Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

1. Der Koebesche Verzerrungssatz gibt eine Vorstellung über die Maßstabänderung einer Figur, die einer schlichten konformen Abbildung unterworfen wird. Er lehrt, daß der Maßstab der Abbildung nicht allzu stürmisch von Ort zu Ort wechseln kann. Über die Stellungsänderung der einzelnen Linienelemente, also die Verdrehung oder die Verbiegung, welche die Figur bei der Abbildung erfährt, sagt der Satz nichts aus.

Aber erst eine Schätzung dieser Stellungsänderung zusammen mit der Schätzung der Maßstabänderung würde es erlauben, den ganzen Habitus des Bildbereiches durch den des Ausgangsbereiches schätzungsweise zu bestimmen.

In der Tat läßt sich nun die Stellungsänderung der Linienelemente, d. i. $\arg f'(z) = \Im \log f'(z)$ ¹⁾, schätzen. Diese Schätzung ist keine Folge des Verzerrungssatzes. Der *Drehungssatz* tritt vielmehr als selbständiger Satz neben den Verzerrungssatz, denselben in wesentlichen Stücken ergänzend.

Ich formuliere den Satz so:

Es gibt Funktionen $\varphi(r)$ derart, daß für $|z| \leq r < 1$ und jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

$$|\Im \log f'(z)| < \varphi(r)$$

ist. Man kann z. B.

$$\varphi(r) = 2 \log \frac{1+r}{1-r}$$

wählen.

¹⁾ Hier soll $\log f'(z)$ diejenige in $|z| < 1$ reguläre Funktion sein, für die $\log f'(0) = 0$ ist.

Für konvexe und für sternartige Bereiche habe ich diese Schranken wesentlich verbessern können. *Z. B. ist für konvexe Abbildungen*

$$\varphi(r) = 2 \arcsin r$$

die genaue Schranke.

2. Ich beginne mit dem Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Für jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

gilt

$$|f''(z)| \leq \frac{2(2+|z|)}{(1-|z|)^4},$$

eine Schranke, welche für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

erreicht wird.

Da nämlich für

$$F(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(\zeta)(1-\zeta\bar{z})}$$

$F'(0) = 1$ ist, und da diese Funktion in $|\zeta| < 1$ schlicht ist, so gilt²⁾

$$|F''(0)| = \left| \frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4.$$

Daher wird

$$|f''(z)| \leq \frac{2(2+|z|)}{1-|z|^2} |f'(z)|.$$

Da aber³⁾

$$|f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

²⁾ In meiner Abhandlung „Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln“, Sitzber. d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1916, S. 940–955, habe ich auf S. 945 mit Hilfe eines Faberschen Kunstgriffes aus meinem Flächensatz den Schluß gezogen, daß für jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

die Abschätzung $|a_2| \leq 2$ gilt. Auch beim Beweis des Verzerrungssatzes spielt dieser Satz eine wesentliche Rolle. (Vgl. die folgende Fußnote.) In dem dritten Bande dieser Zeitschrift (S. 65 bzw. S. 81) geben Löwner bzw. Frank und Löwner an, $|a_2| \leq 2$ lasse sich mit Hilfe einer Formel von Faber sicherstellen. Solange die Herren nicht angeben, welche der 18 Formeln der Faberschen Arbeit gemeint ist, muß ich diese Angabe bezweifeln. M. E. reicht der Fabersche Spezialfall des Flächensatzes, selbst kombiniert mit dem vorhin erwähnten Faberschen Kunstgriff, nicht aus. $|a_2| \leq 2$ sicher zu stellen.

³⁾ Vgl. G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz, Ber. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 68 (1916), S. 58–64, insbesondere S. 60, Formel (6*) und S. 946, Fußnote 2 meiner eben genannten Abhandlung.

ist, so haben wir wirklich:

$$|f''(z)| \leq \frac{2(2+|z|)}{(1-|z|)^4}.$$

3. Ich schließe sofort einen zweiten Hilfssatz an:

Unter den Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes gilt

$$|f'(z) - 1| \leq \frac{4|z| - 3|z|^3 + |z|^5}{(1-|z|)^3},$$

und diese Schranke wird für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

erreicht.

Es ist nämlich

$$f'(z) - 1 = \int_0^z f''(z) dz.$$

Daher wird

$$|f'(z) - 1| \leq \int_0^{|z|} |f''(re^{i\varphi})| dr \leq 2 \int_0^{|z|} \frac{2+|z|}{(1-|z|)^4} d|z| = \frac{4|z| - 3|z|^3 + |z|^5}{(1-|z|)^3}.$$

Für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

wird weiter

$$f'(z) - 1 = \frac{4z - 3z^3 + z^5}{(1-z)^3}.$$

Für $z = |z|$ wird also die angegebene Schranke erreicht.

4. Dieser eben bewiesene Hilfssatz ist schon ein Stück des Drehungssatzes. Wenn nämlich

$$|f'(z) - 1| \leq R \leq 1$$

ist, also die Werte von $f'(z)$ einem Kreise vom Radius R um Eins angehören, so ist offenbar

$$\arg f'(z) \leq \arcsin R,$$

wenn man denjenigen Zweig des Argumentes wählt, der für reelle positive Werte der Variablen Null ist. Da für kleine $|z|$

$$R = \frac{4|z| - 3|z|^3 + |z|^5}{(1-|z|)^3}$$

genommen werden kann, so schließt man, daß kein Element des Kreises

$$|z| < 0,16$$

um π oder mehr geschwenkt werden kann. Denn für $|z| < 0,16$ ist $R < 1$.

Damit ist der Drehungssatz für eine gewisse Umgebung von $z = 0$ bewiesen. Ich werde ihn nun weiter für die Umgebung einer beliebigen Stelle aus $|z| < 1$ beweisen und dann durch Kombination der Einzelresultate den allgemeinen Satz gewinnen.

5. Ich betrachte wieder

$$F(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(z)(1-z\bar{z})}.$$

Setzt man dann

$$m(\varrho) = \frac{4\varrho - 3\varrho^2 + \varrho^3}{(1-\varrho)^3},$$

so wird in $|\zeta| < \varrho$ nach 3.

$$|F'(\zeta) - 1| = \left| \frac{f'\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(z)} \left(\frac{1}{1+\zeta\bar{z}}\right)^2 - 1 \right| < m(\varrho).$$

Daher wird

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(z)} - (1+\zeta\bar{z})^2 \right| < m(\varrho)(1+\varrho|z|)^2.$$

Beschränkt man nun ζ auf den Kreisradius durch z , so daß also $\zeta\bar{z}$ positiv reell wird, so hat man hiernach

$$\left| \arg \frac{f'\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(z)} \right| \leq \arcsin \frac{m(\varrho)(1+\varrho|z|)^2}{(1+\zeta\bar{z})^2} = \arcsin \frac{m(\varrho)(1+\varrho|z|)^2}{(1+\varrho|z|)^2} = \arcsin m(\varrho)$$

Setzt man noch

$$\xi = \frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}},$$

so wird für zwei Punkte ξ, z eines und desselben Kreisradius, welche die kreisgeometrische Entfernung ϱ besitzen,

$$\left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{\varrho} \right| \leq \frac{1}{\varrho} \arcsin m(\varrho).$$

Daher gilt

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{\varrho} \right| \leq 4.$$

Der kreisgeometrischen Entfernung ϱ möge die euklidische Entfernung Δr entsprechen. Um die kreisgeometrische Entfernung zu bekommen, hat man nur

$$\xi = \frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}$$

nach ζ aufzulösen und $\varrho = |\zeta|$ zu setzen. So findet man

$$\varrho = \left| \frac{\xi-z}{1-\xi\bar{z}} \right| = \frac{\Delta r}{1-\xi\bar{z}}.$$

Daher wird

$$\lim_{|r| \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{dr} = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Daraus folgt weiter

$$\lim_{|r| \rightarrow 0} \left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{dr} \right| = \left| \frac{d \arg f'(re^{i\eta})}{dr} \right| \leq \frac{4}{1 - r^2}.$$

Führt man daher eine Funktion $\vartheta(r)$ ein, die durch

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{4}{1 - r^2} \quad \text{und} \quad \vartheta(0) = 0$$

erklärt ist, setzt man also

$$\vartheta(r) = 2 \log \frac{1+r}{1-r},$$

so ist man sicher, daß stets

$$|\arg f'(z)| = |\Im \log f'(z)| \leq \vartheta(r)$$

ist.

Denn für jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

gilt nach unseren Darlegungen

$$\left| \frac{d \arg f'(re^{i\eta})}{dr} \right| \leq \frac{4}{1 - r^2}.$$

Daher wird auch

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Ich will den Fortschritt, der seit dem zweiten Hilfssatz im Drehungssatz erzielt wurde, an einem Beispiel erläutern. Es zeigt sich nämlich jetzt, daß für $|z| < 0,65$ die Drehung noch unter π bleibt. Kein Linienelement dieses Kreises wird um mehr als π geschwenkt, d. h. bei Durchlaufung der Bildkurve eines Kreisradius dreht sich dessen Tangente um weniger als π .

6. Ich will nun die Frage entscheiden, ob die gefundene Drehungsschranke die genaue ist, ob es also Funktionen gibt, deren Drehung der nach unserer Abschätzung möglichen nahekommt.

Wenn man durch ein Vielfaches von

$$\log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

abschätzen will, so kann kein kleinerer Faktor als 2 vor diesen Ausdruck treten. Denn für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

wird

$$f'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Setzt man hier $z = ir$ ein, so wird

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Im \log \frac{1+ir}{(1-ir)^3}}{r} = 4$$

so wie auch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \log \frac{1+r}{1-r}}{r} = 4$$

ist. Die gefundene Schranke ist also jedenfalls für $z \rightarrow 0$ asymptotisch richtig. Für $|z| \rightarrow 1$ ist sie, wie man an einem Beispiel zeigen kann, höchstens doppelt so groß, als sie sein dürfte. Dies lehrt die Funktion

$$f(z) = e^{\frac{(1+i) \log \frac{1+z}{1-z}}{2(1+i)}}.$$

Sie bildet $|z| < 1$ schlicht ab. Denn

$$\log \frac{1+z}{1-z}$$

führt $|z| < 1$ in einen Streifen der Breite π über, welcher zur reellen Achse parallel orientiert und zu Null symmetrisch ist. Die 45° -Linie durchsetzt ihn in der Länge $\pi\sqrt{2}$. Multipliziert man den Streifen mit $1+i$, so wird er um 45° gedreht und zugleich auf das $\sqrt{2}$ -fache vergrößert. Die genannte Linie kommt also auf die imaginäre Achse zu liegen und erhält die Länge 2π . Der gedrehte Streifen enthält also keine zwei Stellen, deren Koordinaten sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Daher wird der Streifen durch die Exponentialfunktion und also $|z| < 1$ durch unser $f(z)$ schlicht abgebildet. Außerdem wird

$$f'(z) = e^{(1+i) \log \frac{1+z}{1-z}} \cdot \frac{1}{1-z^2}.$$

Daher ist $f'(0) = 1$ und längs der positiven reellen Achse ist

$$\Im \log f'(z) = \log \frac{1+z}{1-z}.$$

Die beiden eben gefundenen Ergebnisse könnten die Hoffnung erwecken, daß die gefundene Schranke die genaue sei. Aber das ist nicht der Fall. Denn die Schranke ist durch die äußersten Werte bestimmt, welche

$$\frac{d \arg f'(r e^{i\varphi})}{dr}$$

annehmen kann. Sie kann daher nur dann für ein gewisses $|z|$ durch eine gewisse Funktion $f(z)$ erreicht werden, wenn sie auch für alle klei-

neren z von derselben Funktion erreicht wird. Dann müßte also auch für eine solche Funktion

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 4$$

sein. Nun aber ist

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + \dots,$$

$$\log f'(z) = -2a_2 z + \dots$$

Da mit $f(z)$ auch $e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z)$ in $|z| < 1$ schlicht ist, dürfen wir a_2 positiv reell annehmen. Daher wird

$$\Im \log f'(z) = -2a_2 |z| \sin \arg z + \dots$$

Also ist

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 2a_2.$$

Da aber⁴⁾ $|a_2| < 2$ ist und nur für

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\varphi} z)^2}$$

den Wert zwei erhält, so finden wir, daß nur für diese Funktion

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 4$$

wird. Dies wäre also die einzige Funktion für welche die gefundene Schranke erreicht werden könnte. Tatsächlich aber wird sie für diese Funktion nicht erreicht, da bei dieser Schlitzabbildung stärkere Schwenkungen als $\frac{3\pi}{2}$ überhaupt nicht vorkommen können.

Es gibt weiter auch keine Funktionenfolge, deren Glieder in einzelnen Punkten der Schranke beliebig nahe kommen könnten. Denn dann müßte aus den schon dargelegten Gründen die Folge wieder gegen

$$\frac{z}{(1 - e^{i\varphi} z)^2}$$

konvergieren. Aber keine Nachbarfunktion dieser Funktionen führt zu Drehungen, welche unserer Schranke beliebig nahe kommen. So habe ich also im Drehungssatz für beliebige schlichte Abbildungen eine einigermaßen gute, aber doch nicht die bestmögliche Abschätzung erhalten.

7. Zu völlig abschließenden Ergebnissen bin ich bei den *konvexen Abbildungen* gelangt. Wenn eine Funktion $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär ist, diesen Kreis auf ein konvexes schlichtes Polygon von höchstens n Seiten

⁴⁾ a. a. O. ¹²⁾.

abbildet und dazu noch den Bedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ genügt, so kann man sie bekanntlich so schreiben:

$$f(z) \equiv \int_0^z (1 - e^{i\alpha_1} z)^{\mu_1} \dots (1 - e^{i\alpha_n} z)^{\mu_n} dz.$$

Dabei sind die α_k und μ_k reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} \mu_k &\leq 0 \\ \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k &= -2 \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

genügen. Dann wird

$$\arg f'(z) = \sum \mu_k \arg(1 - e^{i\alpha_k} z).$$

Da aber die Punkte

$$1 - e^{i\alpha_k} z$$

einem Kreise vom Radius $|z|$ um $z = 1$ angehören, so wird

$$|\arg(1 - e^{i\alpha_k} z)| \leq \arcsin |z|.$$

Daher haben wir

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \arcsin |z|.$$

Im ganzen Einheitskreis gilt also z. B.

$$|\arg f'(z)| \leq \pi,$$

Bei konvexen Abbildungen kommen also größere als Kehrtschwenkungen nicht vor. In der Tat gelten nämlich die gefundenen Abschätzungen nicht nur für die Abbildung auf konvexe n -Ecke, sondern für beliebige konvexe Abbildungen. Denn die gewonnene Schranke ist von der Eckenzahl unabhängig und man kann eine jede konvexe Abbildung mit beliebiger Genauigkeit durch konvexe Polygonabbildungen approximieren.

Die gefundene Abschätzung ist die genaue. Denn die Funktion

$$\omega = \frac{z}{1-z},$$

welche $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(\omega) > -\frac{1}{2}$ abbildet, liefert

$$\arg \omega' = -2 \arg(1 - z).$$

Für geeignet gewählte z wird sonach

$$\arg \omega' = 2 \arcsin |z|.$$

Tatsächlich werden auch Radien von $|z| < 1$, welche gegen die positive reelle Achse schwach geneigt sind, in Halbkreisbogen übergeführt, welche in schwacher Neigung gegen die positive reelle Achse beginnen und senkrecht zu $\Re(\omega) = -\frac{1}{2}$ münden.

8. Unter einem *Stern* mit dem Mittelpunkt $z = 0$ verstehen wir mit Mittag-Leffler einen Bereich, der von jeder Geraden durch $z = 0$ in nur je einer Strecke geschnitten wird. Herr Alexander⁵⁾ hat die natürlich leicht beweisbare Bemerkung gemacht, daß

$$W(z) = \frac{z}{\omega'(z)}$$

dann und nur dann $|z| < 1$ auf einen Stern mit dem Mittelpunkt $z = 0$ abbildet, wenn $\omega(z)$ eine konvexe schlichte Abbildung desselben Kreises liefert⁵⁾. Soll aber $\omega(z)$ konvex abbilden, so muß bekanntlich⁶⁾

$$\Re\left(1 + \frac{z\omega''}{\omega'}\right) \geq 0,$$

d. h. es muß

$$\left|\arg\left(1 + \frac{z\omega''}{\omega'}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}$$

sein. Daraus folgt

$$|\arg(W'(z))| = |\arg(\omega' + z\omega'')| \leq 2 \arcsin |z| + \frac{\pi}{2}.$$

Man kann indessen diese Abschätzung wesentlich verschärfen, wenn man auf

$$1 + \frac{z\omega''}{\omega'}$$

die unter dem Namen Lindelöf'sches Prinzip bekannte Folgerung aus dem Schwarz'schen Lemma anwendet.

Da nämlich

$$\zeta = 1 + \frac{z\omega''}{\omega'}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf $\Re \zeta > 0$ abbildet, so wird durch diese Funktion $|z|r < 1$ auf das Innere desjenigen Kreises abgebildet, in den $|z| < r$ durch

$$\zeta = \frac{2z}{1-z} + 1$$

⁵⁾ J. W. Alexander, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of mat. 2 ser. vol. 17 (1915), S. 12–22. Die Bedingung dafür, daß $\omega(z)$ konvex und die dafür, daß $z\omega'(z)$ auf einen Stern abbildet, lautet nämlich beide Male dahin, daß $\arg(z\omega'(z))$ bei Durchlaufung des Einheitskreises monoton um 2π wächst.

⁶⁾ E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. Herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke. Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Leipzig 1913, S. 109. Ein einfacher Beweis verläuft so. Bei Durchlaufung des Einheitskreises muß

$$\arg(z\omega'(z)) = \Im \log(z\omega')$$

monoton wachsen. Daher ist die Ableitung positiv. Das ergibt

$$\Im \left(1 + \frac{e^{i\varphi}\omega''}{\omega'}\right) = \Re \left(1 + \frac{e^{i\varphi}\omega''}{\omega'}\right) \geq 0.$$

übergeführt wird. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt bei

$$\frac{-r}{1+r} + 1 + \frac{r}{1-r} = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

und sein Radius ist

$$\frac{2r}{1-r^2}.$$

Daher wird für $|z| < r$

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z \omega''}{\omega'} \right) \right| \leq \arcsin \frac{2r}{1+r^2}.$$

Daher wird nun also

$$|\arg W'(z)| \leq |\arg \omega'| + \left| \arg \left(1 + \frac{z \omega''}{\omega'} \right) \right|$$

die gewünschte genauere Abschätzung. Sie lehrt wie die vorige ungenauere, daß in $|z| < 1$

$$|\arg W'(z)| \leq \frac{3\pi}{2}$$

ist. Das ist eine genaue Schranke, die für

$$W(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

erreicht wird. Denn diese Funktion bildet $|z| < 1$ auf die längs der negativen reellen Achse von $-\frac{1}{4}$ bis ∞ begrenzte Vollebene ab. Bei dieser Schlitzabbildung wird aber ein gegen die positive reelle Achse schwach geneigter Kreisradius in einen Kurvenbogen übergeführt, der in schwacher Neigung gegen die positive reelle Achse beginnt und senkrecht zum Schlitz mündet. Seine Tangente dreht sich also um nahezu $\frac{3\pi}{2}$.

9. Wenn so auch unsere Abschätzung für das ganze Innere des Einheitskreises die genaue Schranke liefert, so ist doch damit für die kleineren konzentrischen Kreise nicht die genaue Schranke gewonnen. Soll nämlich für irgendein z in der Abschätzung das Gleichheitszeichen stehen, so muß in den beiden Abschätzungen

$$|\arg \omega'| \leq 2 \arcsin |z|,$$

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z \omega''}{\omega'} \right) \right| \leq \arcsin \frac{2|z|}{1+|z|^2}$$

für ein und dasselbe z das Gleichheitszeichen stehen. Damit aber in der zweiten der beiden Abschätzungen das Gleichheitszeichen gilt, muß nach dem Schwarzschen Lemma

$$1 + \frac{z \omega''}{\omega'} = 1 + \frac{2z}{1-z}$$

sein. Das liefert

$$\omega' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Tatsächlich ist dann ja

$$\left| \arg \left(1 + \frac{2z}{1-z} \right) \right| = \arcsin \frac{2|z|}{1+|z|^2}$$

für ein geeignet gewähltes z . Für dasselbe z müßte dann aber auch

$$\left| \arg \frac{1}{(1-z)^2} \right| = 2 \left| \arg \left(\frac{1}{1-z} \right) \right| = 2 \arcsin |z|$$

sein. Daher müßte bei den beiden linearen Abbildungen

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}$$

ein und derselbe Punkt des Kreises $|z| = r$ so verschoben werden, daß er unter den Bildpunkten aller Punkte dieses Kreises $|z| = r$ das größte Argument bekommt. Man sieht aber leicht, daß diese äußerste Lage bei

$$\frac{1+z}{1-z}$$

die Punkte $\pm i r$ erhalten, während es bei

$$\frac{1}{1-z}$$

die Punkte sind, in welchen die von 1 ausgehenden Tangenten den Kreis $|z| = r$ berühren. Man erkennt beides ganz mühelos durch geometrisches Studium der Abbildung.

Die gefundene Schranke ist also noch zu hoch.

10. Die Schwierigkeit, die sich eben der vollen Erledigung des Sternproblems entgegenstellte, scheint dieselbe zu sein, wie die, welche sich darbietet, wenn es gilt, den Einfluß der Randgestalt des Bildbereiches auf Verzerrung oder Drehung zu studieren. Dahin gehört etwa die Behandlung der konvexen beschränkten Bereiche oder die Abbildung von $|z| > 1$ auf das Äußere des Profils eines Flugzeugflügels. Die Wichtigkeit, die diese Abbildung für die Theorie der Tragfähigkeit eines Flugzeuges hat, hat Herr von Mises⁷⁾ erkannt. Eine scharfe Abschätzung der Drehung würde es erlauben, die Abschätzung der Tragfähigkeit, die Mises a. a. O. gegeben hat, noch weiter zu treiben. Denn es würde dann möglich sein, festzustellen, aus welchem Punkt von $|z| = 1$ näherungsweise die Ecke des Profils entspringt.

⁷⁾ v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebes I, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, Heft 21/22.