Stationäre Resonanzüberströme in elektrischen Kraftnetzen.

Theorie des gesättigten Transformators.

Von

Walter Dällenbach.

In elektrischen Kraftnetzen werden bei bestimmten kapazitiven Belastungen stationäre Resonanzüberströme höherer Frequenz beobachtet, die den Normalströmen überlagert, zu mancherlei Störungen Anlaß geben können. Ich will in dieser Arbeit zeigen, daß der nicht proportionale Verlauf von Fluß und Magnetisierungsstrom im gesättigten Transformator und die damit verbundene Frequenzumwandlung die Ursache der beobachteten Erscheinung sein kann.

Vorbemerkung über Fourierreihen.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (1)$$

$$\dots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t + \dots \text{in inf.}$$

ist die bekannte Entwicklung einer periodischen Funktion der Zeit $f(t)$ in eine Fourierreihe. ν ist die Frequenz, $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz der Grundwelle.

Für die folgende Rechnung ist vorteilhaft durch Benützen komplexer Größen (1) in eine gedrängte Form zu bringen. Bedeuten $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und c_n ein zu c_{-n} konjugiert komplexer Koeffizient, so ist

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (2)$$

eine mit (1) völlig identische, in der Mathematik übliche Darstellung der Funktion $f(t)$, falls die reellen Koeffizienten a_n und b_n aus den komplexen c_n vermöge folgender Gleichungen entspringen

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j(c_n - c_{-n}).$$

Man erkennt diese Identität, wenn man in (2) setzt

$$e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

und jeweilen das n^{te} Glied mit dem $-n^{\text{ten}}$ Gliede zusammenfaßt.

Der exakte Ansatz. Vorläufige Diskussion. Der Fall der Resonanz.

Ein Einphasen-Generator G sei über einen gesättigten Einphasentransformator T belastet (Bild 1). Die Streuinduktivität des Primärkreises (Generator plus Transformator) betrage S Henry, sein Widerstand R^I Ohm. Die Belastung des Sekundärkreises inkl. Sekundärstreuung des Transformators lasse sich nachahmen durch Serieschaltung einer Induktivität L Henry, einer Kapazität C Farad und eines Widerstandes R^{II} Ohm. Die Momentanwerte der Zustandsgrößen seien bezeichnet

Bild 1.

durch

e die elektromotorische Kraft des Generators in Volt,
 i^I der Primärstrom,
 i^{II} der Sekundärstrom,
 i der Magnetisierungsstrom,
 Φ der verkettete Flux des Transformators in Voltsek.

Nennen wir ferner z_1 und z_2 die Windungszahlen des Transformators, $u = \frac{z_1}{z_2}$, sein Übersetzungsverhältnis, so sind, wenn e eine bekannte Funktion der Zeit ist,

die vier unbekannten Funktionen i^I , i^{II} , i und Φ bestimmt durch die folgenden vier Gleichungen

$$e - S \frac{di^I}{dt} - i^I R^I = z_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (3a)$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t i^{II} dt + \mathfrak{L} \frac{di^{II}}{dt} + i^{II} R^{II} = -z_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (3b)$$

$$i = i^I + \frac{1}{u} i^{II} \quad (3c)$$

$$\text{Magnetisierungskurve} \quad \Phi = \Phi(i). \quad (3d)$$

Die freien Schwingungen, deren das System fähig ist, interessieren uns hier nicht. Wir fragen nach der stationären Lösung. Die Variablen sollen periodische Funktionen der Zeit sein. Wenn wir für sie, die nach (2) verständlichen Ansätze einführen

$$\begin{aligned} e &= \sum_{-\infty}^{+\infty} e_n e^{jn\omega t} & i^I &= \sum_{-\infty}^{+\infty} i_n^I e^{jn\omega t} & \Phi &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n e^{jn\omega t}, \\ i &= \sum_{-\infty}^{+\infty} i_n e^{jn\omega t} & i^{II} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} i_n^{II} e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

so zerfallen die Gleichungen (3a), (3b), (3c) wegen ihrer Linearität in unendlich viele lineare Gleichungen für die komplexen Fourierkoeffizienten. Nämlich

$$e_n - (jn\omega S + R^I) i_n^I = jn\omega z_1 \Phi_n \quad (4a)$$

$$\left(\frac{1}{jn\omega C} + jn\omega L + R^{II} \right) i_n^{II} = -jn\omega z_2 \Phi_n \quad (4b)$$

$$i_n = i_n^I + \frac{1}{u} i_n^{II}. \quad (4c)$$

Die Gleichung $\Phi = \Phi(i)$ der Magnetisierungskurve ist der Behandlung am wenigsten zugänglich. Es wird daher zweckmäßig sein, zunächst aus (4a), (4b), (4c) i_n^I und i_n^{II} zu eliminieren und aus ihnen eine Gleichung zwischen Φ_n und i_n allein zu gewinnen, die zusammen mit der Gleichung $\Phi = \Phi(i)$ die Unbekannten bestimmt.

Nennen wir

$$jn\omega S + R^I = Z_n^I, \quad u^2 \left(jn\omega \mathfrak{L} + \frac{1}{jn\omega C} + R^{II} \right) = Z_n^{II}, \quad (5a \text{ und } b)$$

die Primär- bzw. Sekundärimpedanz, so lautet die Beziehung zwischen i_n^I und i_n^{II} , die man aus (4a) und (4b) erhält durch Elimination von Φ_n

$$e_n - Z_n^I i_n^I + \frac{1}{u} Z_n^{II} i_n^{II} = 0.$$

Daraus und aus (4c), i_n^I bzw. i_n^{II} eliminiert, liefert

$$i_n^I = \frac{e_n + Z_n^{II} i_n}{Z_n^I + Z_n^{II}}, \quad \frac{1}{u} i_n^{II} = \frac{e_n - Z_n^I i_n}{Z_n^I + Z_n^{II}}. \quad (6a \text{ und } b)$$

Benützt man (6a), um in (4a) i_n^I durch i_n auszudrücken, so folgt aus (4a)

$$\Phi_n = K_n \left(\frac{e_n}{Z_n^I} - i_n \right), \quad (7)$$

wo abkürzend die

$$K_n = \frac{1}{j n \omega z_1} \frac{Z_n^I Z_n^{II}}{Z_n^I + Z_n^{II}} \quad (5c)$$

Konstanten des Systems sind.

Der weitere Weg muß nun der sein, daß aus den Gleichungen (3a) und (7) die Funktionen $\Phi(t)$ und $i(t)$ ermittelt werden. Aus $i(t)$ folgen dann vermöge der Gleichungen (6a) und (6b) i^I und i^{II} .

Bevor wir diese Aufgabe im nächsten Abschnitt durchführen — sie stellt ein mathematisches Problem für sich dar — soll zunächst die Diskussion der bis hierher gewonnenen Beziehungen vorweg genommen werden. Die Unterbrechung des mathematischen Gedankenganges rechtfertigt sich deshalb, weil aus diesen Beziehungen schon die hauptsächlichsten Eigenschaften des gesättigten Transformators zu ersehen sind.

Der nicht-lineare Verlauf der Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi(i)$ bringt es mit sich, daß einmal $\Phi(t)$ und $i(t)$ auch dann Oberwellen enthalten, wenn die Generator EMK rein sinusförmig variiert, und daß ferner die Überlagerung zweier Lösungen der Gleichungen (3d) und (7) im allgemeinen keine Lösung mehr darstellt. Das in der Theorie des ungesättigten Transformators zutreffende Superpositionsprinzip gilt hier nicht. Bei Generatoren und Transformatoren, wie sie heute gebaut werden, sind die Oberwellen der Generator EMK klein zu deren Grundwelle. Ebensoles gilt für die Oberwellen im Magnetisierungsstrom des Transformators zu den Grundwellen seiner Vollastströme. Aus den Gleichungen (6a) und (6b) folgt daher, daß man im allgemeinen recht tut, die Oberwellen in Primär- und Sekundärstrom zu vernachlässigen und nur mit deren Grundwellen zu rechnen. Doch gibt es, wie diese Gleichungen erkennen lassen, für jede Oberwelle einen ausgezeichneten Belastungsfall, den Fall der Resonanz, für den das auch nicht mehr angenähert zutrifft, vorausgesetzt, daß die Dämpfung nicht abnorm groß ist. Ist nämlich für die n^{te} Oberwelle der Nenner $Z_n^I + Z_n^{II}$ der Gleichungen (6a) und (6b) sehr klein und reduziert sich im Fall der Resonanz auf die Ohmschen Widerstände $R^I + u^2 R^{II}$, so werden auch verhältnismäßig kleine Oberwellen von e_n und i_n bedeutende Resonanzströme i_n^I und i_n^{II} in Primär- und Sekundärkreis zur Folge haben. Wir werden nicht fehlgehen, in diesen stationären Überströmen höherer Frequenz die Ursache der Störungen zu erblicken, die bei kapazitiver Belastung von Zentralen beobachtet wurden und die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben haben.

Wenn wir die Gleichungen (6a) und (6b) daraufhin genauer betrachten, so zeigen sie, daß die n^{ten} Harmonischen in den Hauptströmen sich additiv zusammensetzen aus 2 Termen, deren erster abhängt von der n^{ten} Harmonischen in der EMK des Generators, deren zweiter abhängt von der n^{ten} Harmonischen im Magnetisierungsstrom des Transformators. Insofern der Magnetisierungsstrom des Transformators via Magnetisierungskurve selber wieder eine Funktion der Generatorspannung ist — wir werden sie im nächsten Abschnitt ermitteln — wird auch der zweite Term durch die Generatorspannung beeinflusst. Wir behandeln die 2 Terme gesondert.

Die n^{te} Oberwelle der EMK e_n des Generators erzeugt in den Hauptströmen n^{te} Oberwellen

$$i_n^I = -\frac{1}{u} i_n^{II} = \frac{e_n}{Z_n^I + Z_n^{II}},$$

welche in Phasenopposition sind und sich verhalten umgekehrt wie die Windungszahlen. Im Fall der Resonanz werden diese Ströme maximal. Transformator und Netz bilden für die n^{te} Harmonische des Generators einen Kurzschlußkreis vom Widerstand $R^I + u^2 R^{II}$.

Ob die Generatoren, wie sie heute gebaut werden, Oberwellen in ihrer EMK erzeugen, die genügen, um Resonanzüberströme zu erregen, die den in Zentralen beobachteten Störungen entsprechen, bedürfte einer besondern Untersuchung über Generatoren, die nicht in den Rahmen dieser Arbeit gehört.

Größeres Interesse bieten die n^{ten} Oberwellen der Hauptströme, die ihre Ursache haben in der n^{ten} Oberwelle des Magnetisierungsstromes des Transformators. Sie betragen nach den Gleichungen (6a) und (6b)

$$i_n^I = \frac{Z_n^{II}}{Z_n^I + Z_n^{II}} i_n \quad \text{und} \quad -\frac{1}{u} i_n^{II} = \frac{Z_n^I}{Z_n^I + Z_n^{II}} i_n.$$

Der Transformator sei angeschlossen an ein größeres, leerlaufendes Verteilungsnetz. Wenn wir absehen von dem wenig interessanten Sonderfall, daß die Sekundärimpedanz Z_n^{II} sich reduziert auf den Ohmschen Widerstand $u^2 R^{II}$, so werden unter Verhältnissen, wie sie in praktischen Fällen vorliegen, die Ohmschen Widerstände in Z_n^I und Z_n^{II} und — sofern wir uns der Resonanzlage fernhalten — auch der in $Z_n^I + Z_n^{II}$ zu vernachlässigen sein. i_n^I bzw. i_n^{II} sind dann entweder in Phase oder in Phasenopposition zu i_n . Die zur Magnetisierung nötige Oberwelle i_n wird durch die Hauptströme gedeckt, ohne in diesen Oberwellen zu verursachen, die zu Störungen Anlaß geben könnten. Nähern wir uns jetzt mit der Belastung der Resonanzlage, so werden die Reaktanzen von Z_n^I und Z_n^{II} schließlich entgegengesetzt gleich, so daß bis auf die kleinen Ohmschen Widerstände gilt $Z_n^I = -Z_n^{II}$, und

$$i_n^I = \frac{Z_n^{II}}{R^I + u^2 R^{II}} i_n = -\frac{1}{u} i_n^{II}.$$

Die Hauptströme i_n^I und i_n^{II} sind daher nicht streng, aber doch mit großer Annäherung in Phasenopposition, während der Magnetisierungsstrom i_n auf ihnen senkrecht steht (Bild 2). Die beiden Hauptströme müssen daher relativ große n^{te} Oberwellen führen, um eine im Magnetisierungsstrom nötige, wenn auch relativ kleine, n^{te} Oberwelle decken zu können. — Vom gesättigten und belasteten Transformator werden wir im nächsten Abschnitt allgemein die Oberwellen im Magnetisierungsstrom berechnen und im letzten Abschnitt an Hand eines numerischen Beispiels für Resonanz der 5^{ten} Oberwelle zeigen, daß der Transformator allein genügt, um Störungen zu erzeugen, wie sie in Betrieben vorkommen. —

Bild 2.

Angenäherte Berechnung von Flux und Magnetisierungsstrom des belasteten Transformators. Die Frequenz-Umwandlung.

Wir kehren zurück und nehmen den mathematischen Gedankengang wieder auf, den wir unterbrochen haben. Es sollen für den Fall vorgegebener höherer Harmonischer e_n in der EMK des Generators aus den Gleichungen (3d) und (7) der Fluß Φ und der Magnetisierungsstrom i als Funktionen der Zeit berechnet werden.

Als erster Weg bietet sich der folgende an: man vernachlässigt die Hysterese und macht für $\Phi = \Phi(i)$ irgend einen der bekannten, oder noch unbekannten analytischen Ansätze, der eine genügende Annäherung an die Leerlaufcharakteristik des Transformators darstellt. Als einfachstes Beispiel mag gelten:

$$i = \delta_1 \Phi + \delta_3 \Phi^3$$

Führt man darin die Fourierentwicklungen von i und Φ ein und bringt die rechte Seite wieder auf die Form einer Fourierreihe, so ergibt die Methode der Koeffizientenvergleichung die Koeffizienten i_n von i als Funktion der Koeffizienten Φ_n von Φ in Gestalt von nicht linearen unendlichen Reihen. Führt man diese Reihen für die

Koeffizienten i_n in das Gleichungssystem (7) ein, so geht dieses über in ein System von unendlich vielen nicht linearen Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten Φ_n . Insbesondere die Nichtlinearität erschwert es, eine brauchbare angenäherte Lösung zu finden. Ergänzt man den Ansatz für i durch weitere Glieder $+\delta_5 \Phi^5 + \delta_7 \Phi^7 + \dots$, so wird die Rechnung umständlicher, wählt man für $i = i(\Phi)$ eine transzendente Funktion, so tritt an Stelle der ganzen rationalen Funktion eine unendliche Reihe und als weitere Schwierigkeit kommt hinzu die Frage ihrer Konvergenz. Scherbius¹⁾ hat in dieser Richtung einen Versuch gemacht.

Eine weitere Möglichkeit wäre nach dem Vorgehen von Biermanns²⁾, zunächst auf die Entwicklung in Fourierreihen zu verzichten, den analytischen Ansatz für $\Phi(i)$ in die Differentialgleichungen (3) einzusetzen und deren Integration direkt zu versuchen, wie das Biermanns für die Eigenschwingungen eines einfachen Schwingungskreises, gebildet aus einer eisengesättigten Drosselspule und einem Kondensator, durchgeführt hat. In unserem Fall handelt es sich um die durch eine Generator-EMK beliebiger Kurvenform erzwungenen Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden. Die Gleichungen werden so kompliziert, daß ich es aufgegeben habe, in dieser Richtung zu suchen. Wir schlagen einen anderen Weg ein.

Sind einerseits die Resonanzüberströme höherer Frequenz, die wir berechnen wollen, von derselben Größenordnung, aber doch kleiner als die Normalströme selbst, so werden die Oberwellen der Streuflüsse im Primärkreis klein sein im Verhältnis zum Hauptfluß des Transformators. Sind andererseits auch die Oberwellen in der EMK des Generators relativ zur Grundwelle hinreichend klein, so wird der Hauptfluß des Transformators verhältnismäßig wenig von der Sinusform abweichen. Stellen $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ eine in diesem Sinne zu der uns interessierenden Lösung e , Φ , i benachbarte Lösung der Gleichungen (3 d) und (7) dar, deren Fluß $\Phi^{(0)}$ aber rein periodisch variiert, so geht die Annahme, die wir jetzt machen wollen, dahin, daß in

$$\left. \begin{aligned} e &= e^{(0)} + \Delta e \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \Delta \Phi \\ i &= i^{(0)} + \Delta i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

die Momentanwerte der Differenzlösung Δe , $\Delta \Phi$, Δi kleine Größen seien gegenüber den Amplituden der Grundwellen von e , Φ , i .

Wegen der Linearität der Gleichung (7) genügt ihr auch die Differenzlösung

$$\Delta \Phi_n = K_n \left(\frac{\Delta e_n}{Z_n^i} - \Delta i_n \right). \quad (9)$$

Für die nicht lineare Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi(i)$ trifft ähnliches nicht zu.

Dagegen sind wir imstande, aus ihr eine weitere Beziehung zwischen $\Delta \Phi$ und Δi zu gewinnen für den Fall, daß wir diese Größen in erster Annäherung als unendlich klein ansehen. Nämlich:

$$\Delta \Phi = \frac{d\Phi}{di} \Delta i. \quad (10)$$

$\frac{d\Phi}{di}$, die Ableitung der Magnetisierungskurve, ist mit dieser gegeben und, wenn wir etwa auf graphischem Wege die Lösung $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ ermittelt denken, so kennen wir $\frac{d\Phi}{di}$ auch als Funktion der Zeit. In Bild 3 sind zusammengehörnde Oszillogramme von $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$, $\frac{d\Phi}{di}$ dargestellt, wie sie folgen aus der Hysteresisschleife Bild 4.

Die dazugehörige EMK $e^{(0)}$ müßte nach Gleichung (7) so gewählt werden, daß $\Phi^{(0)}$

¹⁾ Scherbius, Die magnetische Induktion in geschlossenen Spulen. München und Berlin, Oldenburg 1919.

²⁾ Biermanns, Archiv für Elektrotechnik. Bd. III (1915), S. 345.

wie verlangt rein periodisch variiert. Sind also $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ und damit $\frac{d\Phi}{di}$ bekannt, so wird es möglich, vermöge der Gleichungen (9) und (10) $\Delta\Phi$ und Δi und damit die gesuchte Lösung e , Φ , i zu berechnen.

Bevor wir die Rechnung durchführen, wollen wir noch einmal und diesmal zusammenhängend die Folge von Operationen durchgehen, die bei gegebener EMK e des Generators zur Bestimmung von Fluß Φ und Magnetisierungsstrom i des Transformators nötig sind.

Es wird zunächst nach der elementaren Theorie des Transformators die zum Effektivwert von e gehörende Amplitude des Flusses Φ angenähert gerechnet. Variiert Φ mit dieser Amplitude rein periodisch, — es sei dies der Fluß $\Phi^{(0)}$ — so folgen aus der empirisch gegebenen Hysteresisschleife graphisch die Oszillogramme von $i^{(0)}$ und

Bild 3.

Bild 4.

$\frac{d\Phi}{di}$. Führt man $\Phi^{(0)}$ und $i^{(0)}$ in Gleichung (7) ein, so folgt aus ihr exakt die EMK $e^{(0)}$ des Generators, die er zu reinperiodischer Variation des Transformatorflusses haben müßte. Diese Grundlösung $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ ist es, die wir zur wirklichen Lösung als unendlich benachbart annehmen. Aus der tatsächlich wirkenden EMK des Generators folgt die Differenz $\Delta e = e - e^{(0)}$ und aus ihr sind vermöge (9) und (10) $\Delta\Phi$ und Δi zu berechnen, wie wir jetzt noch zu zeigen haben, und damit sind auch Φ und i und schließlich auch i^I und i^{II} bestimmt.

Das aus der empirisch vorliegenden Hysteresisschleife ermittelte Oszillogramm von $\frac{d\Phi}{di}$ werde harmonisch analysiert und führe auf die Fourierentwicklung

$$\frac{d\Phi}{di} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r e^{jr\omega t} \quad (II a)$$

Wegen der Punktsymmetrie der Hysteresisschleife zum Ursprung enthält sie nur gerade Glieder.

Machen wir ferner für $\Delta\Phi$ und Δi die Ansätze

$$\Delta\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\Phi_n e^{jn\omega t}, \quad \Delta i = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta i_s e^{js\omega t} \quad (II b \text{ und } c)$$

so folgt aus (10)

$$\Delta\Phi = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} A_r \Delta i_s e^{j(r+s)\omega t}$$

oder setzt man $r + s = n$, so wird

$$\Delta \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega t} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s.$$

Daraus durch Koeffizientenvergleichung mit (11b)

$$\Delta \Phi_n = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s \quad (12)$$

Führt man diesen Ausdruck für $\Delta \Phi_n$ in (9) ein, so resultiert für die unendlich vielen Unbekannten Δi_s das folgende System unendlich vieler linearer Gleichungen:

$$K_n \Delta i_n + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s = \frac{K_n}{Z_n^I} \Delta e_n. \quad (13)$$

Wegen der Punktsymmetrie der Hysteresisschleife enthalten $i^{(o)}$ und also auch $e^{(o)}$ nur ungerade Glieder. Liefert auch der Generator nur ungerade Harmonische e , so sind nur ungerade Δe_n von Null verschieden. Andererseits, da alle ungeraden Δ_{n-s} verschwinden, enthält die linke Seite jeder Gleichung des Systems (13) entweder nur gerade, oder nur ungerade Glieder. (13) zerfällt daher in 2 Gleichungssysteme, und zwar in ein inhomogenes für die ungeraden Δi_s und in ein homogenes für die geraden Δi_s .

Wegen der Willkürlichkeit der Koeffizienten Δ verlangt das homogene, daß alle geraden Harmonischen Δi_s verschwinden müssen. Über die Lösung des inhomogenen Systems von Gleichungen kann man allgemein aussagen, daß jedes Δi_n eine lineare homogene Funktion aller Δe_s sein muß.

$$\Delta i_n = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{ns} \frac{K_s}{Z_s^I} \Delta e_s.$$

Also: Irgend eine Harmonische des Magnetisierungsstromes wird von allen Harmonischen der Generator EMK beeinflusst. Die Konstanten A_{ns} hängen ab von K_n und $\Delta_n^{(1)}$.

Wir machen hier eine weitere vereinfachende Annahme: Es soll die Fourierentwicklung für $\frac{d\Phi}{di}$ mit dem zweiten Gliede abbrechen.

$$\frac{d\Phi}{di} = \Delta_0 + (\Delta_2 + \Delta_{-2}) \cos 2\omega t + j(\Delta_2 - \Delta_{-2}) \sin 2\omega t.$$

Orientieren wir den Nullpunkt der Zeitachse derart, daß der reinperiodische Fluß $\Phi^{(o)}$ durch eine Sinusfunktion dargestellt wird, $\Phi^{(o)} = \Phi_m \sin \omega t$, so ist $\Delta_2 - \Delta_{-2}$ ein Maß der Hysterese. Dabei beträgt der Maximalwert Φ_m des Flusses $\Phi^{(o)}$, wenn wir ihn ausdrücken durch die Koeffizienten seiner Fourierentwicklung, gleich $-2j\Phi_1^{(o)}$. Um die folgenden Rechnungen nicht unnötig zu belasten, nehmen wir weiter an, das Eisen zeige keine Hysterese, es sei $\Delta_2 = \Delta_{-2} = \text{reell}$. Durch diese Annahme entgeht uns nichts Wesentliches. Der im folgenden eingeschlagene Weg zur Lösung des vereinfachten Gleichungssystems bleibt übrigens ohne weitere Schwierigkeiten, allein mit einem etwas größeren Aufwand an Symbolen, auch ohne diese Annahme gangbar.

¹⁾ Sie sind die normierten Unterdeterminanten der unendlichen Determinante des in homogenen Gleichungssystems (13). Die Aufgabe wäre, diese normierten Unterdeterminanten allgemein zu berechnen. Vielleicht schöpft ein Mathematiker aus der elektrotechnischen Bedeutung des Problems die Anregung, seine allgemeine Lösung zu versuchen.

Wir machen also endgültig den Ansatz

$$\frac{d\Phi}{di} = A_0 + 2 A_2 \cos(2 \omega t).$$

Wir sind so zu einer bestimmten vereinfachenden Annahme über den Charakter der Magnetisierungskurve geführt worden, und wir wollen noch untersuchen, durch was für eine analytische Funktion sie jetzt dargestellt wird. Berücksichtigen wir, daß $\Phi^{(0)} = \Phi_m \sin \omega t$, also $\cos(2 \omega t) = 1 - 2 \left(\frac{\Phi^{(0)}}{\Phi_m} \right)^2$ sind und setzen wir $\frac{\Phi^{(0)}}{\Phi_m} = u$, so wird

$$i = \Phi_m \int_0^u \frac{du}{A_0 + 2 A_2 - 4 A_2 u^2}. \quad \text{Daraus nach Integration}$$

$$\Phi^{(0)} = \Phi_m \sqrt{\frac{A_0 + 2 A_2}{4 A_2}} \cdot \operatorname{tg} \left\{ \frac{i}{\Phi_m} \sqrt{4 A_2 (A_0 + 2 A_2)} \right\}, \quad (15)$$

also der Tangenshyperbolicus, wie er für verschiedene Abszissenmaßstäbe im Bild 5 dargestellt ist. Die Leerlaufcharakteristik eines Transformators gibt er insofern unvollkommen wieder als der lineare Anstieg des Flusses nach erreichter Sättigung gar nicht zum Ausdruck kommt. Mit dem Ansatz (14) nimmt das Gleichungssystem (13) die Gestalt an

$$A_{-2} \mathcal{A} i_{n+2} + (A_0 + K_n) \mathcal{A} i_n + A_2 \mathcal{A} i_{n-2} = \frac{K_n}{Z_n^I} \mathcal{A} e_n,$$

oder indem wir setzen

$$C_n = \frac{A_0 + K_n}{A_2} \quad (16)$$

$$\mathcal{A} i_{n+2} + C_n \mathcal{A} i_n + \mathcal{A} i_{n-2} = \frac{K_n}{A_2 Z_n^I} \mathcal{A} e_n, \quad (17)$$

wo n alle ungeraden Werte durchläuft von $-\infty$ bis $+\infty$.

Wie bei einem System endlich vieler linearer, inhomogener Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten, bestimmt sich auch hier jede Unbekannte $\mathcal{A} i_n$ als Quotient zweier Determinanten. Hier sind es aber Determinanten mit unendlich vielen Gliedern, und zwar steht im Nenner die eigentliche Determinante D des Systems

$$D = \left| \begin{array}{cccccc} \text{in inf.} & C_{n-4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & C_{n-2} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & C_n & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & C_{n+2} & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{n+4} \\ & & & & & \text{in inf.} \end{array} \right|$$

Als Zähler aber steht eine Determinante, die man aus D erhält, wenn man die Glieder der n^{ten} Kolonne ersetzt durch die absoluten Terme des Gleichungssystems. Entwickelt man den Zähler nach Unterdeterminanten der Glieder dieser n^{ten} Kolonne und heißt D_{sn} die Unterdeterminante von D des $(s, n)^{\text{ten}}$ Gliedes, so schreibt sich

$$\mathcal{A} i_n = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{D_{sn}}{D} \frac{K_s}{A_2 Z_s^I} \mathcal{A} e_s. \quad (18)$$

$\frac{D_{sn}}{D}$ heißt die normierte Unterdeterminante von D bezüglich deren $(s, n)^{\text{ten}}$ Gliedes.

Bild 5.

Aus formalen Gründen schreiben wir in D $C_n = C_i$, wo $n = 2i + 1$ ist, sodaß i alle ganzzahligen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, wenn n alle ungeraden durchläuft. Es ist dann:

$$D = \begin{vmatrix} \text{in inf.} & C_{i-2} I & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ & I & C_{i-1} I & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ & 0 & I & C_i I & 0 & . & . & . & . & . & . \\ & 0 & 0 & I & C_{i+1} I & . & . & . & . & . & . \\ & 0 & 0 & 0 & I & C_{i+2} & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & C_{k-2} I & 0 & 0 & 0 & . \\ & . & . & . & . & . & I & C_{k-1} I & 0 & 0 & . \\ & . & . & . & . & . & 0 & I & C_k I & 0 & . \\ & . & . & . & . & . & 0 & 0 & I & C_{k+1} I & . \\ & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & I & C_{k+2} \text{ in inf.} \end{vmatrix}$$

Von den 2 Indizes i und k , die wir zur Bezeichnung eines beliebigen Gliedes benötigen, sei stets $i \leq k$, so daß (i, k) ein Glied über der Hauptdiagonale, (k, i) das zu ihm symmetrische unter der Hauptdiagonale bedeuten. Zu berechnen haben wir die normierten Unterdeterminanten $\frac{D_{ik}}{D}$ bzw. $\frac{D_{ki}}{D}$.

D_i^- und D_k^+ sollen die folgenden nur einseitig ins Unendliche sich erstreckenden Determinanten bezeichnen

$$D_i^- = \begin{vmatrix} \text{in inf.} & C_{i-2} I & 0 \\ & I & C_{i-1} I \\ & 0 & I & C_i \end{vmatrix} \quad D_k^+ = \begin{vmatrix} C_k & I & 0 & 0 & . & . & . \\ I & C_{k+1} I & 0 & . & . & . & . \\ 0 & I & C_{k+2} & 0 & \text{in inf.} \end{vmatrix}$$

Man nennt sie aus Gründen, die bald offenbar werden, Kettenbruchdeterminanten. Eine Determinante, in der die Glieder eines die Hauptdiagonale mit einer Ecke berührenden Eckfeldes verschwinden, zerfällt stets in das Produkt zweier Teildeterminanten nach folgendem Schema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1r} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2r} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & . & . & . & a_{rr} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & . & . & . & c_{1r} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & . & b_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & . & . & . & c_{2r} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2s} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{s1} & c_{s2} & c_{s3} & . & . & . & c_{sr} & b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & . & . & . & b_{ss} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1r} \\ a_{r1} & . & . & . & . & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & . & . & b_{1s} \\ b_{s1} & . & . & . & . & b_{ss} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminanten von D sind alle von dieser Art und man erhält für sie

$$D_{ik} = D_{ki} = D_i^- \cdot D_{k+1}^+ \quad \text{für } i < k.$$

Insbesondere

$$D_{ii} = D_i^- \cdot D_{i+1}^+ \quad \text{für } i = k.$$

Entwickelt man D selbst einmal nach der i^{ten} , dann nach der k^{ten} Zeile in Unterdeterminanten, so erhält man folgende zwei Darstellungen:

$$D = C_i D_{i-1}^- D_{i+1}^+ - D_{i-1}^- D_{i+2}^+ - D_{i-2}^- D_{i+1}^+$$

$$D = C_k D_{k-1}^- D_{k+1}^+ - D_{k-1}^- D_{k+2}^+ - D_{k-2}^- D_{k+1}^+.$$

Nennt man die Verhältnisse zweier aufeinander folgender Kettenbruchdeterminanten

$$\alpha_k = \frac{D_{k+1}^+}{D_k^+} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{D_i^-}{D_{i-1}^-},$$

so resultiert für die normierte Unterdeterminante von D

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_{ik}}{D} = \frac{D_{ki}}{D} = \frac{\alpha_{i+1} \cdot \alpha_{i+2} \cdots \alpha_k}{C_i - \alpha_{i+1} - \beta_{i-1}} = \frac{\beta_{k-1} \cdot \beta_{k-2} \cdots \beta_i}{C_k - \alpha_{k+1} - \beta_{k-1}} & \text{für } i < k \\ \frac{D_{ii}}{D} = \frac{1}{C_i - \alpha_{i+1} - \beta_{i-1}} & \text{für } i = k \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die Verhältnisse α_n und β_i zu berechnen.

Entwickelt man D_i bzw. D_k nach Unterdeterminanten ihrer ersten Zeile, so erhält man zwischen 3 aufeinander folgenden Kettenbruchdeterminanten folgende lineare Beziehungen:

$$D_k^+ = C_k D_{k+1}^+ - D_{k+2}^+; \quad D_i^- = C_i D_{i-1}^- - D_{i-2}^- \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{\alpha_k} = C_k - \alpha_{k+1}; \quad \frac{1}{\beta_i} = C_i - \beta_{i-1}.$$

Aus ihnen folgen α_k und β_i in Form unendlicher Kettenbrüche

$$\alpha_k = \frac{1}{C_k} - \frac{1}{C_{k+1} - \frac{1}{C_{k+2} - \frac{1}{C_{k+3} \cdots \text{in. inf.}}}} \quad \beta_i = \frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1} - \frac{1}{C_{i-2} - \frac{1}{C_{i-3} \cdots \text{in. inf.}}}} \quad (20)$$

Es bleibt uns deren Konvergenz zu diskutieren. Wenn wir über die Formeln (16) und (5c) zurückgreifen auf die Bedeutung von C_i , so erkennen wir, daß

$$\lim_{i=\pm\infty} C_i = C_\infty = \frac{1}{\mathcal{A}_2} \left[\mathcal{A}_0 + \frac{n^2 S L}{S + n^2 L} \right]. \quad (22)$$

Die Kettenbrüche α_k und β_i sind limitärperiodisch. Nach Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen¹⁾, Seite 285, Satz 41, nähern sie sich für große Werte von i bzw. k der gemeinsamen Grenze

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = \lim_{i=-\infty} \beta_i = \alpha_\infty = \beta_{-\infty} = \frac{1}{C_\infty} - \frac{1}{C_\infty - \frac{1}{C_\infty \text{ in. inf.}}}$$

Nach eben diesem Satze bestimmt sich der reziproke Grenzwert $\frac{1}{\alpha_\infty}$ als die größere Wurzel der quadratischen Gleichung

$$X^2 - C_\infty X + 1 = 0,$$

doch unter der Bedingung, daß die absoluten Beträge der zwei Wurzeln verschieden seien, was hier der Fall ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_\infty} &= \frac{C_\infty}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_\infty}{2}\right)^2 - 1} & \text{oder} \\ \alpha_\infty = \beta_{-\infty} &= \frac{C_\infty}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_\infty}{2}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

¹⁾ Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner 1913. Dem Mathematiker Herrn Professor Polza in Zürich danke ich für diesen Literaturnachweis und die Ratschläge, die er mir erteilt hat.

Aus (22) erkennt man, da $2 \mathcal{A}_2 < \mathcal{A}_0$ sein muß, daß C_∞ immer größer als 2 ist und in der Grenze $\mathcal{A}_2 = 0$ der Grenze ∞ zustrebt. $\frac{1}{\alpha_\infty}$ ist daher immer größer als 1 und nähert sich mit C_∞ der Grenze ∞ . $\alpha_\infty = \beta_\infty$ ist folglich eine positive Zahl kleiner als 1, die für $\mathcal{A}_2 = 0$, d. h. für eine Magnetisierungskurve, die sich der Geraden nähert, den Wert null annimmt. Damit folgen aus den Rekursionsformeln (20) α_k und β_i mit beliebiger Genauigkeit.

Führen wir die hiemit berechneten normierten Unterdeterminanten (19) in (18) ein und kehren zu Indizes zurück, die wieder nur ungerade Werte annehmen, so resultiert endgültig für die Änderungen des Magnetisierungsstromes:

$$\mathcal{A}i_n = \frac{1}{\mathcal{A}_2 (C_n - \alpha_{n+2} - \beta_{n-2})} \left[\sum_{s=-\infty}^{n-2} \mathcal{A}e_s \frac{K_s}{Z_s^1} \prod_{r=s}^{n-2} \beta_r + \frac{K_n}{Z_n^1} \mathcal{A}e_n + \sum_{s=n+2}^{+\infty} \mathcal{A}e_s \frac{K_s}{Z_s^1} \prod_{r=n+2}^s \alpha_r \right] \quad (24)$$

Der Index n und die Indizes s und r der Summen Σ wie der Produkte Π durchlaufen dabei nur ungerade Werte. $\mathcal{A}i_n$ ist also eine lineare homogene Funktion aller $\mathcal{A}e$. Da $\frac{K_s}{Z_s^1}$ für große positive wie negative Werte von s sich der Grenze null nähert und auch die Kettenbrüche α_r und β_r von einem genügend großen r an dem Grenzwert $\alpha_\infty = \beta_\infty < 1$ zustreben, so werden von einem bestimmten s an die höheren Harmonischen von $\mathcal{A}e$ auf die bestimmte Oberwelle $\mathcal{A}i_n$ einen um so geringeren Einfluß ausüben, eine je höhere Frequenz sie haben. Machen wir den Grenzübergang zum geradlinigen Verlauf der Magnetisierungskurve, so sind $\mathcal{A}_2 = 0$; $\mathcal{A}_2 C_n = \mathcal{A}_0 + K_n$ und alle $C_n = \infty$. Sämtliche Kettenbrüche α und β verschwinden und (24) reduziert sich auf

$$\mathcal{A}i_n = \frac{K_n}{(\mathcal{A}_0 + K_n) Z_n^1} \cdot \mathcal{A}e_n$$

in Übereinstimmung mit dem, was man direkt aus Gleichung (17) erhält.

Beispiel.

Ein Einphasen-Generator von 6000 kVA und 10000 Volt arbeite über einen Einphasentransformator auf eine 100000 Volt-Leitung. Betragen bei Normallast die Jouleschen Verluste des Primärkreises 1% der kVA-Zahl, der induktive Spannungsabfall des Generators 12%, der der Primärwicklung des Transformators 5% der Unterspannung, so werden

$$R^I = 0,15 \text{ Ohm}; \quad S = 0,009 \text{ Henry.}$$

Die Streuspannung der Sekundärwicklung betrage 5% der Oberspannung entsprechend einer Induktivität von 0,27 Henry. Die einphasige Freileitung sei mit einem Kabelradius von 0,7 cm, einem Querschnitt von 120 mm², einem Leiterabstand von 400 cm und einer Länge von 72 km so bemessen, daß bei leerlaufender Leitung für die 5te Oberwelle Resonanz besteht. Unter diesen Annahmen sind

$$L = 0,37 \text{ Henry}, \quad C = 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ Farad}, \quad R^{II} = 10 \text{ Ohm.}$$

Zur weiteren Rechnung benötigen wir einige Daten des Transformators. Seine Windungszahlen $z_1 = 300$, $z_2 = 3000$ entsprechen einem Maximalwert des verketteten Flusses von $\Phi_m = -j 2 \Phi_1^{(0)} = 0,15 \text{ Voltsec}$. Die Magnetisierungskurve sei dargestellt durch die Gleichung

$$\Phi = 0,152 \text{ Tg } \frac{5i}{100},$$

die stark ausgezogene Kurve des Bildes 5.

Es sind also nach (15)

$$\mathcal{A}_0 = 3,90 \cdot 10^{-3} \text{ Voltsec/Amp.}$$

$$2 \mathcal{A}_2 = 3,70 \cdot 10^{-3} \quad , , \quad , ,$$

Die Impedanzen Z_n^I , Z_n^{II} und Größen K_n und C_n werden nach den Formeln (5 a, b, c) und (16) berechnet zu

n	Z_n^I	Z_n^{II}	$K_n \cdot 10^5$	$C_n \cdot 10^5$
1	$0,15 + j \ 2,83$	$0,10 - j \ 98,12$	$3,12 - j \ 0,17$	$2,12 + \sim 0$
3	$0,15 + j \ 8,49$	$0,10 - j \ 27,68$	$4,82 - j \ 0,11$	$2,13 + \sim 0$
5	$0,15 + j \ 14,13$	$0,10 - j \ 14,08$	$(0 - j \cdot 0,17) \cdot 10^3$	$2,11 - j \ 0,92$
7	$0,15 + j \ 19,78$	$0,10 - j \ 6,07$	$1,33 + \sim j \cdot 0$	$2,10 + \sim 0$
9	$0,15 + j \ 25,45$	$0,10 - j \ 0,59$	$0,06 + \sim 0$	$2,11 + \sim 0$
11	$0,15 + j \ 31,10$	$0,10 + j \ 3,73$	$0,33 + \sim 0$	$2,11 + \sim 0$
∞	$0,15 + j \ \infty$	$0,10 + j \ \infty$	$0,87 + \sim 0$	$2,11 + \sim 0$

Für die Lösung $\Phi^{(0)}$, $e^{(0)}$, $i^{(0)}$ zu der wir die wirkliche als unendlich benachbart betrachten, variiert der Fluß $\Phi^{(0)}$ mit der Amplitude $\Phi_m = 0,15$ Voltsec rein periodisch. Die harmonische Analyse¹⁾ des Magnetisierungsstromes ergibt für ihn die folgenden Fourierkoeffizienten

$$i_1^{(0)} = j \ 40,9 \text{ Amp.}$$

$$i_3^{(0)} = -j \ 9,9 \quad , ,$$

$$i_5^{(0)} = j \ 4,1 \quad , ,$$

$$i_7^{(0)} = -j \ 2,2 \quad , ,$$

$$i_9^{(0)} = j \ 1,0 \quad , ,$$

$$i_{11}^{(0)} = -j \ 0,4 \quad , ,$$

Die zu diesem Verlauf von Φ und i nötige EMK des Generators folgt aus Gleichung (7)

$$e_1^{(0)} = -6930 - j \ 5 \text{ Volt}$$

$$e_3^{(0)} = 84 - j \ 1,5 \quad , ,$$

$$e_5^{(0)} = -58 + j \ 0,6 \quad , ,$$

$$e_7^{(0)} = 43,5 - j \ 0,3 \quad , ,$$

$$e_9^{(0)} = -25,5 + j \ 0,1 \quad , ,$$

$$e_{11}^{(0)} = 12,5 \quad , ,$$

Allein die 5^{te} Harmonische, für die Resonanz besteht, wird in Primär- und Sekundärstrom von Bedeutung werden. Wir beschränken uns deshalb darauf, nur die 5^{te} Harmonische des Differenzstromes $\mathcal{A}i$ zu berechnen. Berücksichtigen wir noch die 11^{ten} Fourierglieder von $\mathcal{A}e$ und nehmen an, ohne an Allgemeinheit einzubüßen, daß $\mathcal{A}e_1$ und $\mathcal{A}e_{-1}$ null seien, so ist nach (24)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}i_5 = \frac{1}{\mathcal{A}_2 (C_5 - \alpha_7 - \beta_3)} & \left[K_{-11} \beta_3 \beta_1 \dots \beta_{-9} \beta_{-11} \frac{\mathcal{A}e_{-11}}{Z_{-11}^I} + \right. \\ & + K_{-9} \beta_3 \beta_1 \dots \beta_{-9} \frac{\mathcal{A}e_{-9}}{Z_{-9}^I} + \\ & + K_{-3} \beta_3 \beta_1 \beta_{-1} \beta_{-3} \frac{\mathcal{A}e_{-3}}{Z_{-3}^I} \\ & + K_3 \beta_3 \frac{\mathcal{A}e_3}{Z_3^I} \\ & + K_5 \frac{\mathcal{A}e_5}{Z_5^I} \\ & \left. + K_7 \alpha_7 \frac{\mathcal{A}e_7}{Z_7^I} \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Demnächst werde ich über ein rechnerisches Verfahren zur harmonischen Analyse empirisch gegebene Funktionen berichten, das bei kleinem Zeitaufwand eine wesentliche Verschärfung der Methode von Runge, (siehe Hütte, Ing.-Taschenbuch Bd. I, Seite 131) darstellt.

$$+ K_9 \alpha_7 \alpha_9 \frac{\Delta e_9}{Z_1^I} \\ + K_{11} \alpha_7 \alpha_9 \alpha_{11} \frac{\Delta e_{11}}{Z_{11}^I} \Big].$$

Es genügt also die Kettenbrüche α_7 bis α_{11} und β_3 bis β_{-11} nach (20) und (23) zu berechnen.

Sehr angenähert sind:

$$\alpha_7 \text{ bis } \alpha_\infty = \beta_{-7} \text{ bis } \beta_{-\infty} = 0,73 \\ \beta_{-5} = 0,26 - j 0,17 \\ \beta_{-3} = 0,53 - j 0,05 \\ \beta_{-1} = 0,63 - j 0,02 \\ \beta_{+1} = 0,67 - j 0,01 \\ \beta_{+3} = 0,69$$

und

$$\Delta i_5 = \left(0,97 + j 1,23\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_3}{Z_3^I} + \left(0,22 + j 0,26\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_{-3}}{Z_{-3}^I} \\ + \left(0,64 - j 0,48\right) \frac{\Delta e_5}{Z_5^I} + \left(-0,24 + j 0,21\right) \frac{\Delta e_{-5}}{Z_{-5}^I} \\ - \left(0,27 + j 0,37\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_7}{Z_7^I} - \left(0,13 + j 0,13\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_{-7}}{Z_{-7}^I} \\ - \left(0,91 + j 1,22\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_9}{Z_9^I} - \left(0,32 + j 0,44\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{-9}}{Z_{-9}^I} \\ + \left(3,6 + j 4,8\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{11}}{Z_{11}^I} + \left(1,51 + j 1,77\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{-11}}{Z_{-11}^I}.$$

Der Einfluß der 3^{ten}, der 7^{ten}, der 9^{ten} etc. Oberwelle von Δe tritt gegenüber dem Einfluß der 5^{ten} zurück. Wir erkennen, solange die Δe klein sind, können in der Tat mit genügender Annäherung die Δi gegenüber der Grundwelle von i als unendlich kleine Größen betrachtet werden, was diese unserer Berechnung zugrunde liegende Annahme bestätigt.

Erzeugt der Generator eine rein sinusförmige EMK, so haben wir für die Δe die entgegengesetzten Spannungsabfälle $-e^{(o)}$ des Magnetisierungsstromes $i^{(o)}$ einzusetzen, also bei alleiniger Berücksichtigung der Glieder 5 facher Frequenz

$$\Delta e_5 = -e_5^{(o)} = -i_5^{(o)} Z_5^I, \quad \Delta e_{-5} = -e_{-5}^{(o)} = -i_{-5}^{(o)} Z_{-5}^I.$$

Es wird dann

$$\Delta i_5 = -(7,8 + j 3,6) \quad \text{und} \quad i_5 = i_5^{(o)} + \Delta i_5 = -2,8 + j 0,5.$$

Aus den Gleichungen (6a) und (b) folgen damit die auf die Sättigung des Eisens zurückzuführenden primären und sekundären Resonanzüberströme 5 facher Frequenz zu

$$i_5^I = -10 j i_5^{II} = -(28 + j 158).$$

Also Ströme, deren Amplituden ungefähr 35% der Amplituden der Grundwelle betragen. i_5^{II} erzeugt an der Kapazität eine Spannung der halben Amplitude $\frac{i_5^{II}}{j 5 \omega C}$ Volt, also eine Überspannung an der Freileitung von ca. 45%.

Diese Werte sind quantitativ nicht allzu streng zu nehmen. Sie hängen wesentlich ab von den Koeffizienten von Δe_5 und Δe_{-5} im Ausdruck für Δi_5 . Diese Koeffizienten, die die Rückwirkung der 5^{ten} Oberwelle im Fluß auf die 5^{te} Oberwelle im Magnetisierungsstrom bestimmen, ändern sich stark mit dem Charakter der Magnetisierungskurve. Bei der speziellen Annahme, die wir für diese gemacht haben, bietet es wenig Interesse, die Abhängigkeit dieser Rückwirkungsfaktoren von Sättigung und Belastung genauer zu untersuchen. Ferner haben wir die Dämpfung durch die Ableitung der Freileitung nicht berücksichtigt und sind die Untersuchung schuldig geblieben, ob die Ankerreaktion der Resonanzströme in dem Generator EMK nicht eine fünfte Harmonische erzeugt, die die berechneten Werte weiter herabsetzt.