M e^{-i k_1 r' \cos \varphi'} = M e^{-i k_1 \left(x - \frac{a}{2}\right)}$$

gegeben wäre. Diese Welle pflanzt sich in der Richtung der zunehmenden x fort. Aus der Gleichung (26) sieht man, daß ihre Amplitude proportional mit $a^{-1/2}$ ist, und daß ihr periodischer Teil gleich

$$e^{i \left[\frac{\pi}{4} - k_1 \left(\frac{a}{2} + x \right) \right]}$$

ist. Es ist also die vom linken Zylinder ausgehende Störungswelle.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Beugung an drei parallelen, äquidistanten Zylindern über. Es seien r, φ die Polarkoordinaten des Aufpunktes, in bezug auf den Mittelpunkt des mittleren Zylinders, r', φ' bzw. r'', φ'' die Polarkoordinaten des Aufpunktes, auf die Mittelpunkte beider äußeren Zylinder bezogen. Man erhält dann für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse folgenden Ausdruck:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_{2n} Q_{2n}(k_1 r) \cos 2n \varphi \\ &\quad + B_{2n+1} Q_{2n+1}(k_1 r) \sin (2n+1) \varphi) \\ &\quad + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} A_n' (Q_n(k_1 r') \cos n \varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n \varphi'') \\ &\quad + e^{i\omega t} \sum_n^{1, \infty} B_n' (Q_n(k_1 r') \sin n \varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n \varphi''); \end{aligned} \right.$$

für die elektrische Kraft im Innern des mittleren Zylinders folgt dann:

$$(27') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_2 &= e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (C_{2n} J_{2n}(k_2 r) \cos 2n \varphi \\ &\quad + D_{2n+1} J_{2n+1}(k_2 r) \sin (2n+1) \varphi), \end{aligned} \right.$$

endlich für die elektrische Kraft im Innern der beiden äußeren Zylinder bekommt man:

$$(27'') \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_2' = e^{i\omega t} \sum_0^{\infty} (C_n' \cos n\varphi' + D_n' \sin n\varphi') J_n(k_2 r'), \\ \mathfrak{E}_2'' = e^{i\omega t} \sum_0^{\infty} (-1)^n (C_n' \cos n\varphi'' - D_n' \sin n\varphi'') J_n(k_2 r''). \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen sind an der Oberfläche des mittleren Zylinders und eines der beiden äußeren, z. B. des rechten, zu erfüllen. Man muß also zuerst den Ausdruck (27) in eine Fouriersche Reihe, die nach dem Kosinus und Sinus des vielfachen φ bzw. φ' fortschreitet, umwandeln. Dies läßt sich leicht nach der oben angedeuteten Weise durchführen; man erhält

$$\begin{aligned} Q_n(k_1 r') \cos n\varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'' \\ = 2(-1)^n \sum_m^{0, \infty} a_{n, 2m} J_{2m}(k_1 r) \cos 2m\varphi, \\ Q_n(k_1 r') \sin n\varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'' \\ = 2(-1)^{n-1} \sum_m^{0, \infty} b_{n, 2m+1} J_{2m+1}(k_1 r) \sin (2m+1)\varphi, \\ Q_n(k_1 r) \cos n\varphi = \sum_m^{0, \infty} (-1)^m a_{nm} J_m(k_1 r') \cos m\varphi', \\ Q_n(k_1 r) \sin n\varphi = \sum_m^{1, \infty} (-1)^{m-1} b_{nm} J_m(k_1 r') \sin m\varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'' = \sum_m^{0, \infty} (-1)^m \bar{a}_{nm} J_m(k_1 r') \cos m\varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'' = \sum_m^{1, \infty} (-1)^{m-1} \bar{b}_{nm} J_m(k_1 r') \sin m\varphi', \end{aligned}$$

wo die Größen a_{nm} , b_{nm} durch die Gleichungen (14) definiert sind; weiter gilt:

$$(28) \quad \begin{cases} \bar{a}_{n0} = Q_n(2k_1 a), \\ \bar{a}_{nm} = Q_{n+m}(2k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(2k_1 a), \\ \bar{b}_{nm} = Q_{n+m}(2k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(2k_1 a). \end{cases}$$

Stellt man also die Grenzbedingungen (6) und (6') für die Oberfläche eines jeden Zylinders auf, so bekommt man, wie

woraus folgt

$$A_0 = - \frac{M}{\frac{H_0}{G_0} M + 2 a_{00} N},$$

$$A_0' = - \frac{N}{\frac{H_0}{G_0} + 2 a_{00} N},$$

wo gesetzt wurde:

$$M = \frac{H_0}{G_0} + a_{00} - 2 a_{00}, \quad N = \frac{H_0}{G_0} - a_{00}$$

Das Feld im Außenraum ist nach Gleichung (27) durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} (A_0 Q_0(k_1 r) + A_0' Q_0(k_1 r') \\ &\quad + A_0' Q_0(k_1 r'')) = R e^{i\omega t} \end{aligned} \right.$$

Setzt man nun

$$R = P + i Q,$$

wo P und Q reell sind, so folgt für den zeitlichen Mittelwert der Feldintensität:

$$\bar{\mathfrak{E}}_1^2 = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2).$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist nun die mittlere Feldintensität dreier Kupferdrähte von 1 mm Durchmesser, für verschiedene Abstände a , berechnet. Die Wellenlänge $\lambda = 31,4$ cm, als Aufpunkte sind zwei Punkte der Symmetrieebene, der eine 10 cm, der andere 40 cm hinter dem mittleren Zylinder liegend (also $y = -10$ cm bzw. $y = -40$ cm), gewählt. Die Leitfähigkeit $\sigma = 5,25 \cdot 10^{17}$ elstat. Einh., woraus folgt

$$p_2 = 234(1 - i), \quad \frac{1}{\eta} = 2,13 \cdot 10^{-5}(1 + i).$$

Da p_2 einen sehr großen Wert hat, dessen imaginärer Teil negativ ist, so darf man mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$\frac{J_0'(p_2)}{J_0(p_2)} = i - \frac{1}{2p_2} = i - 1,1 \cdot 10^{-3}(1 + i).$$

Die Werte der Feldintensität sind auf die mittlere Intensität des störungsfreien Feldes bezogen (d. h. der Wert von $\bar{\mathfrak{E}}_1^2$ ist mit 2 multipliziert) und in der dritten bzw. fünften Kolonne der beigegebenen Tab. I angegeben. Zum Vergleich sind in der zweiten und vierten Kolonne die Werte der mittleren Feldintensität zweier Kupferdrähte von demselben

Durchmesser und für gleiche Wellenlänge angeführt. Die Aufpunkte liegen jetzt hinter einem der Drähte (es ist also z. B. $\varphi' = -\pi/2$) in denselben Entfernungen wie früher.

Tabelle I.

$\varrho = 0,1$ cm, $\lambda = 31,4$ cm, $\sigma = 5,25 \cdot 10^{17}$ elstat. Einh.

a	$y = -10$ cm		$y = -40$ cm	
	Zwei Drähte	Drei Drähte	Zwei Drähte	Drei Drähte
1 cm	0,589	0,507	0,780	0,731
3	0,526	0,374	0,737	0,640
5	0,497	0,294	0,708	0,561
7,5	0,505	0,331	0,683	0,507
10	0,579	0,555	0,678	0,542
15	0,845	0,998	0,756	0,697
20	0,912	1,240	0,862	0,874
25	0,862	1,040	0,937	1,048
30	0,721	0,746	0,970	1,089
40	0,553	0,413	0,962	1,092
50	0,829	0,956	0,985	0,721
∞	0,708	0,708	0,848	0,848

Man sieht, daß die Schattenwirkung eines einzelnen Drahtes ($a = \infty$) durch die Anwesenheit anderer Drähte nicht immer verstärkt erscheint; manchmal kann dieselbe sogar aufgehoben werden, so daß dann die Feldintensität hinter dem Drahte größer ist als diejenige des ungestörten Feldes. Freilich tritt dies nur in den Punkten auf, die ziemlich nahe an den Drähten liegen. Ist dagegen die Entfernung des Aufpunktes hinreichend groß gegen die Wellenlänge und gegen den Abstand der Drähte, so wird das Feld immer geschwächt; wie es sich leicht auf Grund der Gleichung (30) zeigen läßt, wenn man in derselben die Besselschen Funktionen durch die asymptotischen Werte darstellt und bedenkt, daß sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil von A_0 und A_0' immer negativ ist.

Die Schattenwirkung der Drähte erreicht ihr Maximum für einen gewissen Wert von a , der von der Lage des Aufpunktes abhängt; rücken die Drähte näher aneinander, so wird

das Feld verstärkt. Mit wachsendem a ändert sich das Feld periodisch; für sehr große Werte von a ist die Periode gleich λ .

2. Die elektrische Kraft ist senkrecht zu den Zylinderachsen.

Dieser Fall ist theoretisch und experimentell weniger interessant als der vorige und wir wollen ihn nur kurz betrachten. Von den elektrischen Kraftkomponenten treten hier nur $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_\varphi$ auf, von den magnetischen kommt nur die den Zylinderachsen parallele Komponente $\mathfrak{H}_z$ vor. Da außerdem alles von z unabhängig ist, so lauten die Maxwell'schen Gleichungen einfach:

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{c} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_r \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{c} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_\varphi \right) = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}. \end{cases}$$

Aus denselben erhält man in bekannter Weise folgende Differentialgleichungen für $\mathfrak{H}$ — wie wir jetzt kurz statt $\mathfrak{H}_z$ schreiben wollen:

$$(31') \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \varphi^2},$$

eine Gleichung, die mit der Gleichung (1') für $\mathfrak{E}$ vollkommen identisch ist und für deren Integral man wieder den Ausdruck (2) setzen darf. Ebenso ist die resultierende magnetische Kraft im Außenraum und im Innenraum durch die Ausdrücke (4) und (5) gegeben; es ist also

$$\mathfrak{H}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_h^{1, N} \sum_n^{0, \infty} (A_{hn} \cos n \varphi_h + B_{hn} \sin n \varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

$$\mathfrak{H}_{2h} = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (C_{hn} \cos n \varphi_h + D_{hn} \sin n \varphi_h) J_n(k_2 r_h).$$

Die Grenzbedingungen an der Oberfläche des h^{ten} Zylinders lauten:

$$(32) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{2h}, \\ (\mathfrak{E}_\varphi)_1 = (\mathfrak{E}_\varphi)_{2h}; \end{cases}$$

statt der letzten Gleichung darf man wieder schreiben

$$(32') \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial r_h} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \frac{\partial \mathfrak{H}_{2h}}{\partial r_h},$$

wo gesetzt wurde:

$$(33) \quad v = 4\pi\sigma + i\varepsilon\omega.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (3) erhält man auch:

$$v = \frac{ic^2}{\omega\mu} k^2.$$

Man sieht, daß sich die Gleichungen (32) und (32') von den im vorigen Falle geltenden Grenzbedingungen (6) und (6') nur dadurch unterscheiden, daß in denselben v_1 und v_2 mit μ_1 und μ_2 vertauscht erscheint. Daraus folgt weiter, daß die dort entwickelten Gleichungen auch hier bestehen, nur muß der Wert von η , der durch die Gleichung (15) bestimmt ist, geändert werden; es ist nämlich jetzt

$$\eta = \frac{k_2}{k_1} \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Handelt es sich um dielektrische Zylinder, so ist

$$\eta = \frac{\mu_2}{\sqrt{\varepsilon}};$$

sind die Zylinder gute Leiter, so hat man:

$$\eta = \sqrt{\frac{c\mu_2}{\sigma\lambda}} \frac{1+i}{2},$$

η ist also hier sehr klein.

Wir wollen uns der Einfachheit halber auf den Fall zweier Zylinder beschränken und gleich voraussetzen, daß beide Zylinder sehr dünn sind. Sind nun die Zylinder dielektrisch und darf man $p_2 = p_1 \sqrt{\varepsilon}$ auch als klein betrachten, so folgt aus den Gleichungen (18), daß G_0 von der Ordnung p_1^3 ist, alle anderen G_n sind von der Ordnung p_1^{2n-1} , endlich alle H_n sind von der Ordnung $1/p_1$. Aus den Gleichungen (19) und (19') sieht man dann, daß man in erster Annäherung alle A_n gleich Null setzen darf; weiter ist

$$B_1 = ip_1^2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \left(1 + b_{11} \frac{p_1^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right),$$

alle übrigen B_n darf man wieder vernachlässigen. Die Wirkung der Zylinder aufeinander ist also wieder gering.

Sind die Zylinder gute Leiter, so darf man in den Gleichungen (18) die mit η behafteten Glieder streichen; dann folgt, daß das Verhältnis G_n/H_n von der Ordnung p_1^{2n} , G_0/H_0 von der Ordnung p_1^2 ist. Es sind also die Koeffizienten A_0

und B_1 von derselben Ordnung, alle übrigen A_n und B_n darf man vernachlässigen. Man erhält aus den Gleichungen (19) und (19')

$$A_0 = -\frac{p_1^2}{2} \left(1 - a_{00} \frac{p_1^2}{2} \right),$$

$$B_1 = i p_1^2 \left(1 + b_{11} \frac{p_1^2}{2} \right).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit der Gleichung (25''), die dem Falle entspricht, daß die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft, so sieht man gleich, daß, wenn die elektrische Kraft senkrecht zu den Zylinderachsen gerichtet ist, die Wirkung der Zylinder aufeinander viel geringer und auch die durch die Zylinder hervorgerufene Störung des Feldes bedeutend kleiner, ja kaum bemerkbar ist, sobald der Aufpunkt nicht allzu nahe an der Oberfläche der Drähte liegt. Es ist auch ohne weiteres klar, daß dasselbe auch bei der Beugung an drei Zylindern gültig bleibt.

Daraus folgt nun ein interessantes Resultat. Bei seinen bekannten Gitterversuchen fand H. Hertz, daß ein Gitter aus zylindrischen Metallstäben die elektrische Energie der einfallenden Welle in verschiedener Weise beeinflusst, je nachdem die elektrische Kraft zu den Stäben parallel oder senkrecht gerichtet ist. Im ersten Falle wird das Feld nahezu völlig abgeschirmt, im zweiten Falle dagegen läßt das Gitter fast die ganze einfallende Energie durch. Ähnliche Verhältnisse findet man auch, falls die Beugung an einem einzigen Metalldrahte vor sich geht; das „Durchlässigkeitsvermögen“ eines solchen Drahtes ist für die Punkte, die hinter ihm liegen, kleiner, wenn die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel mit dem Drahte verläuft als im anderen Falle — wenigstens solange das Verhältnis ϱ/λ hinreichend klein bleibt. Wir wollen diesen Effekt mit Schaefer den *Hertzeffekt* nennen. Aus den in Tab. I angeführten Zahlen sieht man nun, daß im Falle der Beugung an zwei oder drei parallelen Metalldrähten das dem Hertzeffekt entgegengesetzte Phänomen stattfinden kann; unter Umständen ist hier nämlich die mittlere Feldintensität in den Punkten, die hinter einem der Drähte liegen, bedeutend größer, wenn die elektrische Kraft parallel zu den Drähten verläuft. Dieser Effekt wurde von Schaefer *Duboisefekt* genannt. Man sieht aber auch, daß das Auftreten

des Duboiseffektes nur auf die Punkte beschränkt ist, welche ziemlich nahe an den Drähten liegen; für weiter entfernte Punkte läßt sich nur der Hertzeffekt erwarten, wie ihn auch Schaefer und Reiche¹⁾ für Gitter, deren Gitterkonstante groß ist, gefunden haben.

3. Zwei Zylinder hintereinander. Die elektrische Kraft ist parallel zu den Zylinderachsen.

Wir wollen jetzt die Beugung an zwei hintereinander stehenden, parallelen Zylindern untersuchen. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle ist also jetzt parallel zur Ebene, welche durch die beiden Zylinderachsen bestimmt ist. Beide Zylinder dürfen verschieden sein. Wir werden uns nur auf den Fall beschränken, daß die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft.

Macht man die Ebene beider Zylinderachsen wieder zur xz -Ebene, so fällt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einfallenden Welle in die x -Achse, und setzt man voraus, daß sich dieselbe in der Richtung der abnehmenden x bewegt, so hat man:

$$\mathfrak{E}_{1e} = e^{i(\omega t + k_1 x)},$$

oder auch (vgl. Fig. 2)

$$\mathfrak{E}_{1e} = e^{i\left(\omega t + k_1 r' \cos \varphi' + k_1 \frac{a}{2}\right)} = e^{i\left(\omega t + k_1 r'' \cos \varphi'' - k_1 \frac{a}{2}\right)}.$$

Da die xz -Ebene offenbar eine Symmetrieebene ist, so folgt für die vom vorderen Zylinder ausgehende Störungswelle:

$$\mathfrak{E}_{1r}' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} A_n Q_n(k_1 r') \cos n \varphi',$$

ähnlich bekommt man für die vom hinteren Zylinder ausgehende Störungswelle:

$$\mathfrak{E}_{1r}'' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} B_n Q_n(k_1 r'') \cos n \varphi'',$$

so daß die resultierende elektrische Kraft im Außenraum durch den folgenden Ausdruck gegeben erscheint:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_n Q_n(k_1 r') \cos n \varphi' + B_n Q_n(k_1 r'') \cos n \varphi''). \end{array} \right.$$

1) Cl. Schaefer u. F. Reiche, l. c.

[illegible]

Wir wollen nun die Gleichungen (36) und (37) dazu benutzen, um einige Resultate, zu denen Grossmann¹⁾ bei seinen Messungen der Beugung an einem Zylinder gelangte, und die mit der Theorie nicht übereinstimmen, zu erklären. Zur Erzeugung der primären ebenen Wellen diente ihm ein Hertzscher Erreger, der in der Brennpunktlinie eines parabolischen Spiegels aufgestellt war. Die Wellen fielen auf ein zylindrisches, dünnwandiges Glasrohr, das mit Wasser gefüllt war, und die Strahlung wurde mit einem Klemenčičschen Thermo-element gemessen, das auf den Erreger abgestimmt war. Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß zuerst die freie Strahlung gemessen wurde. Es wurde dann in den Strahlengang ein Zylinder gebracht, und die Strahlung wieder bestimmt; das Verhältnis beider so erhaltenen Werte wurde dann mit dem theoretischen Werte verglichen.

Die Übereinstimmung mit der Theorie war so genau, wie es sich eben in Anbetracht der Schwierigkeiten, mit welchen die Messungen verbunden waren, erwarten ließ; nur in einem Punkte zeigte sich ein wesentlicher Unterschied. Den theoretischen Resultaten zufolge sollen in den hinter dem Zylinder liegenden Punkten keine Interferenzstreifen entstehen; wenn die Entfernung des Aufpunktes von dem Zylinder wächst, so soll die Feldintensität entweder fortwährend abnehmen, bis sie den ursprünglichen Wert (ohne Zylinder) erreicht, oder sie soll fortwährend zunehmen, oder endlich nimmt sie zuerst ab, erreicht ein Minimum, und dann nähert sie sich steigend allmählich dem der freien Strahlung entsprechenden Werte. Die Messungen ergaben dagegen in einigen Fällen periodische Schwankungen der Intensität, die mit wachsendem Abstand vom Zylinder abnahmen; die Periode war angenähert $\lambda/2$. Aus dem Umstande, daß diese Schwankungen nur dann auftraten, wenn der Radius des Zylinders verhältnismäßig groß und die Entfernung des Aufpunktes vom Zylinder gegen die Wellenlänge klein war, erklärten die Autoren ihr Auftreten dadurch, daß das Meßinstrument selbst das zu messende Feld ändert. Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß die Theorie wirklich periodische Schwankungen der Feldintensität in den hinter

1) Cl. Schaefer u. F. Grossmann, l. c.

dem Zylinder liegenden Punkten ergibt, wenn man die Wirkung des Thermoelementes auf den Zylinder berücksichtigt.

Zu dem Zwecke denken wir uns das Thermoelement durch einen unendlich langen, sehr dünnen Metalldraht ersetzt. Die Beugung erfolgt an beiden Zylindern; mißt man also die Feldintensität in einem hinter dem Zylinder liegenden Punkte, so hat man den gerade untersuchten Fall. Da der Radius des hinteren Zylinders äußerst klein ist, so darf man in den Gleichungen (36) und (37) $B_1, B_2, \dots$ gegen B_0 vernachlässigen. Aus den Gleichungen (36) folgt dann:

$$(38) \quad A_n = \alpha_n + \beta_n B_0,$$

wobei gilt:

$$(38') \quad \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{G_0}{H_0} e^{i k_1 \frac{a}{2}}, & \alpha_n = -2 i^n \frac{G_n}{H_n} e^{i k_1 \frac{a}{2}}, \\ \beta_n = (-1)^{n-1} \frac{G_n}{H_n} a_{0n}; \end{cases}$$

die Koeffizienten G_n und H_n sind durch die Gleichungen (18) gegeben. Von den Gleichungen (37) bleiben jetzt nur zwei übrig, die nach der Einführung des Ausdruckes (38) für A_n lauten:

$$(39) \quad \begin{cases} B_0(Q_0(\pi_1) + \beta J_0(\pi_1)) + J_0(\pi_1) \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 J_0(\pi_2), \\ B_0(Q_0'(\pi_1) + \beta J_0'(\pi_1)) + J_0'(\pi_1) \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 \xi J_0'(\pi_2), \end{cases}$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde:

$$(39') \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 a_{00} - \alpha_1 a_{10} + \dots = \alpha_0 Q_0(k_1 a) - \alpha_1 Q_1(k_1 a) + \dots, \\ \beta = \beta_0 a_{00} - \beta_1 a_{10} + \dots = \beta_0 Q_0(k_1 a) - \beta_1 Q_1(k_1 a) + \dots \end{cases}$$

Die Gleichungen (39) vereinfachen sich noch bedeutend, wenn man voraussetzt, daß der Metalldraht so fein ist, daß man nicht nur π_1 , sondern auch π_2 als klein betrachten darf. Mit Hilfe der bekannten Formeln für die Werte der Zylinderfunktionen bei kleinen Argumenten erhält man dann:

$$(39'') \quad \begin{cases} B_0 \left(\log \frac{2}{\gamma \pi_1} + \beta \right) + \alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_0, \\ B_1 \cdot \frac{1}{\pi_1} + \frac{\pi_1}{2} \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 \xi \frac{\pi_2}{2}. \end{cases}$$

Die Ausschläge des mit dem Thermoelemente verbundenen Galvanometers sind der in demselben während der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge proportional. Ist der Drahtradius sehr klein, so ist der Strom auch bei diesen schnellen Schwingungen über den Querschnitt gleichmäßig verteilt, und die Angaben des Galvanometers dürfen als Maß für den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der Stromintensität, oder auch des Quadrates der im Innern des Drahtes herrschenden elektrischen Kraft betrachtet werden. Für dieselbe folgt nun aus der Gleichung (35') in der hier benutzten Annäherung:

$$(40) \quad \mathfrak{E}_2'' = D_0 e^{i\omega t},$$

wo D_0 durch die Gleichungen (39'') bestimmt wird. Mit Berücksichtigung der letzten Gleichung (37'), in der wir der Einfachheit halber $\mu_1 = \mu_2'' = 1$ setzen wollen, erhält man für D_0 folgenden Ausdruck:

$$(40') \quad D_0 = \left(1 + \frac{\pi_2^2}{2} \left(\log \frac{2}{\gamma \pi_1} + \beta\right)\right) \left(e^{-ik_1 \frac{a}{2}} + \alpha\right)$$

Aus der Gleichung (38) sieht man, daß es die mit β_n behafteten Glieder sind, die der Rückwirkung des Thermoelementes auf den vorderen Zylinder entsprechen, nach Vernachlässigung derselben bekommt man nämlich für A_n denselben Ausdruck, als ob die Beugung nur am vorderen Zylinder erfolgen würde. Der durch die Gleichung (40') gegebene Wert von D_0 lautet dann:

$$(41) \quad \bar{D}_0 = \left(1 + \frac{\pi_2^2}{2} \log \frac{2}{\gamma \pi_1}\right) \left(e^{-ik_1 \frac{a}{2}} + \alpha\right),$$

und daraus folgt für die elektrische Kraft im Innern des Drahtes:

$$(41') \quad \bar{\mathfrak{E}}_2'' = \bar{D}_0 e^{i\omega t}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck den „theoretischen Wert der Feldintensität“ nennen; erfolgt nämlich die Beugung nur am vorderen Zylinder, so ist die Feldintensität in der Entfernung a hinter dem Zylinder gleich:

$$\begin{aligned} & \left(e^{-ik_1 \frac{a}{2}} + \alpha_0 Q_0(k_1 a) - \alpha_1 Q_1(k_1 a) + \dots\right) e^{i\omega t} \\ & = \left(e^{-ik_1 \frac{a}{2}} + \alpha\right) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (41) und (41') sieht man, daß $\bar{\mathfrak{E}}_2''$ derselben proportional ist; der Proportionalitätsfaktor hängt nur von den Konstanten des Drahtes und von der Wellenlänge ab, nicht aber von der Entfernung des Drahtes vom vorderen Zylinder.

Die Messungen dagegen beziehen sich auf den durch die Gleichung (40) gegebenen Wert von $\mathfrak{E}_2''$; für das Verhältnis beider Werte erhält man:

$$\frac{\bar{\mathfrak{E}}_2''}{\mathfrak{E}_2''} = 1 + \frac{\pi_2^2}{2} \beta.$$

Da nun durch die Messungen die zeitlichen Mittelwerte bestimmt werden, so setzen wir:

$$\frac{\bar{\mathfrak{E}}_2''}{\mathfrak{E}_2''} = M + iN;$$

das Verhältnis q zwischen dem beobachteten und dem theoretischen Werte ist dann:

$$q = M^2 + N^2.$$

Wir wollen diesen Ausdruck noch vereinfachen. Ist der Radius des vorderen Zylinders auch klein gegen die Wellenlänge, so darf man in erster Annäherung setzen:

$$\beta = \beta_0 a_{00} = -\frac{G_0}{H_0} Q_0^2 (k_1 a),$$

und beschränkt man sich auf Punkte, die nicht allzu nahe an der Oberfläche des vorderen Zylinders liegen, so folgt:

$$\beta = \frac{i\lambda}{4a} \frac{G_0}{H_0} e^{-2ik_1 a}.$$

Es sei nun:

$$\frac{G_0}{H_0} = r e^{i\psi},$$

weiter folgt aus Gleichung (3), daß $\pi_2^2 = k_2'^2 \rho'^2$ negativ imaginär, also $i\pi_2^2$ positiv reell ist; wir bezeichnen es mit p^2 . Nach einer einfachen Rechnung erhält man dann für q folgenden Wert:

$$q = 1 + \frac{r p^2}{4} \frac{\lambda}{a} \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} a - \psi\right);$$

die Größen von der Ordnung p^4 sind hier, wie überall, vernachlässigt.

Man sieht also, daß sich das Verhältnis zwischen dem beobachteten und dem theoretischen Werte periodisch ändert; die Periode ist gleich $\lambda/2$. Die Lagen der Maxima bzw. Minima sind durch die Gleichung:

$$(42) \quad \frac{4\pi}{\lambda} a = 2n\pi + \psi,$$

bzw.

$$(42') \quad \frac{4\pi}{\lambda} a = (2n + 1)\pi + \psi$$

bestimmt, sind also von den Konstanten des Thermoelementes unabhängig, da ψ nur von der Beschaffenheit des vorderen Zylinders abhängt.

Ist der vordere Zylinder dielektrisch, so ist ψ für $\lim \rho' = 0$ gleich π , mit wachsendem ρ' nimmt es ab. Aus den Gleichungen (42) und (42') folgt dann, daß sich die Maxima und Minima zu kleineren Werten von a verschieben, wenn der Radius des vorderen Zylinders wächst. Ist dagegen der vordere Zylinder ein guter Leiter, so findet das Umgekehrte statt; für $\lim \rho' = 0$ ist nämlich ψ Null und mit wachsendem ρ' nimmt es zu.

Tabelle II.

$s = 81$, $\rho'' = 5 \cdot 10^{-4}$ cm, $\lambda = 62,8$ cm.

a	$\rho' = 0,8$ cm			$\rho' = 1,2$ cm		
	Theoret. Wert der mittleren Feldint.	Beob. Wert der mittleren Feldint.	q	Theoret. Wert der mittleren Feldint.	Beob. Wert der mittleren Feldint.	q
4 cm	1,848	2,414	1,306	0,273	0,371	1,357
7	1,448	1,747	1,212	0,218	0,255	1,171
10	1,282	1,414	1,103	0,227	0,218	0,959
15	1,147	1,120	0,976	0,278	0,252	0,908
20	1,076	1,003	0,932	0,327	0,309	0,945
25	1,040	0,997	0,959	0,369	0,374	1,013
30	1,017	1,027	1,010	0,405	0,426	1,051
35	1,002	1,043	1,041	0,436	0,452	1,036
40	0,991	1,023	1,032	0,462	0,459	0,994
50	0,979	0,953	0,974	0,505	0,492	0,973
60	0,971	0,970	0,999	0,538	0,550	1,022
70	0,963	0,983	1,020	0,564	0,566	1,003
85	0,962	0,946	0,983	0,599	0,596	0,995
100	0,961	0,976	1,015	0,626	0,630	1,007

In der vorstehenden Tab. II sind zwei Fälle berechnet worden: Wasserzylinder vom Radius $\varrho' = 0,8$ cm bei der Wellenlänge $\lambda = 62,8$ cm und Wasserzylinder vom Radius $\varrho' = 1,2$ cm bei derselben Wellenlänge. Das Thermoelement ist durch einen Platindraht ($\sigma = 6,2 \cdot 10^{10}$ elektrostat. Einh.) vom Radius $\varrho'' = 5 \cdot 10^{-4}$ cm ersetzt. Von den Messungen, die Grossmann¹⁾ durchgeführt hat, sind mit den hier berechneten Fällen am besten Wasserzylinder vom Radius 0,74 cm und 0,98 cm bei der Wellenlänge $\lambda = 58$ cm zu vergleichen. Die Übereinstimmung mit der Theorie ist ziemlich gut. Die Maxima und Minima liegen an gleichen Stellen; mit wachsendem Radius des Wasserzylinders zeigt sich eine deutliche Verschiebung des ersten Minimums zu kleineren Werten von a , wie es die Theorie verlangt. Die Amplituden der periodischen Änderungen, so wie sie Grossmann beobachtet hat, sind viel größer als die hier berechneten; dies läßt sich bei der Konstruktion des Klemenčičschen Thermoelementes, das außerdem auf den Erreger abgestimmt war, erwarten.

Prag, 8. Februar 1913.

1) Cf. Schaefer u. F. Grossmann, l. c. p. 497.

(Eingegangen 10. Februar 1913.)