Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion.

Von H. Opitz in Berlin.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 8. Juni 1922.)

Die geometrisch-optischen Untersuchungen, betreffend die durch ein Prisma hervorgerufenen Dispersionerscheinungen, haben die Differentialformel

$$d\varepsilon_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta \cos \varepsilon_1} dn$$

zur Grundlage, welche man aus den bekannten für ein Prisma geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon &= n \sin \beta \\ \sin \varepsilon_1 &= n \sin \beta_1 \\ \varphi &= \beta + \beta_1\end{aligned}$$

leicht herstellen kann. Um eine Übersicht über die Erscheinungen zu bekommen, muß man aber den funktionalen Zusammenhang durchsichtiger gestalten, indem man eine passende unabhängige Veränderliche einführt. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, den Einfallswinkel ε hierfür zu wählen, wodurch man die Zerstreuungsfunktion

$$\pi(\varepsilon; \varphi, n) = \frac{n \sin \varphi}{\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}_1}$$

erhält, in welcher, den Veränderlichen ε und ε_1 , entsprechend,

$$\mathcal{A} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_1 = \sqrt{1 - (\sin \varepsilon \cos \varphi - \mathcal{A} \cdot \sin \varphi)^2}$$

zu setzen sind. Der Name für diese Funktion wird dadurch gerechtfertigt, daß das Integral

$$\mathcal{A} \varepsilon_1 = \int_{n_1}^{n_2} \pi(\varepsilon; \varphi, n) dn$$

den Zerstreuungswinkel zu ermitteln gestattet, welchen ein auf das Prisma fallender Strahl, der noch keine Dispersion erlitten hatte, nach der zweimaligen Brechung bildet¹⁾.

Die nähere Untersuchung der Eigenschaften dieser Funktion gibt ein vortreffliches Bild von dem Gange der Dispersionerscheinungen. Es empfiehlt sich aber, wegen der äußerst verwickelten Rechnungen, welche die höheren Ableitungen der Funktion darbieten, bei der Diskussion neben der ersten Derivierten die graphische Darstellung zu Hilfe zu nehmen, indem man für die veränderlichen Parameter n und φ gegebene Werte in die Funktion eingehen läßt²⁾.

¹⁾ Elster-Geitel-Festschrift, Braunschweig 1915, S. 307—312.

²⁾ Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 240—249, 1915. Dieser Vortrag ist vor Erscheinen der Festschrift gehalten worden.

Die Vorteile dieses Verfahrens sind neuerdings von H. Erfle bestritten worden, indem er sich dabei auf den für den sogenannten kritischen Prismenwinkel durch eine leider unvollständige Induktion von mir erhaltenen falschen Wert stützt¹⁾. Es läßt sich jedoch zeigen, daß dieser kritische Winkel aus der Zerstreuungsfunktion ohne Benutzung einer kubischen Gleichung unmittelbar durch die erste Ableitung auf einfachere Art zu erhalten ist, als es bei Erfle geschehen ist.

Um den Verlauf der Zerstreuungsfunktion zu erkennen, bildet man zunächst

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} = \frac{n \sin \varphi}{2 \mathcal{A}^3 \mathcal{A}_1^3} [\sin 2\varepsilon \{1 - n^2 \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi (n^2 - 2 \sin^2 \varepsilon)\} \\ - \cos \varepsilon \sin 2\varphi (n^2 - 4 \sin^2 \varepsilon) \cdot \mathcal{A}].$$

Man sieht dann sofort, daß diese Ableitung für alle Werte ε , welche der Bedingung $\varepsilon \leq 0$ unterworfen sind, negativ sein muß, d. h. für diese Werte ε muß die Zerstreuungskurve fallen, kann also kein Extremum haben²⁾. Es ist nämlich

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = - \frac{n \sin \varphi \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}} < 0,$$

und aus der Beschaffenheit der π -Funktion ergibt sich weiter, daß für alle negativen Werte ε , d. h. für diejenigen Einfallswinkel, bei welchen der Einfallsstrahl mit der brechenden Kante des Prismas auf derselben Seite des Einfallslotes liegt, diese Funktion mit negativ wachsendem Argument bis ins Unendliche wächst, wenn

$$\sin \varepsilon \cos \varphi - \mathcal{A} \cdot \sin \varphi = \pm 1$$

¹⁾ ZS. f. Instrkde. 39, 280—288 und 297—312, 1919.

²⁾ Diese Diskussion erschien hier notwendig, weil H. Erfle in meinen Arbeiten Untersuchungen über das Vorzeichen des aus $\sin^2 \varepsilon$ hergeleiteten Einfallswinkels ε vermißt hat. Ich verdanke den richtigen Wert $\varepsilon = 45^\circ$ der Festschrift (Note 1, S. 243) weder dem „Zufall“, noch liegt der Fehler in der Berechnung des kritischen Prismenwinkels in meinem Vortrage (Note 2, S. 243) da, wo ihn Erfle gesucht hat [vgl. a. a. O. S. 286—287]. Die falsche Deutung der Gleichung

$$\cos^3 \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{n^2 - 1}{4 n^2}$$

ist vielmehr die Folge eines fehlerhaften Induktionsschlusses meinerseits, verursacht durch Wertetabelle und graphische Darstellung. Diese Gleichung gibt für einen Wert n einen Wert φ , für welchen das Minimum der Ablenkung einen Einfallswinkel ε hat, der zugleich Lösung der kubischen Gleichung ist, welche sonst das Zerstreuungsminimum zu ermitteln gestattet (Verh. S. 246—247 als Beispiel). Erfle hat zwar meinen Fehler gefunden, die Ursache aber nicht. In den Verh. streiche man im Text auf S. 244 die letzten sieben Zeilen und beachte die Bemerkung in Fußnote 2 auf S. 243 dieser Mitteilung.

wird, oder wenn für die absoluten Beträge

$$|\sin \varepsilon| = |\cos \varphi - \sqrt{n^2 - 1} \cdot \sin \varphi|$$

ist. Extremale Werte kann die Funktion also nur für positive ε -Werte haben, oder

Maxima und Minima der Dispersion kann es nur für solche Einfallsstrahlen geben, die durch das Einfallslot von der brechenden Kante des Prismas getrennt werden.

Dies wird durch die graphische Darstellung¹⁾ bestätigt (Fig. 1).

Wertetabelle zu Fig. 1. $n_E = 1,785254$.

ε	$\varphi = 10^0$	20^0	30^0	$32^0 52' 47''$	40^0	$45^0 4' 39''$	50^0	60^0	$68^0 7' 54''$
$-46^0 43' 9''$	∞								
-40^0	0,481								
-30	0,295								
$25^0 42' 51''$		∞							
-20^0	0,231	0,898							
-10	0,199	0,540							
$7^0 16' 18''$			∞						
$-2 \quad 7 \quad 4$				∞					
0^0	0,183	0,432	1,109	2,203					
$+10^0$	0,176	0,384	0,745	0,950					
$10^0 38' 10''$					∞				
$19 \quad 56 \quad 18$						∞			
20^0	0,177	0,363	0,625	0,740	1,303	18,268			
$29^0 20' 53''$							∞		
30^0	0,184	0,359	0,575	0,658	0,963	1,448	6,398		
40	0,198	0,367	0,558	0,625	0,844	1,103	1,623		
50	0,218	0,384	0,559	0,618	0,797	0,981	1,267		
$51^0 19' 43''$								∞	
60^0	0,244	0,405	0,572	0,625	0,782	0,931	1,139	6,369	
70	0,272	0,432	0,589	0,639	0,782	0,914	1,086	3,564	
80	0,296	0,451	0,603	0,651	0,787	0,909	1,066	2,848	
90	0,306	0,458	0,608	0,657	0,790	0,909	1,061	1,673	∞

Die Kurven, welche bei gegebenem Brechungsindex n für verschiedene Prismenwinkel φ erhalten werden, zeigen den Charakter von Funktionen dritten Grades, d. h. sie haben zwischen zwei extremalen Werten einen Wendepunkt. Die Extrema finden für diejenigen Werte ε statt, welche den Gleichungen

$$\cos \varepsilon = 0$$

$$2 \sin \varepsilon (1 - n^2 \sin^2 \varphi + n^2 \cos 2 \varphi - 2 \sin^2 \varepsilon \cos 2 \varphi)$$

$$= \sin 2 \varphi (n^2 - 4 \sin^2 \varepsilon) \cdot \Delta$$

¹⁾ Diese graphische Darstellung bildet eine Ergänzung und Verbesserung derjenigen auf S. 248 des S. 243, Note 2 genannten Vortrages. Der kritische Prismenwinkel φ würde, wenn nicht n_E , sondern $n_H = 1,818597$ benutzt worden wäre, dem einzigen von E. Block in seiner Dorpater Dissertation vom Jahre 1873 (S. 41) angegebenen Werte $43^0 45' 39''$ gleichkommen.

Fig. 1. Die Zerstreuungsfunktion für verschiedene Prismen aus Guynardschem Flintglase (ε -Linie).

Fig. 3. Die Zerstreuungskurven für drei typische Fälle zu dem kritischen Prismenwinkel.

Fig. 2. Der kritische Prismenwinkel als Funktion von n^2 .

genügen. Während also für alle Kurven, die überhaupt Extrema haben, ein Maximum für $\varepsilon = 90^\circ$ besteht, nähern sich mit wachsendem φ für die Minima die ε -Werte dem erstgenannten, und bei $\varepsilon = 90^\circ$ fallen die ausgezeichneten Punkte zusammen, wenn φ denjenigen Wert erreicht hat, über den hinaus es keine Extrema für die Kurven mehr gibt, φ ist dann der kritische Prismenwinkel. Er läßt sich danach aus der Gleichung

$$1 - n^2 \sin^2 \varphi + (n^2 - 2) \cos 2 \varphi = \sin \varphi \cos \varphi (n^2 - 4) \sqrt{n^2 - 1}$$

berechnen.

Je nachdem man nun $\sin \varphi$ oder $\cos \varphi$ ausschließlich einführt, erhält man entweder

$$n^6 \sin^4 \varphi - (n^2 - 1)(n^4 - 2n^2 + 8) \sin^2 \varphi + (n^2 - 1)^2 = 0$$

oder

$$n^6 \cos^4 \varphi - (n^6 + 3n^4 - 10n^2 + 8) \cos^2 \varphi + (2n^2 - 3)^2 = 0.$$

Diese quadratischen Gleichungen für $\sin^2 \varphi$ und $\cos^2 \varphi$ liefern

$$\sin^2 \varphi = \frac{n^2 - 1}{2n^6} [n^4 - 2n^2 + 8 + (4 - n^2) \sqrt{n^4 + 4}]$$

und

$$\cos^2 \varphi = \frac{n^6 + 3n^4 - 10n^2 + 8 - (n^2 - 1)(4 - n^2) \sqrt{n^4 + 4}}{2n^6}.$$

Durch Division würde man erhalten

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(n^2 - 1)(4 - n^2 + \sqrt{n^4 + 4})^2}{4(2n^2 - 3)^2},$$

und damit

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{n^2 - 1} \cdot \frac{4 - n^2 + \sqrt{n^4 + 4}}{2(2n^2 - 3)}.$$

Über das Vorzeichen von $\sqrt{n^4 + 4}$ ist zunächst zu bemerken, daß in den Formeln für $\sin^2 \varphi$ und $\cos^2 \varphi$ die Zeichen wegen der Relation $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ entgegengesetzt gewählt werden mußten. Da ferner

$$n^4 - 2n^2 + 8 > (4 - n^2) \sqrt{n^4 + 4}$$

ist, so erhält man jedenfalls für $\sin \varphi$ zwei reelle Werte, denen zwei Winkel φ_1 und φ_2 entsprechen, je nachdem $+\sqrt{n^4 + 4}$ oder $-\sqrt{n^4 + 4}$ genommen wird. Von den obigen Formeln zur Berechnung von φ ist diejenige für $\sin^2 \varphi$ vorzuziehen, weil sie für die logarithmische Rechnung die bequemste ist. Hiernach ist $\sin^2 \varphi$ eine Funktion von n^2 , welche für $n^2 = 1$ den Wert 0, für $n^2 = 4$ den Wert 0,375 annimmt. Wenn n^2 weiter wächst, so folgt, da

$$\lim_{n^2 \rightarrow \infty} \sin^2 \varphi = 0 \text{ oder } 1$$

ist, je nachdem $\sqrt{n^4 + 4}$ positiv oder negativ genommen wird, daß die beiden φ -Kurven, nachdem sie sich im Punkte ($n^2 = 4$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 37^\circ 45' 40''$) geschnitten haben, sich der Abszissenlinie $\varphi = 0$ und der Geraden $\varphi = 90^\circ$ asymptotisch nähern (Fig. 2).

Wertetabelle zu Fig. 2.

n^2	n	$\varphi_1 = \bar{\varphi}$	φ_2
1	1,00	180°	0°
2	1,41	67° 33' 58''	22° 26' 2''
3	1,73	47 20 55	31 33 20
4	2,00	37 45 40	37 45 40
5	2,24	32 3 55	42 22 12
6	2,45	28 14 44	45 57 40
6,25	2,50	27 28 32	46 44 28
7	2,65	25 28 48	48 51 26

Allgemein wird der kritische Prismenwinkel in seiner Abhängigkeit von n^2 nur durch die φ_1 -Kurve dargestellt, welche dem Ausdruck für $\sin^2 \varphi$ mit $+\sqrt{n^4 + 4}$ entspricht. Wenn $n^2 < 4$ ist, so ist $\varphi_1 > \varphi_2$; dagegen ist $\varphi_1 < \varphi_2$, wenn $n^2 > 4$ ist. Die kritische Kurve, die Zerstreuungskurve für $\bar{\varphi}$, ist immer die φ_1 -Kurve, denn für Werte $n^2 < 4$ zeigt die φ_2 -Kurve stets getrennte Zerstreuungsmaxima und -minima, dagegen für $n^2 > 4$ überhaupt keine Extrema. Diese drei typischen Fälle werden für Guynandsches Flintglas ($n = 1,785$), für $n = 2$ und für den Diamant ($n = 2,5$) in Fig. 3 dargestellt. Die einzige Kurve im Falle $n = 2$ hat für $\varepsilon = 90^\circ$ ihr Minimum, ebenso wie die anderen $\bar{\varphi}$ -Kurven.

Wertetabelle zu Fig. 3.

ε	$n = 2,5$ $\bar{\varphi}_1 = 27^\circ 28' 32''$	$n = 1,785$ $\varphi_2 = 32^\circ 52' 47''$	$n = 2$ $\bar{\varphi} = 37^\circ 45' 41''$	$n = 1,785$ $\bar{\varphi}_1 = 45^\circ 4' 39''$	$n = 2,5$ $\varphi_2 = 46^\circ 44' 28''$
90°	0,365	0,657	0,734	0,909	1,835
80	0,365	0,651	0,735	0,909	2,211
70	0,366	0,639	0,737	0,914	∞
60	0,370	0,625	0,748	0,931	(71° 59')
50	0,381	0,618	0,779	0,981	
40	0,411	0,625	0,852	1,103	
30	0,462	0,658	1,033	1,448	
20	0,612	0,740	1,770	18,268	
10	3,743	0,950	∞	∞	
0	∞ (9° 50')	2,203 ∞ (-2° 7')	(15° 39')	(19° 56')	

Hiermit glaube ich denjenigen Teil seiner Kritik, in welchem H. Erfle sich in dankenswerter Weise um die Klarstellung der vorliegenden Aufgabe bemüht hat, genügend beleuchtet zu haben. Wenn

ich dennoch bei dieser Gelegenheit auf die weiteren Ausführungen meines Kritikers näher eingehe, so geschieht es, um unrichtige Behauptungen in einigen wesentlichen Punkten auf ihr richtiges Maß zurückzuführen. So findet man z.B. bei H. Erfle folgenden Satz¹⁾:

„Es ist somit bewiesen, daß die Anwendung einer kubischen Gleichung zur Bestimmung von i_1 (Opitz) oder auch von i_2 (Ditscheiner) überflüssig ist, da die Gleichung (12) viel schneller zu lösen ist, insbesondere wenn man die Näherungswerte (36) bzw. (37) benutzt.“

Nun stellt er im Anschluß an (12) die Gleichung (30)

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg} (i_1' - \alpha) = \operatorname{tg} (\alpha - 2 i_1')$$

auf, welche doch sicherlich in Beziehung auf $\operatorname{tg} i_1'$ vom dritten Grade ist. Er löst sie nicht exakt, sondern approximativ, was natürlich bei jeder kubischen Gleichung möglich ist. Solche Methoden zur Lösung auszuschließen, hatte ich mir aber ausdrücklich vorgenommen²⁾. Soviel über Abschnitt III der Erfleschen Arbeit.

Was den Abschnitt IV anbelangt, bei dem es sich in erster Linie um die größte Dispersion handelt, d.i. um den Fall $\pi(\varepsilon) = \infty$, so will ich zuvörderst auch hier zeigen, daß die diesen Abschnitt betreffenden Deduktionen die an den Anfang dieser Mitteilung gestellte Differentialformel und damit die Zerstreuungsfunktion zum Ausgangspunkt haben.

Nach der genannten Formel ist nämlich

$$\cos \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} dn = \frac{n \sin \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}} dn,$$

wofür man auch setzen kann:

$$d \sin \varepsilon_1 = \sin \varphi \cdot d(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}).$$

Integriert man zwischen den die Randstrahlen des Zerstreuungswinkels bestimmenden Brechungsexponenten n_1 und n_2 , wobei $n_2 > n_1$ vorausgesetzt wird, d.h. bildet man

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d \sin \varepsilon_1 = \sin \varphi \int_{n_1}^{n_2} d(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}),$$

¹⁾ a. a. O., S. 300. — Was die Bezeichnung der Größen betrifft, so ist zu setzen: $\alpha = \varphi$, $i_1 = \varepsilon$, $i_1' = \beta$, $i_2 = \beta_1$, $i_2' = \varepsilon_1$.

Es wäre erfreulich, wenn Erfle auf seine Anregung hin eine einheitliche Bezeichnung erreichen könnte. Man pflegt aber jetzt wohl allgemein Winkelgrößen durch griechische Buchstaben zu bezeichnen. Weshalb Erfle, trotzdem er meine Arbeiten gekannt hat, für $\pi(\varepsilon)$ das Funktionszeichen ψ eingeführt hat, vermag ich nicht zu beurteilen.

²⁾ a. a. O., S. 241 der Verh.

indem man mit ε_1 und ε_2 die den Werten n_1 und n_2 zugehörigen Austrittswinkel bezeichnet, so erhält man

$$\sin \varepsilon_2 - \sin \varepsilon_1 = \sin \varphi \left[\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varepsilon} - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varepsilon} \right],$$

wofür man noch setzen kann:

$$\sin \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} = \frac{\sin \varphi}{2 \cos \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}} \left[\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varepsilon} - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varepsilon} \right].$$

Diese Formeln bilden den Ausgangspunkt der Erfleschen Deduktionen, indem er, unter Benutzung der Reihenentwicklung nach Taylor für die Wurzelgröße, Näherungsformeln aufstellt, die ihn sofort zu dem angeblich wichtigen Ergebnis führen, daß bei nahezu senkrechtem Austritt $\left(\cos \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} = 1 \right)$ die Dispersion der Differenz der Brechungs-exponenten bei gegebenem n und φ proportional ist¹⁾.

Für die größte Dispersion $[\pi(\varepsilon) = \infty]$ hat nun H. Erfle nach dieser Methode eine Näherungsformel aufgestellt, deren Rechnungsergebnisse er mit den von E. Block berechneten Werten vergleicht, um den Wert der Formel festzustellen²⁾. Ich dagegen hatte gezeigt, wie man mittels der Zerstreuungsfunktion solche Größen verhältnismäßig einfach genau ermitteln kann. Das Integral³⁾

$$\Delta \varepsilon_1 = \int_{n_1}^{n_2} \frac{n \sin \varphi}{\Delta \cdot \Delta_1} dn$$

läßt sich durch Einführung der Veränderlichen

$$v = \sin \varepsilon \cos \varphi - \Delta \cdot \sin \varphi$$

an Stelle von n sofort umformen in

$$\Delta \varepsilon_1 = \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \arcsin v_1 - \arcsin v_2.$$

¹⁾ Man vergleiche hiermit die Ergebnisse von A. Mousson, die mit sehr einfachen Mitteln erzielt sind. — Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zürich 1881, II, 2, S. 418.

²⁾ a. a. O., S. 306/7.

³⁾ Dieses Integral hat nicht den Beifall meines Kritikers gefunden. Er nennt es aber doch „die zweckmäßig umgeformte Gl. (4)“ (a. a. O., S. 288). Er hat nicht bedacht, daß es sich hier um ein funktionentheoretisches Problem handelt, welches — technisch ausgedrückt — zu einer independenten Darstellung für den Zerstreuungswinkel führen sollte und geführt hat. Unter Berücksichtigung der Bemerkung in Fußnote 2 auf S. 243 ist es wohl klar, daß die wirkliche Bedeutung der neu eingeführten Veränderlichen v nicht besonders hervorgehoben zu werden brauchte. Der gerügte Druckfehler besteht übrigens nicht, da Vertauschung der Grenzen eines bestimmten Integrals Vorzeichenänderung nach sich zieht.

Im Falle $\pi(\varepsilon) = \infty$ ist nun $\nu = -1$. Die Randstrahlen sollen die Brechungsexponenten $n_2 = n_H = 1,818597$ und $n_1 = n_E = 1,769702$ haben. Der Fall $\varphi = 40^\circ$, in welchem die Zerstreuungswinkel bei Erfle und Block den größten Unterschied zeigten, soll hier durchgerechnet werden. Den Einfallswinkel ε findet man aus der Gleichung

$$\sin \varepsilon \cos \varphi - \mathcal{A} \cdot \sin \varphi = \nu_2 = -1$$

durch Auflösung nach $\sin \varepsilon$:

$$\sin \varepsilon = -\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sqrt{n^2 - 1}.$$

Man erhält für n_H und $\varphi = 40^\circ$: $\sin \varepsilon = 0,2103857$, $\varepsilon = 12^\circ 8' 31''$. Jetzt berechnet man $\nu_1 = \sin \varepsilon \cos \varphi - \mathcal{A} \cdot \sin \varphi = 0,161127 - 1,129479$, indem man in $\mathcal{A}$ für n die Größe n_E einsetzt. Es folgt $\nu_1 = -0,968352$. Mithin ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \varepsilon_1 &= -\arcsin 0,968352 + \arcsin 1 \\ &= 90^\circ - 75^\circ 32' 48'' = 14^\circ 27' 12''. \end{aligned}$$

Block hatte gefunden $\varepsilon = 12^\circ 6' 50''$, $\mathcal{A} \varepsilon_1 = 14^\circ 21' 35''$ und ist von Erfle verbessert worden zu $\varepsilon = 12^\circ 8' 26''$, $\mathcal{A} \varepsilon_1 = 14^\circ 27' 0''$. Dagegen hat Erfle durch seine Näherungsformel $\mathcal{A} \varepsilon_1 = 14^\circ 26' 15''$ ermittelt, was gegen den oben genau berechneten Wert eine Differenz von $57''$ ausmacht. Und die Rechnung nach der Erfleschen Näherungsformel ist wohl kaum einfacher, als die soeben durchgeführte.

Auf weitere Beispiele will ich nicht eingehen, sondern erlaube mir, auf die am Schluß meines Vortrages angeführten Rechnungen zu verweisen, wo auch der Fall des streifenden Ein- und Austritts der Strahlen erwähnt ist, den H. Erfle ebenfalls nur unter Benutzung der Zerstreuungsfunktion hat behandeln können.

Zusammenfassung. 1. Die in meinen Arbeiten über das Minimum der Dispersion angestrebte übersichtliche funktionentheoretische Behandlung hatte einen Fehler aufzuweisen, welcher den sogenannten kritischen Prismenwinkel betraf, d.i. den Winkel, der — wenn er überschritten wird — keine Extrema für die Dispersion mehr zuläßt. Es wird der möglichst einfache Weg zur Bestimmung dieses Grenzwinkels gegeben.

2. Die dankenswerte Kritik, welche H. Erfle zur Entdeckung des Fehlers geführt hat, wird durch Besprechung einiger Beispiele auf ihr richtiges Maß zurückgeführt, und es wird gezeigt, daß die prismatischen Dispersionerscheinungen die beste Grundlage in einer Differentialformel und in der sogenannten Zerstreuungsfunktion haben.

Berlin, im Mai 1922.