Über das Ziehen des Zwischenkreisröhrensenders bei kapazitiver Kopplung.

Von

Walter Grösser.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Die bekannten Erscheinungen des Ziehens von Zwischenkreisröhrensendern stehen heute für die Praxis der drahtlosen Telegraphie im Vordergrund des Interesses. Für den Konstrukteur von Röhrensendern ist es eine der wichtigsten Aufgaben, Mittel und Wege zur Beseitigung des höchst lästigen Ziehens zu finden. Dazu benötigt er eine übersichtliche Theorie, die ihm die Abhängigkeit der Erscheinungen von den jeweiligen Bedingungen klar vor Augen führt und die ihm alle gewünschten quantitativen Aufschlüsse zu liefern vermag.

Für induktiv gekoppelte Schwingungskreise hat die Theorie des Ziehens ihre bisher wohl einfachste und am leichtesten zu durchschauende Gestalt gewonnen durch eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Prof. Rogowski¹⁾. Ihr liegen die Ergebnisse einer früheren Abhandlung über die Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise²⁾ zugrunde. Für den Konstrukteur von Zwischenkreisröhrensendern kommt es darauf an, die best möglichen Bedingungen herauszufinden, unter denen er das Ziehen vermeiden kann. Dazu ist u. a. notwendig, nicht nur induktive Kopplung, sondern auch andere Kopplungsarten beider Schwingungskreise in den Bereich der Betrachtung hineinzuziehen. In vorliegender Arbeit soll darum — auf Veranlassung von Herrn Prof. Rogowski — das Ziehen von Zwischenkreisröhrensendern bei rein kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis rechnerisch untersucht werden, und zwar nach einer der Rogowskischen vollständig entsprechenden Methode. Auch hier müssen die Ergebnisse einer früheren Arbeit³⁾ über die Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise als bekannt vorausgesetzt werden.

Es wird sich zeigen, daß auch bei kapazitiver Kopplung Zieherscheinungen auftreten. Die Stellen, an denen die Frequenzsprünge stattfinden bzw. diejenigen, an denen ein Aussetzen der Schwingungen erfolgt, werden sich formelmäßig leicht bestimmen lassen. Wenn sich auch im allgemeinen die Erscheinungen bei kapazitiver und induktiver Kopplung als ziemlich analog erweisen werden, so werden doch immerhin einige nicht unbeträchtliche Unterschiede zutage treten.

I. Berechnung der Zusatzdämpfungen.

Wir legen unseren Rechnungen zwei kapazitiv gekoppelte Schwingungskreise allgemeiner Art zugrunde. Diese bestehen aus einem System von beliebig gestalteten und angeordneten Leitern, von denen zwei mal zwei durch eine Selbstinduktion L und einen Widerstand R miteinander verbunden sind. Die Enden der Selbstinduktion L_1 (einschließlich des Widerstandes R_1) des Primärkreises legen wir auf bekannte Weise an die Elektronenröhre an und koppeln das Gitter der Röhre induktiv mit dem Primärkreise. (Bild 1).

Mit $\left\{ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \right\}$ bezeichnen wir — wie früher — die Potentialdifferenz, die, bei geöffneten Schwingungskreisen, zwischen den beiden Leitern des $\left\{ \begin{matrix} \text{Primär-} \\ \text{Sekundär-} \end{matrix} \right\}$ kreises

¹⁾ W. Rogowski, Arch. f. Elektr. X, S. 1—14.

²⁾ Derselbe, Arch. f. Elektr. IX, S. 427—438.

³⁾ Grösser, Arch. f. Elektrotechnik X, S. 257—276.

entstehen, wenn sie selbst mit den Elektrizitätsmengen $+1$ und -1 geladen werden. P sei dagegen diejenige Potentialdifferenz, die zwischen den Leitern des einen Kreises entsteht, wenn die des andern mit den Elektrizitätsmengen $+1$ und -1 geladen werden. Als Beispiel diene die spezielle Schaltung des Bildes 2. Hier haben P_1 , P_2 und P die Werte

$$P_1 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}, \quad P_2 = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \quad \text{und} \quad P = \frac{1}{C}. \quad (1)$$

Mit den in Bild 1 und 2 eingetragenen Bezeichnungen gelten die folgenden, den bekannten Vallaurischen Ansatz enthaltenden Beziehungen:

$$i_a = i_1 - i = S e_g + \frac{1}{R_i} e_a \quad (2)$$

$$e_g = M g \frac{di_1}{dt} \quad (3)$$

$$e_a = -i_1 R_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (4)$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + P_1 \int i \, dt + P \int i_2 \, dt = 0 \quad (5)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + P_2 \int i_2 \, dt + P \int i \, dt = 0. \quad (6)$$

Bild 1. Allgemeines Schema eines Zwischenkreisröhrensenders mit kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis.

Bild 2. Zwischenkreisröhrensender mit kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis.

Dabei bedeuten S und R_i die Steilheit und den inneren Widerstand der Röhre, Mg den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zwischen Primärkreis und Gitterspule. Aus (2), (3) und (4) folgt

$$i = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_i} \right) + \frac{di_1}{dt} \left[\frac{L_1}{R_i} - S M g \right]. \quad (7)$$

Einmalige Differentiation von (5) und (6) nach t und Elimination von i mittels (7) ergibt die beiden Differentialgleichungen für i_1 und i_2 :

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left\{ R_1 - P_1 \left[S M g - \frac{L_1}{R_i} \right] \right\} \frac{di_1}{dt} + P_1 \left[1 + \frac{R_1}{R_i} \right] i_1 + P i_2 = 0, \quad (8)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + P_2 i_2 - P \left[S M g - \frac{L_1}{R_i} \right] \frac{di_1}{dt} + P \left[1 + \frac{R_1}{R_i} \right] i_1 = 0. \quad (9)$$

$\frac{R_1}{R_i}$ ist unter den tatsächlich in der Praxis vorhandenen Umständen immer so klein gegen 1 , daß wir es unbedenklich vernachlässigen können. Unsere Differentialgleichungen erhalten dadurch die einfachere Gestalt:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left\{ R_1 - P_1 \left[S M g - \frac{L_1}{R_i} \right] \right\} \frac{di_1}{dt} + P_1 i_1 + P i_2 = 0, \quad (10)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + P_2 i_2 - P \left[S M g - \frac{L_1}{R_i} \right] \frac{di_1}{dt} + P i_1 = 0. \quad (11)$$

Aus (10) läßt sich i_2 ausrechnen; setzen wir das Ergebnis ein in (11), so erhalten wir für i_1 allein die folgende lineare Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^3 i_1}{dt^3} \left\{ \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} - \left[\text{SMg} - \frac{L_1}{R_i} \right] \frac{P_1}{L_1} \right\} + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \left\{ \frac{P_1}{L_1} + \frac{P_2}{L_2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} - \frac{P_1}{L_1} \left[\text{SMg} - \frac{L_1}{R_i} \right] \frac{R_2}{L_2} \right\} \\ + \frac{di_1}{dt} \left\{ \frac{R_2}{L_2} \frac{P_1}{L_1} + \frac{R_1}{L_1} \frac{P_2}{L_2} - \frac{P_1 P_2}{L_1 L_2} \left[\text{SMg} - \frac{L_1}{R_i} \right] \left(1 - \frac{P_2}{P_1 P_2} \right) \right\} \\ + i_1 \frac{P_1 P_2}{L_1 L_2} \left(1 - \frac{P_2}{P_1 P_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Sind die Widerstände R_1 und R_2 der beiden Schwingungskreise nicht zu groß, so sind $\omega_1 = \sqrt{\frac{P_1}{L_1}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{P_2}{L_2}}$ die Eigenkreisfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise; $h_1 = \frac{R_1}{2L_1}$ und $h_2 = \frac{R_2}{2L_2}$ sind ihre Dämpfungsexponenten.

Die in der Differentialgleichung noch vorkommende GröÙe $\frac{1}{2} \left[\text{SMg} - \frac{L_1}{R_i} \right]$ hat dieselbe Dimension wie h_1 und h_2 , wir bezeichnen sie mit h_3 . Die GröÙe $\frac{P}{\sqrt{P_1 P_2}}$ stellt den Kopplungskoeffizienten k und $\sigma = 1 - k^2$ den elektrischen Streukoeffizienten der beiden Schwingungskreise dar. Führen wir diese Bezeichnungen in unsere Differentialgleichung (12) ein und schreiben wir für i_1 der Einfachheit halber immer i , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 i}{dt^4} + \frac{d^3 i}{dt^3} \{ h_1 + h_2 - h_3 \} 2 + \frac{d^2 i}{dt^2} \{ \omega_1^2 + \omega_2^2 + 4 h_1 h_2 - 4 h_3 h_2 \} \\ + \frac{di}{dt} 2 \{ h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2 - \omega_2^2 \sigma h_3 \} + i \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Wenn die Glieder, welche h_1 , h_2 und h_3 enthalten, nicht vorhanden wären, so hätten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 i}{dt^4} + \frac{d^2 i}{dt^2} [\omega_1^2 + \omega_2^2] + i \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \quad (14)$$

zweier ungedämpfter kapazitiv gekoppelter elektrischer Schwingungskreise vor uns, und der Ansatz $i = e^{j\Omega t}$, $j = \sqrt{-1}$, lieferte uns die beiden Koppelkreisfrequenzen:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}} \right]} \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

welche beide der Gleichung

$$\Omega^4 - \Omega^2 [\omega_1^2 + \omega_2^2] + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \quad (16)$$

genügen.

Die Lösung von (13) hat ebenfalls die Form $i = e^{j\bar{\Omega} t}$, $j = \sqrt{-1}$; $\bar{\Omega}$ muß dabei der Gleichung genügen:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^4 - j \bar{\Omega}^3 2 \{ h_1 + h_2 - h_3 \} - \bar{\Omega}^2 \{ \omega_1^2 + \omega_2^2 + 4 h_1 h_2 - 4 h_3 h_2 \} \\ + j \bar{\Omega} 2 \{ h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2 - \omega_2^2 \sigma h_3 \} + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Da wir nun den praktischen Verhältnissen entsprechend voraussetzen wollen, h_1 , h_2 und h_3 seien klein gegen ω_1 und ω_2 , so wird sich $\bar{\Omega}$ nur wenig von Ω unterscheiden. Setzen wir wie früher mit Prof. Rogowski an: $\bar{\Omega} = \Omega(1 + \xi)$, so wird also ξ eine gegen 1 kleine GröÙe sein. Führen wir das ξ in (17) ein, entwickeln nach Potenzen von ξ und vernachlässigen alle von höherer als der ersten Ordnung kleinen Glieder, so erhalten wir für ξ die Bestimmungsgleichung:

$$\Omega^4 (1 + 4\xi) - j\Omega^3 2\{h_1 + h_2 - h_3\} - \Omega^2\{\omega_1^2 + \omega_2^2\}(1 + 2\xi) + j\Omega 2\{h_1\omega_2^2 + h_2\omega_1^2 - h_3\omega_2^2\sigma\} + \omega_1^2\omega_2^2\sigma = 0 \quad (18)$$

und damit für $j\xi\Omega$ den Ausdruck:

$$j\xi\Omega = -\alpha = -h_1 \frac{\Omega^2 - \omega_2^2}{2\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_2 \frac{\Omega^2 - \omega_1^2}{2\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_3 \frac{\Omega^2 - \omega_2^2\sigma}{2\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} \quad (19)$$

Wir sehen, $j\xi\Omega$ ist reell. Dies bedeutet: die Frequenzen der auftretenden Schwingungen sind ganz dieselben, wie wenn die Röhre überhaupt nicht vorhanden wäre; die beiden Kreise können nur mit ihren normalen Koppelfrequenzen schwingen. Uns interessieren von nun an nur die Dämpfungen der auftretenden Schwingungen. Je nachdem ob wir in (19) für Ω den Wert Ω_1 der raschen oder den Wert Ω_2 der langsamen Koppelschwingung einsetzen, erhalten wir den Dämpfungsexponenten α_1 der raschen oder α_2 der langsamen Koppelschwingung:

$$\alpha_1 = h_1 \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2}{2\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{2\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_3 \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2\sigma}{2\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} \quad (20)$$

$$\alpha_2 = h_1 \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{2\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{2\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_3 \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2\sigma}{2\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} \quad (21)$$

Messen wir wie früher alle Frequenzen in Frequenzen des Primärkreises, setzen wir also $\frac{\omega_2}{\omega_1} = x$, $\frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1$ und $\frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2$, berücksichtigen wir ferner, daß die Beziehung gilt $O_1^2 + O_2^2 = 1 + x^2$, so können wir einfacher schreiben:

$$\alpha_1 = h_1 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} - h_3 \frac{O_1^2 - \sigma x^2}{O_1^2 - O_2^2} \quad (22)$$

$$\alpha_2 = h_1 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} - h_3 \frac{\sigma x^2 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} \quad (23)$$

Wir erinnern nun daran, daß die Dämpfungsexponenten der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise

$$h_1 U_1 + h_2 U_2$$

für die rasche und

$$h_1 U_2 + h_2 U_1$$

für die langsame Koppelschwingung betragen, wobei die Funktionen U_1 und U_2 sich nach den folgenden Formeln aus den Koppelfrequenzen bzw. aus der Verstimmung x und dem Streukoeffizienten σ beider Kreise berechnen:

$$U_1 = \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}} \right] \quad (24)$$

$$U_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}} \right] \quad (25)$$

Vergleichen wir dies mit unseren eben abgeleiteten Formeln, so erkennen wir: die Dämpfungen α_1 und α_2 der raschen und der langsamen Koppelschwingung eines Zwischenkreiströhrensenders sind nicht einfach gleich den Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise, sondern es tritt zu diesen noch eine Zusatzdämpfung hinzu. Für die rasche Schwingung hat diese Zusatzdämpfung den Wert

$$-h_3 \frac{O_1^2 - \sigma x^2}{O_1^2 - O_2^2} = -h_3 u_1, \quad (26)$$

für die langsame den Wert

$$-h_3 \frac{\sigma x^2 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} = -h_3 u_2. \quad (27)$$

Führen wir in (26) und (27) für O_1 und O_2 die Werte

$$O_1 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] u, \quad O_2 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] \quad (28)$$

ein, so erhalten wir die Gewichte u_1 und u_2 als Funktionen von x und σ :

$$u_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1+x^2(1-2\sigma)}{(1+x^2) \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} \right] u, \quad u_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+x^2(1-2\sigma)}{(1+x^2) \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} \right]. \quad (29)$$

Die Dämpfungsexponenten α_1 und α_2 der Schwingungen eines Zwischenkreisröhrensenders erhalten somit endgültig die Werte

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 U_1 + h_2 U_2 - h_3 u_1 \\ \alpha_2 &= h_1 U_2 + h_2 U_1 - h_3 u_2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

worin die U und u als Funktionen von x und σ durch (25) und (29) bestimmt sind.

Wie sich leicht zeigen läßt, sind die Gewichte u_1 und u_2 immer positiv. Je nach dem Vorzeichen von

$$h_3 = \frac{1}{2} \omega_1^2 \left[S M g - \frac{L_1}{R_i} \right]$$

werden also durch die Röhre die Dämpfungen der beiden Koppelschwingungen entweder beide verstärkt oder beide geschwächt. Die Wahl des Vorzeichens von Mg haben wir nach Belieben in der Hand. Wollen wir das Zeichen wechseln, so brauchen wir bloß die beiden Enden der Gitterrückkopplungsspule, welche an Gitter und Glühdraht liegen, miteinander zu vertauschen.

Von Interesse ist für uns nur der Fall, daß h_3 positiv ist; denn nur dann werden durch die Röhre die Dämpfungen verringert. Wird für irgend eine der beiden Koppelschwingungen der Betrag des Gliedes mit h_3 so groß, daß α Null oder gar negativ wird, dann bedeutet dies, daß die Schwingung ungedämpft bestehen kann. Die Bedingungen für die Möglichkeit des Bestehens der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung lauten mithin:

$$h_3 u_1 \geq h_1 U_1 + h_2 U_2 \quad (31)$$

bzw.

$$h_3 u_2 \geq h_1 U_2 + h_2 U_1. \quad (32)$$

Ist nur eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird die betreffende Koppelschwingung erregt werden. Sind jedoch für irgendwelche Werte von x und σ beide Bedingungen zugleich erfüllt, so vermag unsere Theorie nicht zu entscheiden, welche der beiden Koppelschwingungen — die rasche oder die langsame oder etwa beide zugleich — in Erscheinung tritt. Wir müssen uns bei dieser Frage an die experimentellen Erfahrungen bei Beobachtung der Zieherscheinungen halten; diese legen es nahe, unserer Theorie die folgenden Annahmen zugrunde zu legen:

Es kann immer nur die eine der beiden Koppelschwingungen auftreten. Ist einmal eine Koppelschwingung erregt und verändern wir dann stetig die Verstimmung x und die Streuung σ der beiden Schwingungskreise, so bleibt sie, indem die Frequenz sich stetig mit ändert, solange bestehen, als die Bedingung (31) bzw. (32) befriedigt bleibt. Dann aber reißt sie plötzlich ab; genügt unter den gegebenen Verhältnissen dann die andere Koppelschwingung der Bedingung (31) bzw. (32), so wird sie dann erregt und dauert ihrerseits so lange an, als für sie die genannte Bedingung erfüllt bleibt.

II. Diskussion der Zusatzdämpfungen.

Wir wenden uns nun den beiden Zusatzdämpfungen $-h_3 u_1$ und $-h_3 u_2$ für die rasche und die langsame Koppelschwingung zu. Da h_3 bei gegebener Gitterrückkopplung und gegebenen Werten von x und σ proportional ω_1^2 ist, so wird eine jede der beiden Koppelschwingungen um so leichter bestehen können, je größer ω_1 ist; weiter wird h_3 dem Betrage nach im allgemeinen um so größer, je enger die Gitterkopplung gewählt wird. Je fester also Gitter und Primärkreis (im richtigen Sinne) miteinander gekoppelt sind, desto leichter werden die Bedingungen (31) und (32) befriedigt werden. Ist $SMg = \frac{L_1}{K_i}$, so ist $h_3 = 0$. Es sind also dann die Dämpfungen der beiden Koppelschwingungen genau so groß, als wenn die Röhre gar nicht vorhanden wäre.

Um über die Abhängigkeit der Zusatzdämpfungen von x und σ Aufschluß zu erhalten, müssen wir die Gewichte u_1 und u_2 näher betrachten. Zunächst ist leicht zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{1 + x^2(1 - 2\sigma)}{(1 + x^2) \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}$$

wegen $0 \leq \sigma < 1$ für jeden Wert von x zwischen -1 und $+1$ liegt. Daraus folgt für die Gewichte, daß sowohl u_1 als auch u_2 immer zwischen 0 und $+1$ liegen. Weiter ergibt sich aus (29) sofort die Beziehung

$$u_1 + u_2 = 1. \quad (33)$$

Bild 3. Die Gewichte u_1 und u_2 der Zusatzdämpfungen.

Entwickeln wir u_1 und u_2 für kleine und große x nach Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle nach Potenzen von $x - 1 = \varepsilon$, so bekommen wir unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung

1. für kleine x : $(0 < x \ll 1)$

$$u_1 = 1 - \sigma k^2 x^4 \quad \text{und} \quad u_2 = \sigma k^2 x^4; \quad (34)$$

2. für große x : $(1 \ll x < \infty)$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 - \sigma + \frac{1}{x^2} 2\sigma(1 - \sigma) & u_2 &= \sigma - \frac{1}{x^2} 2\sigma(1 - \sigma) \\ &= k^2 + \frac{1}{x^2} 2\sigma k^2 & \text{und} & & = \sigma - \frac{1}{x^2} 2\sigma k^2; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

3. für $x = 1 + \varepsilon$ $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(1 + k - \varepsilon \frac{\sigma}{k} \right) \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{2} \left(1 - k + \varepsilon \frac{\sigma}{k} \right). \quad (36)$$

In Bild 3 sind die Gewichte u_1 (ausgezogen) und u_2 (gestrichelt) als Funktionen von x aufgetragen für die Werte $\sigma = 0; 0,5; 0,8$ und 1 . Für kleine x sind u_1 und u_2 sehr nahe (bis auf kleine Glieder 4. Ordnung) gleich 1 bzw. gleich 0 . Für große x

streben sie den Werten $1 - \sigma$ bzw. σ zu. In der Nachbarschaft der Resonanzstelle $x = 1$ verlaufen die Kurven um so steiler, je loser die Kopplung ist. Für $x = 1$ selbst haben u_1 und u_2 die Werte $\frac{1+k}{2}$ und $\frac{1-k}{2}$. Sie liegen also dort um so näher an 1 und 0, je enger die Kopplung ist.

Von Interesse sind die Grenzfälle vollkommen loser und vollkommen fester Kopplung.

Für vollkommen lose Kopplung haben wir $\sigma = 1$, also

$$\frac{1 + x^2(1 - 2\sigma)}{\sqrt{1 + x^2(1 - 2\sigma) + x^4}} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2}}.$$

Das gibt für

$$x < 1 : u_1 = 1 \text{ und } u_2 = 0$$

und für

$$x > 1 : u_1 = 0 \text{ und } u_2 = 1.$$

Da im Falle vollkommen loser Kopplung U_1 und U_2 für $x < 1$ die Werte +1 und 0, für $x > 1$ dagegen die Werte 0 und +1 besitzen, so lauten die Bedingungen dafür, daß eine der beiden Koppelschwingungen sich erregen kann,

für x kleiner als 1: $h_3 \geq h_1$ für die rasche, $0 \geq h_2$ für die langsame Koppelwelle und

für x größer als 1: $0 \geq h_2$ für die rasche, $h_3 \geq h_1$ für die langsame Koppelwelle.

Dies besagt zunächst: für $x < 1$ kann überhaupt nur die rasche und für $x > 1$ kann nur die langsame Koppelschwingung erregt werden. Da bei vollkommen loser Kopplung die Koppelfrequenzen mit den Eigenfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise übereinstimmen, so kann also immer nur die Eigenschwingung des Primärkreises erregt werden — ein selbstverständliches Resultat. Die Bedingung dafür, daß die Schwingung erregt wird, lautet

$$h_3 \geq h_1 \text{ oder } \frac{\omega_1^2}{2} \left[S M g - \frac{L_1}{R_1} \right] \geq \frac{R_1}{2 L_1}$$

oder

$$S M g \geq \frac{L_1}{R_1} + \frac{R_1}{L_1} \frac{1}{\omega_1^2}$$

oder

$$S M g \geq \frac{L_1}{R_1} + R_1 \frac{1}{P_1}. \quad (37)$$

Damit haben wir, wie es sein muß, die Vallaurische Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen eines einfachen an eine Röhre gelegten Schwingungskreises erhalten.

Für vollkommen feste Kopplung ist $\sigma = 0$, also $u_1 = 1$ und $u_2 = 0$ für jeden Wert von x . U_1 und U_2 haben die Werte $\frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{x^2}{1+x^2}$. Unsere Bedingungen (31) und (32) nehmen also die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} h_3 &\geq h_1 \frac{1}{1+x^2} + h_2 \frac{x^2}{1+x^2} \\ 0 \cdot h_3 &\geq h_1 \frac{x^2}{1+x^2} + h_2 \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wir sehen: Ist h_3 von endlicher GröÙe, so kann überhaupt nur die rasche Koppelschwingung erregt werden. Als Beispiel dafür nehmen wir den in Bild 4 dargestellten Spezialfall von Bild 2. Hier ist $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C}$, $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C}$, also $x^2 = \frac{L_1}{L_2}$ und

$h_3 = \frac{I}{2L_1C} \left[SMg - \frac{L_1}{R_i} \right]$. Die Bedingung für das Einsetzen der raschen Koppelschwingung lautet:

$$\frac{I}{2L_1C} \left[SMg - \frac{L_1}{R_i} \right] \geq \frac{R_1}{2L_1} \frac{I}{1 + \frac{L_1}{L_2}} + \frac{R_2}{2L_2} \frac{I}{1 + \frac{L_1}{L_2}}$$

oder

$$SMg \geq \frac{L_1}{R_i} + CL_1 \frac{\frac{R_1L_2 + R_2L_1}{L_1 + L_2}}{L_1 + L_2}. \quad (39)$$

Nehmen wir L_2 unendlich groß, so müssen wir die Vallaurische Bedingung $SMg \geq \frac{L_1}{R_i} + R_1C$ für das Einsetzen der Schwingungen eines einfachen Schwingungskreises erhalten. Dies ist in der Tat der Fall.

Daß es Fälle vollkommen fester Kopplung gibt, in denen h_3 unendlich groß und darum unter Umständen eine Erregung der langsamen Koppelschwingung möglich wird, zeigt uns die in Bild 5 dargestellte Schaltung; sie geht aus dem allgemeineren Kopplungschema von Bild 2 einfach dadurch, hervor, daß die Kapazität C unendlich klein genommen wird. Für den Fall von Bild 2 ist

$$\sigma = \frac{C^2 + C(C_1 + C_2)}{(C + C_1)(C + C_2)}.$$

Bild 4.

Bild 5.

Es wird in unserem Sonderfall also wirklich $\sigma = 0$. Wir haben zu untersuchen, welche Werte die Funktion u_2 für kleine σ annimmt. Wir entwickeln dazu u_2 nach Potenzen von σ :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{I}{2} \left[I - \frac{1 + x^2 - 2\sigma x^2}{(1 + x^2) \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2} \sigma}} \right] \\ &= \frac{I}{2} \left[I - \frac{I}{1 + x^2} (1 + x^2 - 2\sigma x^2) \left(1 + \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} \sigma \right) \right] = \sigma \frac{x^4}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Dann wird:

$$h_3 u_2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{SMg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{I}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} \right) \sigma \frac{x^4}{(1 + x^2)^2} \quad (40)$$

oder wegen $x^2 = \frac{L_1}{L_2}$

$$\begin{aligned} h_3 u_2 &= \frac{SMg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{C} = \\ &= \frac{SMg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Unsere Bedingung für die Möglichkeit der langsamen Koppelwelle lautet mithin

$$\frac{SMg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] \geq \frac{R_1}{2L_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} + \frac{R_2}{2L_2} \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

oder

$$SMg \geq \frac{L_1}{R_i} + \frac{L_1 + L_2}{L_1} \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} (R_1 + R_2). \quad (42)$$

Für $C_2 = \infty$ und $L_2 = R_2 = 0$ muß diese Bedingung übergehen in die Vallaurische:

$$SMg \geq \frac{L_1}{R_i} + R_1 C_1;$$

das ist in der Tat der Fall.

Der soeben behandelte Fall stellt weiter nichts dar als einen einfachen Schwingungskreis mit der Selbstinduktion $L = L_1 + L_2$, dem Widerstand $R = R_1 + R_2$ und der reziproken Kapazität $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$. Nur ist dieser Schwingungskreis nicht nach der gewöhnlichen Weise mit den Enden seiner gesamten Selbstinduktion an die Röhre gelegt, sondern nur mit einem Bruchteil $\theta L = L_1$ seiner Selbstinduktion ($\theta < 1$). Führen wir die Bezeichnungen L , θ , C und R in (42) ein, so bekommen wir als Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen

$$SMg \geq \frac{\theta L}{R_i} + \frac{CR}{\theta}. \quad (\theta \leq 1). \quad (43)$$

Betrachtet man die einzelnen Summanden, so sieht man sofort, daß es bei gegebenem L , C , R und R_i einen bestimmten Wert θ^* von θ geben muß, für den die zur Erregung der Schwingungen mindestens notwendige Gitterkopplung ein Minimum ist. θ^* berechnet sich zu

$$\theta^* = \sqrt{\frac{CRR_i}{L}}. \quad (44)$$

Da unsere Ableitung voraussetzt, daß $\theta < 1$, so braucht θ^* kein Minimum der notwendigen Gitterkopplung zu ergeben, wenn es größer ist als 1.

Wir kehren nun zu unseren allgemeinen Bedingungen (31) und (32) für die Möglichkeit des Bestehens der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung zurück. Wie früher¹⁾ gezeigt, liegen die Werte von $h_1 U_1 + h_2 U_2$ bzw. von $h_1 U_2 + h_2 U_1$ immer zwischen h_1 und h_2 , sie überschreiten also jedenfalls nie den größeren der beiden Werte h_1 und h_2 . Berücksichtigen wir dies, so können wir ohne weiteres folgendes aussagen: Halten wir ω_1 von endlicher Größe, so können wir für irgendwelche gegebene Werte von x und σ die beiden Koppelschwingungen immer dann erzeugen, wenn die Funktionen u nicht zu kleine Werte annehmen; denn wir brauchen ja dann Mg höchstens so groß zu wählen, daß $h_3 u = \frac{\omega_1^2}{2} \left[SMg - \frac{L_1}{R_i} \right] u$ gleich dem größeren der beiden Werte h_1 und h_2 wird. Betrachten wir daraufhin Bild 3, so erkennen wir:

1. Die rasche Koppelschwingung können wir im allgemeinen leicht erzeugen, nur nicht in dem einen Falle, daß die Kopplung sehr lose ist und außerdem x große, über 1 liegende Werte besitzt; d. h. nur dann nicht, wenn bei loser Kopplung der Primärkreis eine kleinere ungekoppelte Eigenfrequenz besitzt als der Sekundärkreis. Dieses Verhalten der raschen Koppelwelle bei kapazitiver Kopplung entspricht ganz dem Verhalten der raschen Koppelwelle bei induktiver Kopplung.

¹⁾ Arch. f. Elektrotechnik X, S. 257–276.

2. Die langsame Koppelschwingung können wir im allgemeinen nicht so leicht erregen. Zunächst überhaupt nicht, d. h. für keinen Wert von σ , sobald x sehr kleine, unterhalb 1 gelegene Werte annimmt; denn in diesem Falle ist u_2 unendlich klein von 4. Ordnung. Weiterhin auch für keinen Wert von x , sobald $\sigma = 0$, die Kopplung also vollkommen fest genommen wird; denn dann hat u_2 den Wert 0. Dagegen können wir die langsame Koppelwelle leicht erregen, sobald σ nahe gleich 1 ist und x große über 1 liegende Werte besitzt, also in dem Falle, daß bei sehr loser Kopplung die ungekoppelte Eigenfrequenz des Primärkreises kleiner ist als die des Sekundärkreises. Für Zwischenwerte von σ benötigen wir eine um so festere Gitterkopplung, je kleiner x und σ sind. Bei induktiver Kopplung ist das Verhalten der langsamen Koppelschwingung etwas anders. Dort ist es auch im Falle fester Kopplung, wenigstens für $x > 1$, leicht möglich, sie durch genügend feste Gitterkopplung zu erregen. Ganz anders als eben besprochen können die Verhältnisse dann liegen, wenn ω_1 nicht von endlicher Größe bleibt, sondern etwa, wie schon in einem Beispiele gezeigt wurde, bei fester werdender Kopplung unendlich großen Werten zustrebt.

III. Die Zieherscheinungen.

Die Betrachtung der Zieherscheinungen läßt sich ohne Schwierigkeit unmittelbar an die Bedingungen (31) und (32) für die Erregung der langsameren und der rascheren Koppelschwingung anknüpfen. Nehmen wir an, wir halten die Streuung konstant,

Bild 6. Die drei Möglichkeiten: Schwingungslücke (a), weder Schwingungslücke noch Zieherschleife (b), Zieherschleife (c).

$\longleftrightarrow$ Bereich, in dem die eine Koppelschwingung möglich ist,
 $\dashrightarrow$ " " " " andere " "
 $\longleftrightarrow$ " " " " beide Koppelschwingungen möglich sind.

variieren dagegen durch Veränderung der Eigenfrequenz des Sekundärkreises die Verstimmung x der beiden Kreise, so bekommen wir bei gegebenen Werten von h_1 , h_2 und h_3 für jede der beiden Schwingungen einen Bereich von x -Werten, in dem sie der Bedingung (31) bzw. (32) genügt. Liegen diese Bereiche so, daß sie einander weder bedecken noch berühren, Bild 6a, so bekommen wir keine Zieherscheinungen; denn zwischen den beiden Bereichen, in denen je eine der beiden Koppelschwingungen erregt wird, befindet sich eine Lücke, in der den Bedingungen (31) und (32) nicht genügt wird, in der also Schwingungsstille herrscht. Liegen die Bereiche so, daß sie einander zwar nicht bedecken, aber doch in einem Punkte berühren (Bild 6b), so bekommen wir ebenfalls keine Zieherscheinungen; aber auch keine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht. Lassen wir x von 0 bis ∞ wachsen, so wird zuerst die eine der beiden Koppelschwingungen erregt; schreiten wir dann über den gemeinsamen Punkt der beiden Bereiche hinweg, so erlischt dort die bisherige Koppelschwingung; aber zugleich tritt die andere Koppelschwingung in Erscheinung, die Frequenz springt also auf einen anderen Wert. Gehen wir von

∞ nach 0 zurück, so tritt an derselben ausgezeichneten Stelle wieder ein Sprung auf, diesmal jedoch von der neuen zur alten Frequenz. Liegen endlich die Bereiche so, daß sie einander in einem gewissen gemeinsamen Stück überdecken (Bild 6c), so erhalten wir die bekannte Zieherscheinung; denn wandern wir jetzt mit unsern x -Werten von 0 bis ∞ , so erhalten wir gemäß unserer oben gemachten Annahme zunächst die eine Koppelschwingung so lange, bis ihr Bereich überschritten wird. Dann tritt die andere Koppelschwingung in Erscheinung. Gehen wir nun zurück zum Werte $x=0$, so bleibt ihrerseits jetzt die neue Koppelschwingung so lange bestehen, als wir uns in dem ihr zugehörigen Bereiche befinden, wir bekommen also jetzt den Sprung zurück zur alten Koppelwelle an einer andern Stelle x als vorhin den Sprung von der alten zur neuen Koppelwelle. Die Länge des gemeinsamen Stückes der beiden Bereiche bildet ein Maß für die Breite der sog. Ziehschleife.

Wollen wir uns über die Zieherscheinungen unterrichten, so brauchen wir uns bloß zu überzeugen, welches unter den gegebenen Versuchsbedingungen die Enden der beiden Bereiche sind, in denen die rasche bzw. die langsame Koppelschwingung sich erregen kann.

Bei der Mannigfaltigkeit der unabhängigen Veränderlichen (h_1 , h_2 , h_3 , x und σ) ist es vorteilhaft, die Bedingungen (31) und (32) noch etwas zu vereinfachen. Eine der unabhängigen Veränderlichen können wir sofort unterdrücken, indem wir alle Dämpfungen messen in Dämpfungen des ungekoppelten Primärkreises, indem wir also die Bezeichnungen einführen

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_3}{h_1} &= \frac{\omega_1^2 \left[SMg - \frac{L_1}{R_1} \right] L_1}{R_1} = \frac{SMg - \frac{L_1}{R_1}}{C_1 R_1} = H \\ \text{und} \quad \frac{h_2}{h_1} &= \frac{R_2 L_1}{R_1 L_2} = h. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Dividieren wir außerdem noch durch u_1 bzw. u_2 , so erhalten wir als Bedingungen für die Möglichkeit der Erregung der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung einfacher als früher:

$$H - \frac{U_1}{u_1} \geq h \frac{U_2}{u_1} \quad \text{und} \quad H - \frac{U_2}{u_2} \geq h \frac{U_1}{u_2}. \quad (46)$$

$\frac{U_1}{u_1}$, $\frac{U_2}{u_1}$, $\frac{U_2}{u_2}$ und $\frac{U_1}{u_2}$ sind Funktionen von x und σ ; wir bezeichnen sie bzw. mit W_1 , W_2 , w_1 und w_2 , schreiben also unsere Bedingungen in der Form:

$$H - W_1 \geq h W_2 \quad \text{und} \quad H - w_1 \geq h w_2. \quad (47)$$

Die erste gilt für die rasche, die zweite für die langsame Koppelschwingung. Wegen (24) bis (27) haben wir:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{U_1}{u_1} = \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - \sigma x^2} = \frac{O_1^2 - x^2}{O_1^2 - \sigma x^2} = 1 - \frac{x^2(1 - \sigma)}{O_1^2 - \sigma x^2} \\ W_2 &= \frac{U_2}{u_1} = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - \sigma x^2} = 1 - \frac{1 - \sigma x^2}{O_1^2 - \sigma x^2} \\ w_1 &= \frac{U_2}{u_2} = \frac{O_1^2 - 1}{\sigma x^2 - O_2^2} = \frac{x^2 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2} = 1 - \frac{x^2(1 - \sigma)}{O_2^2 - \sigma x^2} \\ w_2 &= \frac{U_1}{u_2} = \frac{1 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2} = 1 - \frac{1 - \sigma x^2}{O_2^2 - \sigma x^2} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

oder wegen (28)

$$\left. \begin{aligned}
 W_1 &= 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2}, \\
 W_2 &= 1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2}, \\
 w_1 &= 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2}, \\
 w_2 &= 1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Bild 7. Die Funktionen W_1 und w_1 .

— · — · — W_1
····· w_1

Bild 8. Die Funktionen W_2 und w_2 .

— W_2
— · — w_2

Diskutieren wir den Verlauf der Kurven W und w , so haben wir alle zur Beschreibung der Zieherscheinungen notwendigen Unterlagen gewonnen. Wir wollen dazu das Verhalten dieser Funktionen für vollkommen lose und für vollkommen feste Kopplung untersuchen; außerdem ihr Verhalten für kleine und große x und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle. In den Bildern 7 und 8 sind W_1 (strichpunktiert) und w_1 (punktiert) bzw. W_2 (ausgezogen) und w_2 (gestrichelt) als Funktionen der Verstimmung x graphisch aufgetragen für die Streuungen $\sigma = 0$; 0,5; 0,8 und 1.

I. Vollkommen lose Kopplung.

1. Die Funktion W_1 . Wir setzen $\sigma = 1 - \eta$, $0 < \eta < 1$, und entwickeln nach Potenzen von η :

$$\begin{aligned}
 W_1 &= 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{1+x^2(1-2\sigma) + \sqrt{(1+x^2)^2 - 4\sigma x^2}} \\
 &= 1 - \frac{2x^2\eta}{1+x^2(2\eta-1) + \sqrt{1-2x^2+x^4+4\eta x^2}} \\
 &= 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 + (|1-x^2|) \sqrt{1 + \frac{4\eta x^2}{(1-x^2)^2}}} \\
 &= 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 + |1-x^2| \left\{ 1 + \frac{2\eta x^2}{(1-x^2)^2} + (\eta^2) \right\}};
 \end{aligned}$$

für $x < 1$ wird das:

$$W_1 = 1 - \frac{2\eta x^2}{2(1-x^2) + 2\eta x^2 + 2\eta \frac{x^2}{1-x^2} + (\eta^2)}$$

und das gibt für $\lim \eta = 0$:

$$W_1 = 1 \text{ für } x < 1. \quad (50)$$

Für $x > 1$ dagegen wird

$$W_1 = 1 - \frac{2\eta x^2}{2\eta x^2 + 2\eta \frac{x^2}{x^2-1} + (\eta^2)}$$

und damit

$$W_1 = \frac{1}{x^2} \text{ für } x > 1. \quad (51)$$

2. Die Funktion w_1 . Setzen wir wieder $\sigma = 1 - \eta$, so bekommen wir ähnlich wie eben

$$w_1 = 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 - |1-x^2| \left\{ 1 + 2\eta \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + (\eta^2) \right\}}$$

also

$$w_1 = \frac{1}{x^2} \text{ für } x < 1 \text{ und } w_1 = 1 \text{ für } x > 1. \quad (52, 53)$$

3. Die Funktion W_2 . Wir benutzen die Darstellung

$$W_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - \sigma x^2} \text{ oder, für } \sigma = 1, \quad W_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - x^2}.$$

Für $x < 1$ ist $O_1^2 = 1$, für $x > 1$ dagegen $O_1^2 = x^2$; im ersten Falle verschwindet somit der Zähler, im letzten der Nenner; wir haben also:

$$W_2 = 0 \text{ für } x < 1 \text{ und } W_2 = \infty \text{ für } x > 1. \quad (54, 55)$$

4. Die Funktion w_2 . Es wird $w_2 = \frac{1 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2}$ gleich $\frac{1 - O_2^2}{x^2 - O_2^2}$; für $x < 1$ ist $O_2^2 = x^2$, für $x > 1$ dagegen $O_2^2 = 1$; im ersten Falle verschwindet der Nenner, im zweiten der Zähler; wir haben also

$$w_2 = \infty \text{ für } x < 1 \quad (56)$$

und

$$w_2 = 0 \text{ für } x > 1. \quad (57)$$

II. Vollkommen feste Kopplung.

1. Die Funktion W_1 . Setzen wir $\sigma = 0$, so bekommen wir sofort

$$W_1 = 1 - \frac{2x^2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (58)$$

Wächst x von 0 bis unendlich, so nimmt W_1 vom Werte 1 bis zum Werte 0 allmählich ab. Die beiden Kurven W_1 für vollkommen feste und vollkommen lose Kopplung unterscheiden sich verhältnismäßig wenig, wir können also schließen, daß die W_1 -Kurven von der Streuung wenig abhängig sein werden.

2. Die Funktion w_1 . Es wird für $\sigma = 0$:

$$w_1 = 1 - \frac{2x^2}{-(1-x^2) + (1+x^2)} = \infty; \quad (59)$$

die Kurve w_1 verläuft also für $\sigma = 0$ ganz im Unendlichen. Die Kurven für vollkommen feste und vollkommen lose Kopplung unterscheiden sich beträchtlich, es wird also der Verlauf der Kurven w_1 stark abhängig von dem jeweiligen Werte der Streuung sein.

3. Die Funktion W_2 . Für $\sigma = 0$ wird:

$$W_2 = 1 - \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2}{1+x^2}. \quad (60)$$

Wächst x von 0 bis ∞ , so durchläuft W_2 alle Werte von 0 bis 1. Es ist

$$W_2(\sigma=0) = 1 - W_1(\sigma=0).$$

Die Kurven W_2 sind im Gegensatz zu den Kurven W_1 stark abhängig von der Streuung.

4. Die Funktion w_2 . Für $\sigma = 0$ wird:

$$w_2 = 1 + \frac{2}{-(1+x^2)[1-1]} = \infty. \quad (61)$$

w_2 wird also unendlich groß für jeden endlichen Wert von x .

Entwickeln wir unsere Funktionen W und w für kleine bzw. große Werte von x nach Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle nach Potenzen von $\varepsilon = x - 1$, so erhalten wir, wenn wir alle von höherer Ordnung kleinen Glieder vernachlässigen, die folgenden Näherungsausdrücke:

I. Für W_1 und

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ kleine Werte von } x; 0 < x \ll 1: W_1 = 1 - x^2(1 - \sigma), \\ 2. \text{ große Werte von } x; 1 \ll x < \infty: W_1 = \frac{1}{x^2}, \\ 3. x \text{ nahe gleich } 1; x = 1 + \varepsilon; 0 < |\varepsilon| \ll 1: W_1 = \frac{1}{1+k} - \varepsilon \frac{1}{1+k}; \end{array} \right\} \quad (62)$$

II. Für w_1 und

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ kleine Werte von } x: w_1 = \frac{1}{x^2 \sigma}, \\ 2. \text{ große Werte von } x: w_1 = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{x^2} \frac{k^2}{\sigma}, \\ 3. x \text{ nahe gleich } 1: w_1 = \frac{1}{1-k} - \varepsilon \frac{1}{1-k}; \end{array} \right\} \quad (63)$$

III. Für W_2 und

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ kleine Werte von } x: W_2 = (1 - \sigma)x^2, \\ 2. \text{ große Werte von } x: W_2 = \frac{1}{1 - \sigma} - \frac{1}{x^2} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}, \\ 3. x \text{ nahe gleich } 1: W_2 = \frac{1}{1+k} + \varepsilon \frac{2+k-k^2}{k(1+k)^2}, \end{array} \right\} \quad (64)$$

IV. Für w_2 und

$$\left. \begin{array}{ll} 1. \text{ kleine Werte von } x: & w_2 = \frac{1}{x^4} \frac{1}{k^2 \sigma} - \frac{1}{x^2} \frac{3\sigma - 1}{k^2 \sigma}, \\ 2. \text{ große Werte von } x: & w_2 = \frac{k^2}{\sigma x^2}, \\ 3. x \text{ nahe gleich } 1: & w_2 = \frac{1}{1-k} - \varepsilon \frac{2-k-k^2}{k(1-k)^2}. \end{array} \right\} \quad (65)$$

Aus den angegebenen Näherungsformeln ist ohne weiteres zu erkennen, welche Werte die Funktionen W und w für $x=0$, ∞ und 1 annehmen und wie sie sich in der Nachbarschaft dieser Stellen verhalten.

Wollen wir nun wissen, für welchen Bereich der Variablen x bei gegebenen Werten von σ , H und h die $\left\{ \begin{array}{l} \text{rasche} \\ \text{langsame} \end{array} \right\}$ Koppelschwingung erregt wird, so brauchen wir nur folgendermaßen zu verfahren:

Wir tragen graphisch die beiden Kurven $\left\{ \begin{array}{l} H - W_1 \\ H - w_1 \end{array} \right\}$ und $\left\{ \begin{array}{l} h W_2 \\ h w_2 \end{array} \right\}$ auf und stellen diejenigen Bereiche von x -Werten fest, für die die erste Kurve die zweite unter sich läßt; für diese Bereiche werden die Bedingungen (47) befriedigt. Ihre Grenzen sind diejenigen Stellen, an denen die Gitterkopplung gerade hinreicht, um die Dämpfung 0 hervorzurufen; innerhalb der Bereiche ist die Dämpfung der betreffenden Koppelschwingung negativ. Wollen wir die Abhängigkeit der Erscheinungen vom Grade der Gitterkopplung, also von den H -Werten, untersuchen, so müssen wir die Kurven $\left\{ \begin{array}{l} H - W_1 \\ H - w_1 \end{array} \right\}$ um den Betrag des Zuwachses von H senkrecht nach oben oder unten verschieben. Lassen wir die Gitterkopplung wachsen, so müssen wir nach oben, lassen wir sie abnehmen, so müssen wir nach unten verschieben. Wollen wir weiter die Abhängigkeit der Verhältnisse von den h -Werten untersuchen, so brauchen wir nur für die verschiedenen in Betracht zu ziehenden Werte von h die Kurven $\left\{ \begin{array}{l} h W_2 \\ h w_2 \end{array} \right\}$ zu zeichnen.

In Bild 9 ist dies ausgeführt für den Fall, daß σ den Wert $0,8$ besitzt. Die Kurven $h W_2$ sind stark ausgezogen, die Kurven $h w_2$ stark gestrichelt, die Kurven $H - W_1$ strichpunktiert, und endlich die Kurven $H - w_1$ punktiert gezeichnet. In Bild 10 und 11 sind dazu gehörig für die verschiedenen Werte von H die Bereiche von x -Werten aufgetragen, für die die Erregung der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung möglich ist, und zwar in den Bildern 10 und 11 bzw. für die Werte $h=2$ und $h=1$.

Betrachten wir in Bild 9 den Fall $h=2$, so sehen wir: Die rasche Koppelschwingung kann überhaupt nicht erregt werden, wenn H kleiner ist als 1 . Wird jedoch H größer als 1 , so werden Schwingungen möglich für kleine Werte von x . Je mehr H wächst, desto weiter dehnt sich der Bereich, für den die rasche Koppelschwingung möglich ist, nach rechts hin aus. Für $H=8$ erstreckt er sich bereits über die Stelle $x=4$ hinaus; wird die Gitterkopplung noch fester gewählt, so kann er sich bis ins Unendliche erstrecken. Fassen wir die langsame Koppelschwingung ins Auge, so kann sie erst erregt werden, sobald H größer wird als $1,25$: Schwingungen können dann auftreten für unendlich große Werte von x . Lassen wir H wachsen, so dehnt sich der Bereich, für den die langsame Koppelschwingung möglich ist, von unendlich nach links hin aus, und zwar zunächst sehr schnell, dann aber nur langsam; bis zum Werte $x=0$ kann er nicht gelangen, weil dazu H unendlich große Werte annehmen müßte.

Mit zunehmender Gitterkopplung dehnen sich die Bereiche der raschen bzw. der langsamen Koppelwelle von $x = 0$ bzw. von ∞ her in Richtung auf den Resonanzpunkt aus. Es muß also einen bestimmten Wert H^* von H geben, für den die Bereiche

Bild 9. Die Kurven $H - W_1$, $H - w_1$; $h W_2$, $h w_2$; für $\sigma = 0,8$ und $h = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

— $h W_2$, — $H - W_1$,
- - - $h w_2$, $H - w_1$.

gerade aufeinander stoßen, ohne sich gegenseitig zu überlagern. Dies ist der Fall für den Wert $H^* = 3$; die beiden Bereiche berühren sich an der Stelle $x = 1,2$. Für $H < 3$ bekommen wir eine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht, für $H > 3$ überdecken sich die beiden Bereiche mit einem gewissen Stücke, wir bekommen die bekannte Zieherscheinung. Je weiter H über den Wert H^* hinauswächst, desto breiter wird die Zieherschleife. Sie dehnt sich nach rechts hin bedeutend rascher aus

als nach links; nach rechts hin kann sie sich bis ins Unendliche erstrecken, nach links jedoch nicht bis zum Punkte $x = 0$.

Für den Fall $h = 1$ sind die Erscheinungen ähnlich. Nur dehnt sich der Bereich der raschen Koppelschwingung viel schneller, der der langsamen Koppelschwingung dagegen nur wenig schneller als oben aus.

Bild 10. Die Bereiche von x -Werten, in denen die rasche (—) und die langsame (---) Koppelschwingung bestehen können, in Abhängigkeit von H .

$\sigma = 0,8; \quad h = 1.$

Bild 11. Die Bereiche von x -Werten, in denen die rasche (—) und die langsame (---) Koppelschwingung möglich sind; in Abhängigkeit von H .

$\sigma = 0,8; \quad h = 2.$

Etwas anders jedoch werden die Erscheinungen, wenn wir es mit noch kleineren Werten von h zu tun haben. Nehmen wir $h = \frac{1}{4}$, so sehen wir (Bild 9), daß die rasche Koppelschwingung schon für Werte von H möglich wird, die kleiner sind als 1. Lassen wir H von 0 aus wachsen, so beginnen die Schwingungen nicht zuerst für unendlich kleine x , sondern in unserm Falle etwa bei $x = 1$; bei weiterem Wachsen

von H dehnt sich der Bereich dann sehr schnell nach kleinen und großen Werten von x hin aus, und er umfaßt das ganze Intervall von $x = 0$ bis $x = \infty$ bereits in dem Augenblick, wo für unendlich große x auch die langsame Koppelschwingung in Erscheinung tritt. Bei weiter zunehmender Gitterkopplung bleibt die rasche Koppelschwingung für jeden Wert von x möglich, und der Bereich der langsamen Koppelwelle dehnt sich zunächst schnell, dann langsam nach links hin aus.

Im Falle $h = \frac{1}{2}$ ist die Sachlage ähnlich; nur tritt die langsame Koppelschwingung bereits in Erscheinung, bevor der Bereich der raschen Koppelschwingung sich bis ins Unendliche erstreckt hat.

Denken wir uns den Grenzfall $h = 0$, so fällt die Kurve $h \cdot W_2$ mit der x -Achse zusammen. Lassen wir nun H wachsen von 0 bis 1, so beginnt die rasche Koppelschwingung zunächst für unendlich große x , ihr Bereich dehnt sich dann nach links hin aus, also gerade umgekehrt wie vorhin. Ähnliches können wir erwarten für sehr kleine Werte von h .

Nehmen wir die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis fester als im eben behandelten Falle, so wird die rasche Koppelschwingung leichter, die langsame dagegen schwerer erregt als eben (vorausgesetzt, daß ω_1 endlich bleibt, vergleiche oben). Es ist also dann leichter möglich, die Gitterkopplung so fest zu wählen, daß die rasche Koppelwelle für jeden Wert x bestehen kann. Sobald man durch genügend kräftige Gitterrückkopplung erreicht hat, daß die rasche Koppelwelle für jeden Wert von x bestehen kann, erhält man keine Frequenzsprünge mehr, wenn sich einmal die rasche Koppelschwingung erregt hat.

Das Verhalten der Zieherscheinungen bei kapazitiver Kopplung entspricht qualitativ ziemlich genau dem Verhalten bei induktiver Kopplung. Nur für kleine Werte von h zeigen sich qualitative Unterschiede; denn bei induktiver Kopplung beginnt die Erregungsmöglichkeit der langsamen bzw. der raschen Koppelschwingung immer bei unendlich großen bzw. bei unendlich kleinen Werten von x .

IV. Quantitatives.

Im folgenden wollen wir nun noch die quantitativen Verhältnisse etwas näher betrachten.

Zunächst sei ein bestimmter Wert der Verstimmung x gegeben. Wir fragen uns, welches ist die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, damit an der Stelle x die langsame oder die rasche Koppelschwingung bestehen kann. Die Antwort darauf geben uns sofort die Bedingungen (47) und (48), wenn wir für sie das Gleichheitszeichen gelten lassen. Es muß also H mindestens sein gleich

$$H = W_1 + h W_2 = \left[1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2} \right] + h \left[1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2} \right], \quad (65)$$

wenn wir die rasche, und

$$H = w_1 + h w_2 = \left[1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2} \right] + h \left[1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} \right] - 2\sigma x^2} \right], \quad (66)$$

wenn wir die langsame Koppelwelle erzeugen wollen. Wir betrachten die folgenden Beispiele:

1. Den Fall der Resonanz ($x = 1$). Wir bekommen für die rasche Koppelschwingung

$$H = \frac{1 + h}{1 + \sqrt{1 - \sigma}} \quad (67)$$

und für die langsame

$$H = \frac{1 + h}{1 - \sqrt{1 - \sigma}}; \quad (68)$$

2. $x = 0$. Wir bekommen für die rasche Koppelwelle

$$H = 1, \text{ also } h_3 = h_1, \quad (69)$$

für die langsame

$$H = \infty. \quad (70)$$

Für nicht zu große Werte von h gibt (69) nach obigem die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, damit überhaupt für irgendwelche Werte von x die rasche Koppelschwingung einsetzen kann.

3. Unendlich große x . Wir bekommen für die rasche Koppelschwingung:

$$H = h \frac{1}{1 - \sigma}, \quad (71)$$

für die langsame

$$H = \frac{1}{\sigma}. \quad (72)$$

Für nicht zu kleine Werte von h gibt (71) diejenige Gitterkopplung, welche wir mindestens aufbringen müssen, damit die rasche Koppelschwingung im ganzen Bereiche von $x = 0$ bis $x = \infty$ sich erregen kann. (72) gibt die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, um überhaupt (für irgendwelche Werte von x) die langsame Koppelschwingung erregen zu können.

Nun sei umgekehrt der Wert von H gegeben. Wir fragen nach denjenigen Stellen x , an denen H gerade hinreicht zur Aufrechterhaltung der Schwingungen. Wir haben dazu die Gleichungen (65) und (66) nach x aufzulösen. Wir bekommen aus ihnen zunächst

$$\sqrt{1 + 2x^2(1 - 2\sigma) + x^4} [H - 1 - h] = x^2 [h - 1 - H(1 - 2\sigma)] + [1 - h - H] \quad (73)$$

für die rasche und

$$-\sqrt{1 + 2x^2(1 - 2\sigma) + x^4} [H - 1 - h] = x^2 [h - 1 - H(1 - 2\sigma)] + [1 - h - H] \quad (74)$$

für die langsame Koppelschwingung. Quadrieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir ein und dieselbe biquadratische Gleichung für x . Führen wir der Kürze halber die Bezeichnungen ein:

$$h - 1 - H(1 - 2\sigma) = \alpha; \quad 1 - h - H = \beta \text{ und } H - 1 - h = \gamma, \quad (75)$$

so lautet diese biquadratische Gleichung:

$$x^4 (\gamma^2 - \alpha^2) + 2x^2 [\gamma^2 (1 - 2\sigma) - \alpha\beta] + (\gamma^2 - \beta^2) = 0. \quad (76)$$

Für x^2 ergibt sie die beiden Werte:

$$x^2 = \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} \left\{ \gamma^2 (2\sigma - 1) + \alpha\beta \pm \gamma \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1 - \sigma)\gamma^2} \right\}. \quad (77)$$

Wollen wir für jeden dieser x -Werte wissen, ob er für die rasche oder für die langsame Koppelschwingung gilt, so brauchen wir nur zu sehen, welche der beiden Gleichungen (73) und (74) er befriedigt. Liefert uns (77) einen positiven und einen negativen Wert von x^2 , also nur einen reellen positiven Wert von x , dann können folgende Fälle vorliegen:

1. H ist kleiner als der durch (72) bestimmte Wert $\frac{1}{\sigma}$. Die langsame Koppelschwingung kann dann noch nirgends bestehen, unser positiver Wert von x gibt also dann an, bis zu welcher Stelle die rasche Koppelschwingung bestehen kann. Der Bereich der raschen Koppelschwingung reicht dann von diesem Punkte x bis nach 0 oder bis nach ∞ , je nachdem ob H größer oder kleiner ist als der durch (69) bestimmte Wert.

2. H ist größer als $\frac{1}{\sigma}$. Unser positiver Wurzelwert gibt dann an, bis zu welchem Punkte sich der Bereich der langsamen Koppelschwingung von ∞ her erstreckt. Die rasche Koppelschwingung ist für $H > \frac{1}{\sigma}$ sicher möglich für kleine Werte von x ; denn dazu braucht ja wegen (69) nur H größer als 1 zu sein. Erstreckte sich der Bereich der raschen Koppelschwingung nur bis zu einem endlichen Werte x , so müßte unsere Gleichung (77) zwei positive Werte von x ergeben, was wir ausgeschlossen haben. Es muß also die rasche Koppelschwingung in unserem Falle für jeden Wert von x bestehen können.

Für den Fall, daß Gleichung (77) uns zwei positive Werte von x liefert, müssen wir wieder die Fälle $H > \frac{1}{\sigma}$ und $H < \frac{1}{\sigma}$ unterscheiden. Ist zunächst H kleiner als $\frac{1}{\sigma}$, so begrenzen die beiden positiven Werte von x den Bereich der raschen Koppelschwingung; denn die langsame Koppelschwingung ist dann noch nicht möglich. Ist jedoch H größer als $\frac{1}{\sigma}$, so gehört einer der beiden X -Werte der raschen, der andere der langsamen Koppelschwingung an; je nachdem ob die beiden Bereiche, in denen die rasche bzw. die langsame Koppelschwingung möglich ist, sich überlagern oder nicht, bekommen wir eine Ziehschleife oder eine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht. Zur Entscheidung, ob das eine oder das andere vorliegt, läßt sich ein einfaches Kriterium angeben. Wie oben gezeigt, gibt es einen bestimmten Wert H^* , für den die beiden Bereiche gerade aneinander stoßen. Ist nun unser H größer als H^* , so greifen die Bereiche übereinander, ist dagegen H kleiner als H^* , so sind sie durch eine Lücke voneinander getrennt. Im ersten Falle bekommen wir eine Ziehschleife, im zweiten Schwingungsstille. Wir brauchen also bloß H zu berechnen, um übersehen zu können, ob wir es bei einer gewissen Gitterkopplung mit einer Ziehschleife zu tun haben.

Für H^* muß unsere Gleichung (77) offenbar 2 gleiche Werte von x liefern, es muß also entweder $\gamma = 0$ oder $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1 - \sigma)\gamma^2} = 0$ sein. Für uns kommt nur das erstere in Betracht; ändern wir nämlich H^* etwas ab, so wird im allgemeinen je nach der Richtung, in der wir es abändern, der Radikand der Wurzel positive oder negative Werte annehmen, er wird also jedenfalls bei geeigneter Abänderung von H negativ werden können. Das würde bedeuten, daß wir dann zwei komplexe Werte von x bekämen. Tatsächlich dürfen wir natürlich nur reelle Werte von x erhalten, die uns entweder die Breite der Ziehschleife oder die der Schwingungslücke geben. Wir bekommen also H^* , indem wir $\gamma = 0$ setzen, d. h. es wird:

$$H^* = 1 + h. \quad (78)$$

Es sei bemerkt, daß der Wert von H^* unabhängig ist von der Stärke der Gitterkopplung. Für den oben eingehend besprochenen Fall $h = 2$ wird $H^* = 3$, in Übereinstimmung mit Bild 9 und 11.

Von Interesse ist es nun noch festzustellen, welche Gitterkopplung im allgemeinen Falle mindestens erforderlich ist, damit die eine oder die andere Koppelschwingung möglich wird. Für die langsame Koppelschwingung gibt uns bereits (72) den Wert $H = \frac{1}{\sigma}$. Für die rasche Koppelschwingung liegen die Verhältnisse dagegen nicht so einfach. Wir sahen ja früher, daß sie u. U. für größere Werte von x leichter zu erregen war als für unendlich kleine x . Für den Mindestwert von H muß uns Gleichung (77) offenbar eine Doppelwurzel liefern, und bei etwas kleineren Werten von H dürfen wir keine reellen Werte von x mehr bekommen. Wir werden also den Mindestwert von H erhalten, indem wir den Wurzelausdruck gleich Null setzen. Das gibt die Beziehung:

$$(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1 - \sigma)\gamma^2 = 0. \quad (79)$$

Wir können hierfür schreiben

$$\sigma\gamma^2 = \frac{1}{1 - \sigma} \left\{ \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \sigma\alpha\beta \right\}. \quad (80)$$

Die Gleichungen (75) ergeben durch einfache Ausrechnung

$$\left. \begin{aligned} \sigma\gamma^2 &= H^2\sigma - 2hH\sigma - 2H\sigma + 2h\sigma + h^2\sigma + \sigma \\ \frac{1}{1 - \sigma} \left\{ \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \sigma\alpha\beta \right\} &= H^2\sigma + 2hH\sigma - 2H\sigma - 2h + h^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

und daraus berechnet sich H zu:

$$H = \frac{1 + \sigma}{2\sigma} - \frac{1 - \sigma}{4\sigma} \cdot \frac{h^2 + 1}{h}. \quad (82)$$

(Für $\sigma = 0,8$ und $h = \frac{1}{2}$ ergibt das z. B. $H = \frac{31}{32}$.)

Wollen wir die Stelle x bestimmen, für die die erste Schwingungserregung möglich ist, so müssen wir (82) in Gleichung (77) einsetzen. Da die Wurzel verschwindet, haben wir einfach

$$x^2 = \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} \left[\gamma^2(2\sigma - 1) + \alpha\beta \right] \quad (83)$$

oder wegen (80)

$$x^2 = \frac{1}{\sigma(\gamma^2 - \alpha^2)} \left[\sigma^2\gamma^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right]. \quad (84)$$

Aus (75) folgt durch Ausrechnung

$$\sigma^2\gamma^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 = -2\sigma hH(1 - \sigma) + 2\sigma H(1 - \sigma) + 2h(1 - \sigma) - h^2(1 - \sigma) - (1 - \sigma)$$

und

$$\gamma^2 - \alpha^2 = 4\sigma H^2(1 - \sigma) - 4\sigma hH - 4H(1 - \sigma) + 4h;$$

und damit ergibt sich

$$x^2 = \frac{1 - 2\sigma hH(1 - \sigma) + 2\sigma H(1 - \sigma) + 2h(1 - \sigma) - h^2(1 - \sigma) - (1 - \sigma)}{4\sigma H^2(1 - \sigma) - 4\sigma hH - 4H(1 - \sigma) + 4h}. \quad (85)$$

Das läßt sich durch Einführen von (82), Wegheben von gemeinsamen Faktoren aus Zähler und Nenner und durch geeignete Zusammenfassungen vereinfachen zu

$$x^2 = \frac{2}{1 + \sigma} \frac{h(1 - h)}{(1 + h) \left(h - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right)}. \quad (86)$$

Man sieht leicht, daß dies nur dann einen reellen Wert von x ergibt, wenn h der Bedingung genügt:

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \leq h \leq 1. \quad (87)$$

Für $h = 1$ ist $x = 0$, für $h = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ ist $x = \infty$. Ist h größer als 1, so beginnen die Schwingungen der raschen Koppelwelle bei unendlich kleinen Werten von x ; ist h kleiner als $\frac{1-\sigma}{1+\sigma}$, so beginnen sie bei unendlich großen Werten von x . Liegt h jedoch zwischen $\frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ und 1, so setzen die Schwingungen zuerst ein für den durch (86) bestimmten Wert von x . (Für den Fall $\sigma = 0,8$ und $h = \frac{1}{2}$ liefert (86) den Wert $x = 0,69$, vergl. Bild 9.)