überall die neuesten Fortschritte berücksichtigt worden sind. Das Originellste darin ist das vom Verfasser ersonnene Modell für die Einsteinsche Uhrenregulierung. Ein solches Modell wurde im letzten Jahre unter Anleitung des Herrn Dr. L. Flamm auch in Wien ausgeführt und ist im Institut für theoretische Physik aufbewahrt.

Philipp Frank.

Die Lehre von den Kettenbrüchen. Von Oskar Perron. Band XXXVI aus B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Teubner, 1913. 520 S., geheftet M. 20.—, in Leinwand geb. M. 22.—.

Es fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung der mannigfachen Resultate, die über Kettenbrüche in alter und neuer Zeit gewonnen wurden, — eine Lücke, die das vorliegende Buch in dankenswerter und ausgezeichnete Weise ausfüllt. Stofflich zerfällt das Buch in zwei Hauptteile. Aus dem ersten arithmetischen Teil sei hervorgehoben die allgemeine Lehre von den regelmäßigen Kettenbrüchen; die Periodizität und die speziellen Ergebnisse über die Perioden bei quadratischen Irrationalitäten; die insbesondere von Hurwitz untersuchten Kettenbruchtypen, deren Teilnenner eine Anzahl arithmetischer Reihen höherer Ordnung bilden, wozu auch gewisse schon Euler bekannte mit der Zahl e zusammenhängende K. gehören; die transzendenten Zahlen Liouvilles und die durch die quasiperiodischen K. Maillets dargestellten; allgemeines über die halbberegelmäßigen K. (bei denen neben Teilzählern $= +1$ auch solche $= -1$ zugelassen sind) sowie gewisse besonders studierte Spezialfälle. Aus dem Inhalt des zweiten analytisch-funktionentheoretischen Teiles seien genannt die Konvergenzkriterien; Beziehungen von unendlichen Reihen und Produkten zu K., speziell von Potenzreihen zum „korrespondierenden“ und zum „assozierten“ K., hier finden der Gaußsche K. im Fall der hypergeometrischen Reihe, ein allgemeinerer von Heine, aber auch eine neue Untersuchung periodischer K. Platz, die gewissen speziellen zweiwertigen algebraischen Funktionen entsprechen; mit Sorgfalt werden dabei auseinandergehalten formales Entsprechen der unendlichen Symbole (Reihe und K.), die Konvergenzfrage und die Frage der zahlenmäßigen Gleichheit; hiebei wird ein bemerkenswerter Divergenzfall mitgeteilt; im Anschluß an eine Auseinandersetzung des Stieltjesschen Integralbegriffs werden die Stieltjesschen K. dargestellt; weiters werden behandelt die durch eine Padésche Tafel gelieferten Approximationen von Potenzreihen durch rationale Funktionen; K., deren n -ter Teilzähler und Teilnenner rationale Funktionen von n sind.

Das klar und lesbar geschriebene Buch stellt aber, ganz abgesehen von den neuen Ergebnissen, die es bringt, auch hinsichtlich der älteren Resultate mehr als eine bloße Zusammenfassung dar. In der älteren Literatur stößt man auf Schritt und Tritt auf Beweise, die den heutigen Anforderungen an Vollständigkeit und Strenge nicht durchaus entsprechen, so daß der Leser ständig auf der Hut vor Beweislücken sein muß; manche dieser Lücken sind durch spätere Arbeiten ausgefüllt, manche andere sind unausgefüllt geblieben. Darin, daß Herr Perron es unternommen hat, durchwegs exakte Beweise zu bringen, liegt ein nicht geringer Teil der Arbeit, aber auch ein wichtiges Verdienst des Buches. Daß hiebei den höchsten Anforderungen, die wir heute erheben, ent-

sprochen wurde, dafür gab wohl allein der Name des Verfassers Gewähr. Im übrigen ermöglichte es die einheitliche Darstellung (sie ist rein arithmetisch), vielfach kürzer zu beweisen als die Originalarbeiten. Zum Schluß sei noch auf das wertvolle Literaturverzeichnis hingewiesen. *Heinr. Tietze.*

Zahlentheorie. Von Kurt Hensel. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1913. (XII u. 356 S.) Brosch. M. 10.—, in Lwd. geb. M. 10.80.

Der Autor wendet in diesem Werk seine Methoden der Reihenentwicklungen, die er zunächst für die Lehre von den algebraischen Körpern erdacht hat, auf den Körper der gewöhnlichen ganzen Zahlen an. Das Buch enthält daher wenig neue Resultate, dafür aber eine methodische Behandlung des Gebiets, die zugleich die trefflichste Vorbereitung für das Studium jenes höheren Gebiets bildet, daß in Hensels Theorie der algebraischen Zahlen dargestellt ist.

Im ersten Kapitel werden die Grundgesetze und die Grundbegriffe Körper, Modul, Gruppe, Ring eingeführt, im zweiten die Teilbarkeit der Zahlen besprochen. Im dritten Kapitel beginnt die Hensel eigentümliche Betrachtungsweise des Verhaltens einer beliebigen Zahl einer festen Grundzahl (dem Modul) g gegenüber. Eine, ganze oder gebrochene, Zahl $A = \frac{m}{n}$ heißt für den Bereich von g ganz, wenn sie (in der reduzierten Form) einen zu g teilerfremden Nenner hat, sonst gebrochen. Diese ganzen Zahlen modulo g bilden einen Ring. Sind die Zahlen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ beide ganz, so heißt jede von ihnen eine Einheit. Jede modulo g ganze Zahl A ist einer der Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, g-1$$

nach g kongruent, etwa a_0 :

$$A = a_0 + g A_1;$$

A_1 ist wieder einer Zahl aus dieser Reihe kongruent, etwa a_1 , usw.:

$$A_1 = a_1 + g A_2,$$

$$A_2 = a_2 + g A_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

Hieraus folgt rein formal

$$A = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + a_3 g^3 + \dots = (\text{kurz}) a_0, a_1, a_2, a_3 \dots;$$

die Reihe ist, wenn sie nicht abbricht, was bei positiven absolut ganzen Zahlen A der Fall ist, natürlich nicht im gewöhnlichen Sinne konvergent, sondern sie hat Partialsummen, deren p -te der Zahl A nach g^{p+1} kongruent ist. So ist z. B.

$$5 = 1,01 \quad (2); \quad \frac{1}{3} = 7,666 \dots = 7,\overline{6} \quad (10); \quad -1 = 5,\overline{5} \quad (6)$$

und es bedeutet z. B. die zweite dieser Aussagen, daß folgende Kongruenzen gelten

$$\frac{1}{3} \equiv 7 \quad (10); \quad \frac{1}{3} \equiv 7 + 6 \cdot 10 = 67 \quad (100); \quad \frac{1}{3} \equiv 667 \quad (1000); \dots$$

Die Partialnummern werden als Näherungswerte der Zahl A bezeichnet.

Alle bisherigen Reihen fallen periodisch aus. Im vierten Kapitel werden nun auch die nicht periodischen als „allgemeine g -adische Zahlen“ hinzugenommen. Sie bilden einen Ring $R(g)$. Die Rechengesetze sind dabei dieselben wie bei