**6. Theoretisches über den Starkeffekt in der
Fowlerschen Heliumserie;
von Paul S. Epstein.**

§ 1. *Einleitung.* — Neben der Balmerreihe des Wasserstoffs sind die von Pickering und Fowler gefundenen, von Bohr dem ionisierten Helium¹⁾ zugeordneten Serien die einzigen, deren Entstehen uns vom Standpunkte der Bohrschen Theorie²⁾ in allen Einzelheiten klar ist. Das einfach ionisierte Heliumatom ist nämlich vollständig „wasserstoffähnlich“: es besteht aus einem Kern und einem einzigen Elektron und erfüllt damit die Voraussetzungen sowohl der Sommerfeldschen Theorie der Feinstrukturen³⁾ als auch der vom Verfasser gegebenen Theorie des Starkeffektes⁴⁾, und in der Tat haben die Paschenschen Messungen an diesen Heliumlinien für die Prüfung und Bestätigung der ersteren eine grundlegende Rolle gespielt.

Neuerdings liegen auch Messungen über den *Starkeffekt* an Linien der Fowlerreihe

$$(1) \quad \nu = N \left\{ \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \right\}, \quad m = 4, 5, 6, \dots$$

1) Hr. J. Stark bezeichnet diese Serien als die des *doppelt* ionisierten Heliums. Vom Standpunkte der Quantentheorie ist dies insofern gerechtfertigt, als die Vorbedingung für das Leuchten eines Atoms darin besteht, daß sich das Elektron nicht mehr in der Normallage befindet, sondern in eine äußere Bahn bzw. ins Unendliche entfernt ist. Während des Leuchtvorganges selbst fällt aber diesem Elektron gerade die wesentliche Rolle zu, so daß es unzweckmäßig wäre, es als außerhalb des Atomverbandes stehend zu bezeichnen. In diesem Sinne sagen wir, daß die Träger der Fowlerreihe *einfach* ionisiert sind, und folgen damit dem in der Quantentheorie eingebürgerten Sprachgebrauche.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1. 476 u. 857. 1913.

3) A. Sommerfeld, Münch. Ber. p. 459. 1915; Ann. d. Phys. 51. p. 1, 125. 1916.

4) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 50. p. 489. 1916. — Diese Arbeit wird im folgenden mit l. c. zitiert.

vor. Nachdem Evans und Croxson¹⁾ im elektrischen Felde eine Verbreiterung der Grundlinie ($m = 4$; 4686 Å) gefunden hatten, konnte Nyquist²⁾ eine Aufspaltung derselben erhalten und ausmessen. Nunmehr ist es J. Stark und seinen Mitarbeitern³⁾ unter Überwindung großer experimenteller Schwierigkeiten gelungen, auch die Zerlegung der zweiten ($m = 5$; 3203 Å) und dritten ($m = 6$; 2733 Å) Linie dieser Serie zu beobachten.

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist, die Prüfung der Quantentheorie an dem neuen wertvollen Material durchzuführen. Zunächst wird die Lage der elektrischen Komponenten in derselben Weise berechnet, wie dies l. c. für die ersten Linien der Balmerreihe geschehen ist (§ 2). Das so gewonnene Bild der Aufspaltung gibt zwar bereits einige Züge der Beobachtungen wieder, läßt sich aber noch nicht im einzelnen mit denselben vergleichen, weil es sich um eine experimentelle *Grobzerlegung* handelt. Bei einer solchen gelangen schwächere Linien gelegentlich nicht zur Beobachtung, während mehrere starke eventuell zusammenfließen, so daß man als Maximum der Schwärzung auf der Platte nur ihren gemeinsamen Schwerpunkt feststellen kann. Daher genügt es für die Theorie nicht, die Lage der Komponenten zu bestimmen; man muß auch ihre relative Lichtstärke kennen. Glücklicherweise sind neuerdings von Bohr⁴⁾ Gesichtspunkte entwickelt worden (§ 3), welche eine Berechnung der Intensitäten gestatten. Dementsprechend gestalten sich die nachstehenden Rechnungen auch zu einer Prüfung der hochwichtigen neuen Bohrschen Theorie, deren Hauptverdienst es ist, die Kluft zwischen den Auffassungen der Quantentheorie und der klassischen Elektrodynamik wesentlich verengert zu haben.

Es sei vorweggenommen, daß die Ergebnisse der Prüfung durchaus zugunsten der Theorie ausfallen. Der Vergleich mit

1) E. J. Evans and C. Croxson, Phil. Mag. 82. p. 327. 1916.

2) H. Nyquist, Phys. Rev. 10. p. 226. 1916.

3) J. Stark, O. Hardtke u. G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 569. 1918. — Durch Hrn. Prof. Starks Freundlichkeit war mir diese Abhandlung schon in der Korrektur zugänglich.

4) N. Bohr, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Naturvidensk. Afd., 8. Raekke, IV. p. 1.

Mit einem Stern sind die Komponenten bezeichnet, bei deren Entstehen die sehr wenig wahrscheinlichen Pendelbahnen (l. c.) mitwirken, weshalb sie nur mit sehr geringen Intensitäten auftreten können. Zwei Sterne bedeuten, daß sowohl die Anfangs- als die Endbahn unter diese Kategorie fallen.

Die Beobachtung durch Nyquist ergab für diese Linie Intensitätsmaxima bei

$$p: \Delta\lambda = 3,2 \text{ \AA}, \quad s: \Delta\lambda = 0 \text{ \AA}.$$

Linie 3203										
	$Z = 16$	14	12	11	10	9	8	7	6	5
$p: \Delta \lambda =$	5,3**	4,6	4,0	—	3,3	—	2,6	—	2,0	—
$s: \Delta \lambda =$				3,6*	—	3,0	—	2,3	—	1,6
		4	3		2	1	0			
		1,3	—		0,66	—	0 Å			
		—	1,0	—		0,33	—			

Nach Messungen von J. Stark und seinen Mitarbeitern:

$$p: \Delta\lambda = 3,8 \text{ \AA}, \quad s: \Delta\lambda = 1,9 \text{ \AA}.$$

Linie 2733										
	$Z = 27$	24	21	18	15	12	9	6	3	0
$p. \Delta\lambda =$	6,5**	5,8	5,0	4,3	3,6	2,9	2,2	1,4	0,72	0
$s: \Delta\lambda =$			5,0*	4,3	3,6	2,9	2,2	1,4	0,72	0

Beobachtet wurde:

$$p: \Delta\lambda = 5,1 \quad 1,2 \quad \text{\AA}$$

$$s: \Delta\lambda = \quad 3,7 \quad 0 \text{ ,,}$$

Die Erfahrungen an der Balmerreihe legen die Annahme nahe, daß in den p -Serien die äußersten Komponenten (ohne Stern) die stärksten sind, deren Lage das gemessene Schwärzungsmaximum ungefähr entsprechen muß. Innerhalb der Genauigkeit der Messungen, welche Stark mit 25 Proz. angibt, ist dies auch in der Tat der Fall. Bezüglich der s -Komponenten sind die Ergebnisse insofern befriedigend, als die Nulllage wirklich nur in den beiden Linien beobachtet wurde, in welchen sie nach der Theorie auftreten muß.

Indessen läßt sich, wie schon in der Einleitung hervorgehoben, ein eingehender Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung nur an der Hand der Intensitäten durchführen. Der Verfasser hatte l. c. für die Intensitätsverteilung die beiden folgenden Regeln aufgestellt: 1. Die zu Pendelbahnen

gehörigen (mit Sternen versehenen) Komponenten sind durchweg sehr schwach. 2. Vorbedingung für das Auftreten großer Intensitäten ist, daß eine der Quantendifferenzen $Q_1 = m_1 - n_1$ oder $Q_2 = m_2 - n_2$ ¹⁾, durch welche der betreffende Bohrsche Übergang gekennzeichnet ist, einen möglichst großen Wert erreicht (während die andere vermöge der Ungleichungen (4) positiv oder gleich Null bleibt). Die erste dieser Regeln, die ja durch die ausgezeichnete Stellung der Pendelbahnen von vornherein plausibel scheint, muß auch zur Ergänzung der weiter unten dargestellten Bohrschen Theorie beibehalten werden. Aber auch die zweite behält in gewissem Umfange ihre Gültigkeit, wenn man sie auf die p -Komponenten beschränkt: die größten Differenzen der Quantenzahlen spielen hier in der Tat für die Intensitätsfrage eine fundamentale Rolle, worauf wir noch in § 5 ausführlicher eingehen werden.

§ 3. *Die Bohrsche Theorie der Intensitäten.* — Bohr geht in seinen Überlegungen von dem Postulat aus, daß im Gebiete großer Wellenlängen die Ergebnisse der Quantentheorie und Elektrodynamik übereinstimmen müssen. Betrachten wir die bedingt periodische Bewegung eines Elektrons, so entsprechen bei Anwendung der Bohrschen Frequenzbedingung

$$(5) \quad \nu = A(m_1, m_2, m_3) - A(n_1, n_2, n_3)$$

auf Übergänge aus einer statischen Bahn (m_1, m_2, m_3) in eine andere (n_1, n_2, n_3) großen Wellenlängen große Werte der Quantenzahlen m und n , im Vergleiche zu denen die Differenzen Q_1, Q_2, Q_3 klein sind. Unter diesen Voraussetzungen muß uns nach dem Bohrschen Postulat Formel (5) genau dieselben Schwingungszahlen liefern, welche das Elektron bei seiner Bewegung in der Anfangs- oder Endbahn, die ja in der Grenze $m = n = \infty$ unendlich wenig voneinander abweichen, nach den Regeln der Elektrodynamik emittieren würde.

1) Ursprünglich war meine Meinung, daß auch der azimutalen Quantendifferenz $Q_3 = m_3 - n_3$ die gleiche Bedeutung zukomme. Es wurde aber bereits l. c. durch Einklammern angedeutet, daß diese eine Sonderstellung einnimmt. Für das Folgende scheidet der Wert von Q_3 als notwendige Bedingung großer Intensität aus, da nach Bohr (§ 5) Q_3 nur die Werte Null und ± 1 annehmen kann.

Welche Frequenzen sind aber nach der Elektrodynamik zu erwarten? Aus der Theorie der bedingt periodischen Bewegungen ist bekannt, daß der Zustand des Systems, also z. B. die jeweilige Entfernung s des Elektrons von einer festen Ebene, eine periodische Funktion von der Periodizität 2π geeignet gewählter Parameter, der sogenannten Winkelkoordinaten w_1, w_2, w_3 ist ($s = s(w_1, w_2, w_3)$), welche sich ihrerseits in linearer Abhängigkeit von der Zeit t befinden:

$$(6) \quad w_h = \Omega_h t + \delta_h, \quad (h = 1, 2, 3).$$

Eine periodische Funktion kann man aber stets in eine Fouriersche Reihe entwickeln

$$(7) \quad s = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ijk} \frac{\sin}{\cos} (i w_1 + j w_2 + k w_3),$$

oder nach (6)

$$s = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{ijk} \frac{\sin}{\cos} (i \Omega_1 + j \Omega_2 + k \Omega_3) t.$$

Die Bewegung des Elektrons stellt sich also als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der Frequenzen

$$(8) \quad 2\pi \nu_E = i \Omega_1 + j \Omega_2 + k \Omega_3$$

dar, wo die Indizes alle möglichen positiven und negativen Werte (doch so, daß die Bedingung $\nu \geq 0$ erfüllt bleibt) durchlaufen.

Finen ganz ähnlichen Ausdruck kann man vom Standpunkte der Quantentheorie gewinnen. Dabei macht man von dem Umstande Gebrauch, daß die den Winkelkoordinaten kanonisch konjugierten Impulse u_i konstant sind. Und zwar sind es gerade diejenigen Unveränderlichen, welche dem Planckschen Wirkungsquantum h proportional gesetzt werden (Schwarzschildsche Fassung der Quantenbedingungen):

$$u_i = n_i \frac{h}{2\pi}.$$

Die Gesamtenergie oder Hamiltonsche Funktion A ist eine Funktion der Größen u_i allein und von den Winkelkoordinaten w_i unabhängig.¹⁾ Daher ist die Änderung, welche

1) Vgl. P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 168. 1916.

die Gesamtenergie beim Übergang von einer Bahn zu einer benachbarten erfährt

$$\Delta A = \sum_1^3 i \frac{\partial A}{\partial u_i} \Delta u_i.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß man die Glieder zweiter und höherer Ordnung in Δu_i vernachlässigen kann, und das ist dann der Fall, wenn diese Differenzen gegen die Absolutwerte u_i klein sind, also im Bereiche langer Wellen. Nun gilt nach den kanonischen Gleichungen

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial A}{\partial u_i} = \Omega_i;$$

fassen wir dabei den Übergang von der statischen Bahn m_1, m_2, m_3 zur Bahn n_1, n_2, n_3 ins Auge, so ergibt dies zusammen mit den beiden vorangehenden Gleichungen

$$A(m_1, m_2, m_3) - A(n_1, n_2, n_3) = \frac{h}{2\pi} \sum_1^3 (m_i - n_i) \Omega_i,$$

und hieraus erhält man nach (5) für die Frequenz

$$(8') \quad 2\pi \nu_0 = (m_1 - n_1) \Omega_1 + (m_2 - n_2) \Omega_2 + (m_3 - n_3) \Omega_3.$$

Da die Ausdrücke (8) und (8') übereinstimmen sollen, können nur diejenigen Quantendifferenzen vorkommen, welche den Indizes i, j, k der Reihe (7) entsprechen. *Ist einer der Koeffizienten a_{ijk} gleich Null, so ist auch der entsprechende Bohrsche Quantenübergang unmöglich.* Diese Forderung enthält ein *Auswahlprinzip*, welches die Sommerfeldschen Ungleichungen (4) teilweise ersetzen kann. Darüber hinaus verlangt das Bohrsche Postulat, daß die vom Standpunkte der Elektrodynamik und Quantentheorie übereinstimmend berechnete Wellenlängen auch übereinstimmende Polarisationen und Intensitäten aufweisen. *Die Lichtstärke einer Komponente wird daher durch den entsprechenden Koeffizienten a_{ijk} der Fourierzerlegung (7) gegeben* (bzw. durch dessen Quadrat).

Was die Polarisationen betrifft, so zeigt Bohr allgemein, daß in einem Systeme von axialer Symmetrie die parallel der Achse verlaufenden Schwingungen lediglich die azimutale Quantendifferenz $Q_3 = 0$ enthalten können, diejenigen senkrecht zur Achse die Differenzen $Q_3 = \pm 1$. Dasselbe Resultat

hat unabhängig auch Rubinowicz¹⁾ aus einem auf dem Studium der Impuls- und Energieverhältnisse basierenden Gesichtspunkte erhalten, der noch weniger Hypothetisches enthält als die dargelegte Bohrsche Theorie und bei Bohr gleichfalls kurz angedeutet wird. Verfasser hat bei der Untersuchung des Starkeffektes in der Balmerreihe mit der Möglichkeit der Differenzen $Q_3 = 2, 3, 4$ gerechnet; es zeigt sich jedoch, daß keine Komponenten in Wegfall kommen, wenn man solche Übergänge ausschließt und sich auf $0, \pm 1$ beschränkt, wie wir es in § 6 sehen werden. Für die Theorie des Zeemaneffektes ist dieses allgemeine Ergebnis von Bohr und Rubinowicz von grundlegender Bedeutung, da es die von Sommerfeld²⁾ und Debye³⁾ gefundenen überzähligen Komponenten wegschafft; beim Starkeffekt gibt es eine Erklärung der vom Verfasser (l. c. p. 514) gefundenen Polarisationsregel.

§ 4. *Durchführung für den Starkeffekt.* — Wir wollen die in § 3 auseinandergesetzte allgemeine Methode im Falle des Starkeffektes im einzelnen durchführen. Zu diesem Zwecke fassen wir ein Elektron ins Auge, welches sich unter der Wirkung eines Coulombschen Kraftzentrums von der Ladung $+xe$ und eines ihm überlagerten homogenen elektrischen Feldes bewegt. Dabei knüpfen wir an l. c. p. 495 an und benutzen auch die dort eingeführten Bezeichnungen. Durch die parabolischen Koordinaten ξ, η drücken sich die vom Nullpunkte parallel zum elektrischen Felde ($\mathfrak{z}_p$) und senkrecht zu demselben ($\mathfrak{z}_s$) aufgetragenen Strecken wie folgt aus

$$(9) \quad \mathfrak{z}_p = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad \mathfrak{z}_s = \xi \eta \sin \varphi,$$

oder wenn wir von der Transformation (l. c. p. 503)

$$(10) \quad \begin{cases} \xi^2 = \frac{e^2 x}{A} \left(\sigma_1 u + \frac{x + \beta}{2x} \right), \\ \eta^2 = \frac{e^2 x}{A} \left(\sigma_2 v + \frac{x - \beta}{2x} \right) \end{cases}$$

Gebrauch machen

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{z}_p = \frac{e^2 x}{2A} \left(\sigma_1 u - \sigma_2 v + \frac{\beta}{x} \right), \\ \mathfrak{z}_s = \frac{e^2 x}{A} \sqrt{\left(\sigma_1 u + \frac{x + \beta}{2x} \right) \left(\sigma_2 v + \frac{x - \beta}{2x} \right)} \sin \varphi. \end{cases}$$

1) A. Rubinowicz, Physik. Zeitschr. 19. p. 445, 465. 1918.

A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 17. p. 491. 1916.

3) P. Debye, Phys. Zeitschr. 17. p. 507. 1916.

Dabei ist nach l. c. (45), (53), (55), (56) die Bedeutung der Buchstaben die folgende

$$(12) \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sqrt{n_1(n_1 + n_2)}}{n_1 + n_2 + n_3}, & \sigma_2 = \frac{\sqrt{n_2(n_2 + n_3)}}{n_1 + n_2 + n_3}, \\ A = \frac{2\pi^2 x^2 \mu e^4}{h^2} \frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2}, & \beta = x \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2 + n_3}, \quad \alpha = \frac{n_3 h}{2\pi \sqrt{\mu}}. \end{cases}$$

Wir haben nun $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_s$ zunächst durch die Konstanten der Bewegung auszudrücken, um diese später durch die Winkelkoordinaten zu ersetzen. Die Gleichungen der Bewegung sind nach l. c. (32) bis (34)

$$(13) \quad \begin{cases} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \beta', \\ \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{f_1(\xi)}} \frac{d\xi}{\xi^2} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{f_2(\eta)}} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}, \\ \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} (t - t_0).^{1)} \end{cases}$$

Im folgenden wollen wir uns auf die Betrachtung sehr schwacher elektrischer Felder beschränken und die Feldstärke gleich Null setzen. Das heißt, wir berücksichtigen das äußere Feld nur insofern, als durch dasselbe eine Richtung ausgezeichnet und die Auswahl der statischen Bahnen abgeändert wird, sehen aber von einer Beeinflussung der Bewegung durch dasselbe ab. Damit leisten wir auf die Untersuchung einer eventuellen Veränderung der Intensitätsverteilung bei Anwachsen des elektrischen Feldes Verzicht. Man muß aber im Auge behalten, daß die in § 3 dargelegte Theorie nur für den Grenzfall sehr großer Quantenzahlen streng gelten soll, während ihren Anwendungen auf die Verhältnisse der experimentell untersuchten Linien eine nur angenäherte Gültig-

1) L. c. habe ich als Grenzen der Integration 0 und ξ bzw. 0 und η angegeben. Hr. Geheimrat Planck machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß $\xi = 0$ und $\eta = 0$ imaginären Werten der Wurzeln entsprechen. In der dritten Gleichung ist der Faktor $1/\sqrt{\mu}$ ergänzt. — Zugleich sei ein anderer sinnstörender Schreibfehler berichtigt: l. c. in Formel (21) und (24) ist der Faktor $1/4$ zu streichen und dementsprechend in (22) $1/2$ statt $1/4$ zu schreiben.

keit zukommt. Andererseits beanspruchen auch die Angaben über die gemessenen Intensitäten keine große Genauigkeit, so daß es ungerechtfertigt wäre, eine unnötige Verfeinerung der Theorie durch eine starke Komplikation der Rechnungen zu erkaufen.

Im Grenzfall $E = 0$ erhalten die Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ nach l. c. (30) die Form

$$(14) \quad \begin{cases} f_1(\xi) = \sqrt{2e^2(\kappa + \beta) - 2A\xi^2 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}, \\ f_2(\eta) = \sqrt{2e^2(\kappa - \beta) - 2A\eta^2 - \frac{\alpha^2}{\eta^2}} \end{cases}$$

oder bei Einführung der Variablen u, v

$$(14') \quad f_1(\xi) = \frac{2\kappa e^2 \sigma_1}{\sqrt{2A} \cdot \xi} \sqrt{1 - u^2}, \quad f_2(\eta) = \frac{2\kappa e^2 \sigma_2}{\sqrt{2A} \cdot \eta} \sqrt{1 - v^2}.$$

Deshalb schreiben sich die Gleichungen (13)

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} &= 2\sqrt{2A}\beta', \\ \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sigma_1 u + \frac{\kappa + \beta}{2\kappa}} + \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sigma_2 v + \frac{\kappa - \beta}{2\kappa}} &= \frac{4e^2 \kappa}{\sqrt{2A}} \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}, \\ \int \frac{\sigma_1 u + \frac{\kappa + \beta}{2\kappa}}{\sqrt{1-u^2}} du + \int \frac{\sigma_2 v + \frac{\kappa - \beta}{2\kappa}}{\sqrt{1-v^2}} dv &= \frac{(2A)^{3/2}}{\kappa e^2 \sqrt{\mu}} (t - t_0). \end{aligned}$$

Die Integration der zweiten und dritten Gleichung liefert:

$$(15) \quad \begin{cases} \arcsin u - \arcsin v - 2\sqrt{2A}\beta', \\ \frac{\kappa + \beta}{\kappa} \arcsin u + \frac{\kappa - \beta}{\kappa} \arcsin v = 2\sigma_1 \sqrt{1-u^2} + 2\sigma_2 \sqrt{1-v^2} \\ \quad + \frac{2(2A)^{3/2}}{\kappa e^2} (t - t_0), \end{cases}$$

während die dritte mit der Substitution

$$(16) \quad u = \cos u, \quad v = \cos v$$

ergibt:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x + \beta - 2x\sigma_1}{x + \beta + 2x\sigma_1}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \\ &\quad - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x - \beta - 2x\sigma_2}{x - \beta + 2x\sigma_2}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen (15) und (17) lassen sich u , v und φ als Funktionen der Größen β' , φ_0 , $t - t_0$ ermitteln, und wir gehen jetzt dazu über, die Beziehungen der letzteren zu den Winkelkoordinaten w_1 , w_2 , w_3 anzugeben. Es gelten nämlich die Relationen¹⁾

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu}}(t - t_0) &= \omega_{11} w_1 + \omega_{21} w_2 + \omega_{31} w_3, \\ \varphi_0 &= \omega_{12} w_1 + \omega_{22} w_2 + \omega_{32} w_3, \\ e^2 \beta' &= \omega_{13} w_1 + \omega_{23} w_2 + \omega_{33} w_3, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\omega_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

bedeutet und mit α_1 , α_2 , α_3 bzw. $-A$, α , β bezeichnet werden. Unter u_i , schließlich, verstehen wir die Ausdrücke

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{f_1(\xi)} d\xi, \quad u_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{f_2(\eta)} d\eta, \quad u_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha d\varphi.$$

Die Integration läßt sich [z. B. mit Hilfe der Substitution (10)] leicht ausführen und liefert

$$(19) \quad u_1 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^2(x + \beta)}{\sqrt{2A}}, \quad u_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^2(x - \beta)}{\sqrt{2A}}, \quad u_3 = \alpha.$$

Dementsprechend schreiben sich die Beziehungen (18)

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu}}(t - t_0) &= -\frac{e^2}{2(2A)^{3/2}} [(x + \beta) w_1 + (x - \beta) w_2], \\ \varphi_0 &= -\frac{w_1 + w_2}{2} + w_3, \\ \beta' &= -\frac{1}{2\sqrt{2A}} (w_1 - w_2). \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. z. B. C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. I. p. 104. Leipzig 1902; oder auch P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 176. 1916. Die Definition der Größen ω weicht dort um den Faktor $2\pi\sqrt{\mu}$ von der hier benutzten ab.

Nunmehr können wir zu den Gleichungen (15) zurückkehren. Aus denselben erhalten wir eine erste Näherung für u und v , wenn wir beachten, daß die arcsin unbegrenzt wachsen, während die Glieder mit den Quadratwurzeln die Werte $2\sigma_1$, $2\sigma_2$ nie überschreiten. Wir können daher die letzteren Glieder zunächst vernachlässigen und erhalten, indem wir zugleich (20) berücksichtigen:

$$\arcsin u = -w_1, \quad \arcsin v = -w_2,$$

oder

$$u = -\sin w_1, \quad v = -\sin w_2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die vernachlässigten Glieder erhält man zur Berechnung der zweiten Näherung, welche für unsere Zwecke ausreicht, die Gleichungen

$$\arcsin u - \arcsin v = -w_1 + w_2,$$

$$(\kappa + \beta) \arcsin u + (\kappa - \beta) \arcsin v = 2\kappa\sigma_1 \cos w_1 + 2\kappa\sigma_2 \cos w_2 \\ - (\kappa + \beta) w_1 - (\kappa - \beta) w_2,$$

woher folgt:

$$(21) \quad \begin{cases} u = -\sin(w_1 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2), \\ v = -\sin(w_2 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2). \end{cases}$$

Es bleibt noch $\sin \varphi$ in Abhängigkeit von den Winkelkoordinaten zu bestimmen. Aus (17) und (10) folgt

$$\sin \varphi = \frac{e^2}{2A\xi\eta} \left\{ \sin \varphi_0 \left(a \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} - b \sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right) \right. \\ \left. - \cos \varphi_0 \left(c \sin \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} + d \cos \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right) \right\},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(22) \quad \begin{cases} a = \sqrt{\kappa + \beta + 2\kappa\sigma_1} \cdot \sqrt{\kappa - \beta + 2\kappa\sigma_2}, \\ b = \sqrt{\kappa + \beta - 2\kappa\sigma_1} \cdot \sqrt{\kappa - \beta - 2\kappa\sigma_2}, \\ c = \sqrt{\kappa + \beta - 2\kappa\sigma_1} \cdot \sqrt{\kappa - \beta + 2\kappa\sigma_2}, \\ d = \sqrt{\kappa + \beta + 2\kappa\sigma_1} \cdot \sqrt{\kappa - \beta - 2\kappa\sigma_2} \end{cases}$$

setzen. Hieraus

$$\sin \varphi = \frac{e^2}{8A\xi\eta} \{ (a-b-c+d) \sin(w_3-w_2) + (a-b+c-d) \cdot \sin(w_3-w_1) + (a+b-c-d) \cos(w_3-\sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) - (a+b+c+d) \cos(w_1+w_2-w_3-\sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) \}.$$

Damit ist unser Ziel, die Strecken $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_s$ durch die Winkelkoordinaten auszudrücken, erreicht. Führen wir noch die weiteren Abkürzungen ein:

$$(23) \quad \begin{cases} \tau_1 = \frac{e^2 \times \sigma_1}{2A}, & \tau_2 = \frac{e^2 \times \sigma_2}{2A}, \\ \gamma = \frac{e^2}{8A}(a+b-c-d), & \delta = \frac{e^2}{8A}(a+b+c+d), \end{cases}$$

so gewinnen sie die endgültige Gestalt:

$$(24) \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_p = -\tau_1 \sin(w_1 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) + \tau_2 \sin(w_2 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) + \text{const.} \\ \mathfrak{s}_s = \frac{e^2}{8A} [(a-b-c+d) \sin(w_3-w_2) + (a-b+c-d) \cdot \sin(w_3-w_1)] + \gamma \cos(w_3 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) - \delta \cos(w_1+w_2-w_3 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2). \end{cases}$$

§ 5. Spezialisierung für die Balmer- und Fowlerserien. —

Die soeben gewonnenen Ausdrücke sind, wie in § 3 ausgeführt wurde, in nach den Argumenten w_1, w_2, w_3 fortschreitende Fouriersche Reihen zu entwickeln. Berücksichtigt man die aus der Theorie der Zylinderfunktionen bekannten Reihen:

$$\cos(\sigma_1 \cos w_1) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i J_{2i}(\sigma_1) \cos 2i w_1,$$

$$\sin(\sigma_1 \cos w_1) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i J_{2i+1}(\sigma_1) \cos (2i+1) w_1,$$

(wobei durch $J_i(\sigma_1)$ die i -te Besselsche Funktion des Argumentes σ_1 bezeichnet ist und der Strich am Summenzeichen in üblicher Weise andeutet, daß das $i=0$ entsprechende Glied mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu verstehen ist), so erhält man die Entwicklung

$$\begin{aligned}
& -\sin(w_1 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) \\
& = \sum_0^{\infty} i' \sum_0^{\infty} j' (-1)^{i+j} J_{2i}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \{ \sin[(2i-1)w_1 + 2jw_2] \\
& \quad - \sin[(2i+1)w_1 + 2jw_2] + \sin[(2i-1)w_1 - 2jw_2] \\
& \quad - \sin[(2i+1)w_1 - 2jw_2] \} \\
& + \sum_0^{\infty} i' \sum_0^{\infty} j' (-1)^{i+j} J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \{ -\sin[2iw_1 + (2j+1)w_2] \\
& \quad + \sin[(2i+2)w_1 + (2j+1)w_2] - \sin[2iw_1 - (2j+1)w_2] \\
& \quad + \sin[(2i+2)w_1 - (2j+1)w_2] \} \\
& + \sum_0^{\infty} i' \sum_0^{\infty} j' (-1)^{i+j} J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \{ \cos[2iw_1 + 2jw_2] \\
& \quad + \cos[(2i+2)w_1 + 2jw_2] + \cos[2iw_1 - 2jw_2] \\
& \quad + \cos[(2i+2)w_1 - 2jw_2] \} \\
& + \sum_0^{\infty} i' \sum_0^{\infty} j' (-1)^{i+j} J_{2i}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \{ \cos[(2i-1)w_1 + (2j+1)w_2] \\
& \quad + \cos[(2i+1)w_1 + (2j+1)w_2] + \cos[(2i-1)w_1 - (2j+1)w_2] \\
& \quad + \cos[(2i+1)w_1 - (2j+1)w_2] \};
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der für ganzzahlige p geltenden Beziehung

$$J_{-p}(\sigma) = (-1)^p J_p(\sigma),$$

aus welcher sich

$$\sum_0^{\infty} i' (-1)^i [f(i) + f(-i)] J_{2i}(\sigma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} i' (-1)^i f(i) J_{2i}(\sigma)$$

und

$$\begin{aligned}
& \sum_0^{\infty} i' (-1)^i [f(2i+1) + f(-2i-1)] J_{2i+1}(\sigma) \\
& = \sum_{-\infty}^{+\infty} i' (-1)^i f(2i+1) J_{2i+1}(\sigma)
\end{aligned}$$

ergibt, läßt sich die Schreibweise wesentlich vereinfachen:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & -\sin(w_1 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) \\ & = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+j} \{ J_{2i}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \sin [(2i-1)w_1 + 2jw_2] \\ & \quad - J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \sin [2iw_1 + (2j+1)w_2] \\ & \quad + J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \cos [2iw_1 + 2jw_2] \\ & \quad + J_{2i}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \cos [(2i-1)w_1 + (2j+1)w_2] \}. \end{aligned} \right.$$

Ganz analog gelangt man zu den beiden Entwicklungen:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & \cos(w_3 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) \\ & = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+j} \{ J_{2i}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \cos [2iw_1 + 2jw_2 + w_3] \\ & \quad - J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \cos [(2i+1)w_1 + (2j+1)w_2 + w_3] \\ & \quad + J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \sin [(2i+1)w_1 + 2jw_2 + w_3] \\ & \quad + J_{2i}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \sin [2iw_1 + (2j+1)w_2 + w_3] \}, \end{aligned} \right.$$

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & \cos(w_1 + w_2 - w_3 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2) \\ & = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+j} \{ J_{2i}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \cos [(2i+1)w_1 \\ & \quad + (2j+1)w_2 - w_3] - J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \cos [(2i+2)w_1 \\ & \quad + (2j+2)w_2 - w_3] + J_{2i+1}(\sigma_1) J_{2j}(\sigma_2) \sin [(2i+2)w_1 \\ & \quad + (2j+1)w_2 - w_3] + J_{2i}(\sigma_1) J_{2j+1}(\sigma_2) \sin [(2i+1)w_1 \\ & \quad + (2j+2)w_2 - w_3] \}. \end{aligned} \right.$$

Die Entwicklung von $-\sin(w_2 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2)$ ergibt sich aus (25), wenn man die Indizes 1 und 2 vertauscht.

Nach § 3 entsprechen die Koeffizienten der Winkelkoordinaten w_1, w_2, w_3 beziehungsweise den Quantendifferenzen $Q_1 = m_1 - n_1, Q_2 = m_2 - n_2, Q_3 = m_3 - n_3$. Wir sehen, daß unserer Polarisationsregel entsprechend bei den parallel polarisierten Komponenten, deren Lichtstärke durch die Glieder der Entwicklung von $\mathfrak{F}_p$ gegeben wird, die azimutale Quantendifferenz Q_3 verschwindet, während sie bei den senkrecht polarisierten ($\mathfrak{F}_s$) die Werte ± 1 annimmt. Die Koeffizienten (K) der einzelnen Glieder haben die folgende Gestalt.

1. Linien H_a und 4636.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1.$$

a) p -Komponenten.

Q_1	Q_2	Q_3	$K =$
4	-3	0	$-2 \left(\frac{4 \tau_1}{\sigma_1} + \frac{3 \tau_2}{\sigma_2} \right) J_4(\sigma_1) J_3(\sigma_2),$
3	-2	0	$2 \left(\frac{3 \tau_1}{\sigma_1} + \frac{2 \tau_2}{\sigma_2} \right) J_3(\sigma_1) J_2(\sigma_2),$
2	-1	0	$-2 \left(\frac{2 \tau_1}{\sigma_1} + \frac{\tau_2}{\sigma_2} \right) J_2(\sigma_1) J_1(\sigma_2),$
1	0	0	$2 \frac{\tau_1}{\sigma_1} J_1(\sigma_1) J_0(\sigma_2).$

b) s -Komponenten.

3	-3	1	$-\gamma J_3(\sigma_1) J_3(\sigma_2) + \delta J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2),$
2	-2	1	$\gamma J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2),$
1	-1	1	$-\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2),$
0	0	1	$\gamma J_0(\sigma_1) J_0(\sigma_2) + \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2).$
4	-2	-1	$\gamma J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_3(\sigma_2),$
3	-1	-1	$-\gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2),$
2	0	-1	$\gamma J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2),$
1	1	-1	$\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_0(\sigma_1) J_0(\sigma_2).$

Unter Zuhilfenahme der bereits benutzten Beziehung

$$J_{-p}(\sigma_2) = (-1)^p J_p(\sigma_2)$$

kann man die zusammengestellten Ausdrücke auf die folgende allgemeine Form bringen:

a) p -Komponenten,

Q_1	Q_2	Q_3	$K =$
p	$-p+1$	0	$2 \left(p \frac{\tau_1}{\sigma_1} + (p-1) \frac{\tau_2}{\sigma_2} \right) J_p(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2).$

b) s -Komponenten.

p	$-p$	1	$\gamma J_p(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2) + \delta J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2),$
$p+1$	$-p+1$	-1	$\gamma J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2) + \delta J_p(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2).$

Wir haben hier nur den Fall $Q_1 \geq Q_2$ betrachtet, weil der andere aus diesem durch bloße Vertauschung der Indizes 1 und 2 der Konstanten σ, τ hervorgeht. Für die übrigen Linien lauten die analogen Ausdrücke:

2. Linien H_β und 8203.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2.$$

a) p -Komponenten.

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ p+1 & -p+1 & 0 \end{array} \quad K = \tau_1 [J_p(\sigma_1) - J_{p+2}(\sigma_1)] J_{-p+1}(\sigma_2) + \tau_2 J_{p+1}(\sigma_1) [J_{-p+2}(\sigma_2) - J_{-p}(\sigma_2)].$$

b) s -Komponenten.

$$\begin{array}{ccc} p+1 & -p & 1 \\ p+2 & -p+1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2) - \delta J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2), \\ \gamma J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2) - \delta J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2). \end{array}$$

Die besonders einfachen Ausdrücke für H_γ wollen wir im Interesse einiger später zu machender allgemeiner Bemerkungen ausführlich hinschreiben.

3. Linien H_γ und 2788.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3.$$

a) p -Komponenten.

$$\begin{array}{ccc} 6 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2 \left(\frac{6\tau_1}{\sigma_1} + \frac{8\tau_2}{\sigma_2} \right) J_6(\sigma_1) J_3(\sigma_2); \\ 2 \left(\frac{5\tau_1}{\sigma_1} + \frac{2\tau_2}{\sigma_2} \right) J_5(\sigma_1) J_2(\sigma_2), \\ -2 \left(\frac{4\tau_1}{\sigma_1} + \frac{\tau_2}{\sigma_2} \right) J_4(\sigma_1) J_1(\sigma_2), \\ 2 \cdot \frac{3\tau_1}{\sigma_1} J_3(\sigma_1) J_0(\sigma_2), \\ 2 \left(\frac{2\tau_1}{\sigma_1} - \frac{\tau_2}{\sigma_2} \right) J_2(\sigma_1) J_1(\sigma_2). \end{array}$$

b) s -Komponenten.

$$\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma J_5(\sigma_1) J_3(\sigma_2) - \delta J_6(\sigma_1) J_2(\sigma_2), \\ -\gamma J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2) + \delta J_5(\sigma_1) J_1(\sigma_2), \\ \gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) - \delta J_4(\sigma_1) J_0(\sigma_2), \\ -\gamma J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2), \\ -\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) - \delta J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2), \\ \gamma J_6(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_5(\sigma_1) J_3(\sigma_2), \\ -\gamma J_5(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2), \\ \gamma J_4(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2), \\ \gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2), \\ \gamma J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2) + \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2). \end{array}$$

5. Linie H_1 .

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4.$$

a) p -Komponenten.

$$\begin{array}{rcl} p+2 & -p+2 & 0 \\ \tau_1 [J_{p+1}(\sigma_1) - J_{p+3}(\sigma_1)] J_{-p+2}(\sigma_2) \\ & - \tau_2 J_{p+2}(\sigma_1) [J_{-p+1}(\sigma_2) - J_{-p+3}(\sigma_2)]. \end{array}$$

b) s -Komponenten.

$$\begin{array}{rcl} p+2 & -p+1 & 1 \\ p+3 & -p+2 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2) - \delta J_{p+3}(\sigma_1) J_{-p+2}(\sigma_2), \\ \gamma J_{p+3}(\sigma_1) J_{-p+2}(\sigma_2) - \delta J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2). \end{array}$$

Betrachtet man das durch diese Ausdrücke gegebene Verteilungsgesetz und beachtet, daß die Größen σ_1, σ_2 ihrer Definition (12) nach stets ≤ 1 sind, so zeigt es sich, daß die negativen Differenzen Q_1 (bzw. Q_2) entsprechenden Komponenten nur mit sehr schwachen Intensitäten vorkommen können. Die beiden ersten Sommerfeldschen Quantengleichungen ergeben sich demnach als eine Intensitätserscheinung näherungsweise auch bei Bohr. Sehen wir von negativen Differenzen Q_1, Q_2 ab, so zeigen die p - und s -Reihen ein verschiedenes Verhalten: Bei den ersteren haben die Intensitätsausdrücke caeteris paribus den größten numerischen Wert, wenn die Differenzen Q_1 (oder Q_2) ihren größten Wert erreichen und fallen mit Abnahme derselben ab, wie man es besonders deutlich an der ausführlich mitgeteilten Reihe für H_1 erkennt. Dies ist der mathematische Grund einer vom Verfasser empirisch aufgestellten, aber zu weit verallgemeinerten Regel (l. c. p. 516). Innerhalb der durch die Q_1 gegebenen Stufen werden die Intensitäten durch die Werte der Konstanten τ, σ geregelt, und fallen die letzteren ungünstig aus, so kann der Ausdruck K trotz großer Differenz Q_1 klein bleiben; es handelt sich also um eine notwendige, aber nicht hinreichende Vorbedingung für die Lichtstärke, wie bereits l. c. ausgeführt wurde. Komplizierter verhalten sich die s -Komponenten: Das Maximum liegt hier nicht beim größten Q_1 , sondern bei den beiden darauf folgenden Stufen, welche Intensitäten von der gleichen Größenordnung ermöglichen. Es genügt hier also eine große Reihe (innerer) Komponenten den notwendigen Bedingungen maximaler Lichtstärke, so daß die wesentliche Rolle in der Intensitätsbestimmung den Konstanten γ, δ, σ zufällt.

Über die Festlegung dieser Konstanten, von denen σ_1, σ_2 durch die Gestalt und Lage der Bahnellipse, $\tau_1, \tau_2, \gamma, \delta$ im wesentlichen durch ihre Dimensionen (große Achse) bestimmt werden, ist noch ein Wort zu sagen. Im Grenzfall großer Wellenlängen, von welchem Bohr ausging, wenn man die Anfangs- und Endbahn als identisch betrachten kann, sind sie eindeutig gegeben. Dagegen sind sie in den praktisch wichtigeren Fällen für die Anfangs- und Endbahn verschieden, und es entsteht die Frage, welche Werte man dem Übergang aus der einen in die andere zuschreiben soll. Es ist zuzugeben, daß in der Auswahl dieser Mittelwerte eine gewisse Willkür liegt; indessen zeigte es sich, daß bei der Durchrechnung für einzelne Linien nach verschiedenen Methoden der Mittelung, welche dem Verfasser besonders plausibel schienen, die Resultate nicht sehr erheblich auseinander gingen. Aus diesem Grunde wurde nicht so sehr das begrifflich konsequenteste, als das praktisch bequemste Verfahren für die etwas mühsamen Rechnungen ausgewählt, welches darin besteht, in die Intensitätsformeln die arithmetischen Mittel aus den für Anfangs- und Endbahn gültigen Werten der Konstanten $\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \delta$ einzusetzen.

§ 6. *Ergebnisse für die Balmerserie.* — Die Bohrsche Theorie der Intensitäten ist nur im Gebiete großer Wellenlängen a priori überzeugend. Wie weit es berechtigt ist, sie auf den Bereich kürzerer Wellenlängen zu übertragen, kann nur an der Erfahrung geprüft werden. Aus diesem Grunde wollen wir zunächst die Berechnungen für die Linien der Balmerserie den sorgfältigen Messungen der Starkschen Feinzerlegung dieser Linien¹⁾ gegenüberstellen.

H_α					
p-Komp.			s-Komp.		
Z	K (ber.)	Int. (gem.)	Z	K (ber.)	Int. (gem.)
13	0,001**	—	11	0,0 ⁸ 4*	—
9	0,06*	—	10	0,0 ⁸ 4*	—
8	0,02	—	7	0	—
7	0,02*	—	6	0,06	—
5	1,14**	—	5	0,05	—
4	0,98	1,2	4	0,02*	—
3	89	1,1	3	—	—
2	39	1	2	0*	—
1	25*	—	1	1,27	1
0	—	—	0	2,29	2,6

1) J. Stark, Gött. Nachr. p. 427. 1914; Ann. d. Phys. 48. p. 193. 1915.

H_{β}				
p -Komp.			s -Komp.	
Z	K (ber.)	Int. (gem.)	K (ber.)	Int. (gem.)
20	0,0 ^{21**}	—	—	—
18	—	—	0,0 ^{22*}	—
16	0,1*	—	0,0 ^{23*}	—
14	0,05	—	0*	—
12	8,4 ^{24**}	1	0,13	1
10	12,4	11,5	0,05	1,1
8	4,6	9,1	0,04*	1,3
6	2,6	4,8	7,4	9,7
4	1,1*	1	4,4	12,6
2	0,5	1,2	2,4	3,3
0	0	1,4	0,9 *	1,4

H_{γ}					
p -Komp.			s -Komp.		
Z	K (ber.)	Int. (gem.)	Z	K (ber.)	Int. (gem.)
29	0,0 ^{25**}	—	27	0,00*	—
25	0,2*	—	24	0,00*	—
22	0,1	—	23	0*	—
21	20 ^{26**}	1 (fr.)	20	0,07	1
19	0,1*	—	17	0,04	1,1
18	11,0	10,8	16	0*	—
15	6,5	7,2	14	0,01*	—
12	1,5	2,0	13	10,6	6,1
11	0,3*	—	10	4,4	4,3
9	0,6*	—	7	1,9	1,2
8	0,4	1	6	2,5*	—
5	2,9	1,5	4	0,8*	—
2	1,7	1,6	3	5,8	3,6
1	0,6*	—	0	3,6	7,2

H_{δ}					
p -Komp.			s -Komp.		
Z	K (ber.)	Int. (gem.)	Z	K (ber.)	Int. (gem.)
40	0,00 ^{27**}	—	38	0,000*	—
36	0,1*	—	34	0,000*	—
32	16,0 ^{28**}	1 (fr.)	20	0,04	1 (fr.)
28	7,2	7,2	26	0,02	1,3
24	3,6	2,8	22	0,58	2,4
20	0,6	1,1	18	28	2,0
16	0,8	1,2	14	8	1
12	3,2	1,5	10	40	2,1
8	1,0	1,2	6	52	3,2
4	0,8	1	2	16	1,3
0	0	—			

Die Werte K für die p - und s -Komponenten einer Linie sind in denselben Einheiten angegeben, während die Stark-schen Intensitäten *nicht* von Reihe zu Reihe vergleichbar sind.

Die Komponenten oberhalb der horizontalen Striche würden bei Anwendung der Ungleichungen (4) ausfallen. Ist als Wert der berechneten Intensität 0 ohne weitere Dezimalstellen angegeben, so bedeutet dies, daß die Rechnung zum exakten Nullwert geführt hat.

Im allgemeinen laufen die gemessenen Intensitäten den berechneten K in befriedigender Weise parallel. Wie wir schon in § 4 hervorhoben, handelt es sich weder bei den experimentellen noch den theoretischen Angaben um strenge Bestimmungen der Lichtstärke, sondern nur um eine mehr oder weniger qualitative Bewertung derselben; man muß also nicht auf die Absolutwerte der Zahlen achten, sondern nur auf deren Gang, die Lage der Maxima und Minima; und in dieser Beziehung ist die Übereinstimmung recht brauchbar. Bedeutendere Abweichungen bemerkt man nur bei der H_β -Linie. In der p -Reihe fällt hier zunächst auf, daß für $Z = 0$ die Intensität theoretisch verschwindet, während experimentell eine schwache Komponente festgestellt wurde. Diese Diskrepanz ist von der Willkür der Mittelung (vgl. Schluß des § 5) unabhängig und beruht auf der Symmetrie des Ausdruckes K der Linie H_p (p. 17) für $p = 0$, dessen beide Terme sich für $\tau_1 = \tau_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ aufheben. Denselben Grund hat auch das Verschwinden der Komponente $Z = 0$ von H_β , welches durch die Beobachtung bestätigt wird. Es ist aber einleuchtend, daß ein solcher durch die gegenseitige Vernichtung zweier erheblicher Größen zustande kommender Effekt, gegenüber kleinen Änderungen der Bedingungen empfindlich sein muß: die Berücksichtigung des elektrischen Feldes, welches wir ja vernachlässigt haben, würde die strenge Vertauschbarkeit der Indizes von τ und σ aufheben und zu einem endlichen, wenn auch kleinen Werte von K führen. In der s -Reihe sehen wir bei den äußeren, sehr lichtschwachen Komponenten einen Abfall der K , wo die Beobachtung einen schwachen Anstieg der Intensitäten zeigt. Dies ist jedoch eine typische Erscheinung, welche bei den Linien $Z = 20, 17$ von H_γ und $Z = 30, 26$ von H_β wiederkehrt. Störender ist, daß das Maximum der Lichtstärke von $Z = 4$, wo es gemessen wurde, nach $Z = 6$ verschoben erscheint.

Dagegen ist in den übrigen Linien der Parallelismus ein viel besserer. Beachtenswert ist das Minimum bei $Z = 8$ in

der p -Reihe von H_γ . Es ist nämlich der Form des Ausdruckes K nicht anzusehen und hat seinen Grund darin, daß sich die beiden Terme desselben für die dieser Komponente entsprechenden Werte von τ , σ stark schwächen, was zugunsten der von uns benutzten Mittelungsart spricht.

§ 7. *Ergebnisse für die Fowlerlinie.* — Aus dem im letzten Paragraphen zwischen Theorie und Erfahrung durchgeführten Vergleiche entnehmen wir, daß die Berechnungen in zuverlässiger Weise das qualitative Anwachsen oder Abfallen der Intensitäten von Komponente zu Komponente ergeben. Und zwar gehen die aus der Plattenschwärzung bestimmten Lichtstärken besser den ersten Potenzen der Größen K parallel als deren Quadraten, welche theoretisch das eigentliche Intensitätsmaß darstellen. Diese Umstände sind bei der Bewertung der folgenden Tabelle zu beachten.

4686				3203				2783			
p -Komp.		s -Komp.		p -Komp.		s -Komp.		p -Komp.		s -Komp.	
Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	K	
25	0,0 ⁵¹ *	22	0,0 ⁶⁴ *	34	0,0 ⁵¹ **			45	0,0 ⁵¹ **	—	
19	0,002*	21	0,0 ⁵⁴ *	28	0,0 ⁵¹ *	31	0,0 ⁵² *	42	—	0,0 ⁶¹ *	
18	0,001*	16	0,0 ⁵¹ *	26	0,0 ⁵¹	29	0,0 ⁵³ *	39	0,0 ⁵⁴ *	0,0 ⁵² *	
17	0,001*	15	0,002	24	0,0 ⁵¹ *	25	0,0 ⁵¹ *	36	0,0 ⁵²	0,0 ⁵³ *	
13	0,10*	14	0,009	22	0,018*	23	0,0 ⁵³	33	0,0 ⁵¹ *	0,0 ⁵¹	
12	0,09	13	0,000*	20	0,014	21	0,0 ⁵²	30	0,04*	0,0 ⁵⁵	
11	0,03	10	0*	18	0,015	19	0,0 ⁵¹ *	27	5,40**	0,031	
10	0,05	9	0,14	16	1,43**	17	0,037	24	3,61	0,028	
9	0,04*	8	0,13	14	1,12	15	0,041	21	2,42	0,018	
7	2,20**	7	0,11	12	1,15	13	0,028	18	1,45	2,97	
6	1,93	6	0,09	10	0,64	11	0,012	15	0,84	3,32	
5	2,48	5	0,03*	8	0,45	9	1,12	12	0,24	2,15	
4	1,49	3	0*	6	0,21	7	1,49	9	0,76	1,03	
3	1,26	2	2,10	4	0,09	5	1,39	6	0,72	1,46	
2	0,51	1	3,62	2	0,09	3	0,72	3	0,70	2,62	
1	0,86*	0	5,17	0	0	1	0,11	0	0,39	3,16	

Graphisch sind diese Ergebnisse in den Figg. 1, 2, 3 veranschaulicht, in denen unter der theoretischen Energieverteilung, um den Vergleich mit der Erfahrung zu erleichtern, die Schwärzungsmaxima nach den Messungen von J. Stark und seinen Mitarbeitern (bzw. von Nyquist für 4686) in Form von dicken Strichen eingetragen sind.¹⁾ Sowohl in den theore-

1) Sowohl die berechneten als auch die gemessenen Intensitäten sind hier von p -Reihe zu s -Reihe innerhalb derselben Linie vergleichbar.

tischen wie in den experimentellen Figuren sind die Intensitäten durch die Länge der Striche gegeben. In den ersteren sind die oberen Strichenden der Übersichtlichkeit wegen durch

Fig. 1.

eine Kurve verbunden; in den letzteren ist auf die Lage der Striche, welche derjenigen der Schwärzungsmaxima entspricht, nicht aber auf deren Breite zu achten. Die Übereinstimmung ist,

Fig. 2.

wie man sieht, eine recht gute, und die Lagen der berechneten und gemessenen Maxima entsprechen einander mit einer viel größeren Genauigkeit als 25 Proz., welche nach der zu vorsichtigen Schätzung von J. Stark den möglichen Fehler seiner Bestimmungen darstellen sollen.

Zusammenfassung. — Auf Grund der Quantenlehre wurde die elektrische Aufspaltung der ersten drei Linien der Fowlerserie des ionisierten Heliums nach Lage und Intensität der Komponenten untersucht.

Die Intensitätsberechnungen wurden auch auf die Linien H_α , H_β , H_γ , H_δ der Balmerreihe des Wasserstoffs ausgedehnt.

Fig. 3.

Der Vergleich der theoretischen Resultate mit den Ergebnissen der Starkschen Messungen lieferte eine neue schöne Bestätigung sowohl der vom Verfasser gegebenen Theorie des Starkeffektes und damit seiner allgemeinen Ansätze für bedingt periodische Bewegungen, als auch der neuen Bohrschen Theorie der Intensitäten.

(Eingegangen 1. Oktober 1918.)

Nachtrag bei der Korrektur. — Die vorstehenden Ausführungen beschäftigen sich nur mit dem voll ausgebildeten Starkeffekt, welcher dann vorliegt, wenn man den Einfluß der Relativität gegen den des elektrischen Feldes vernachlässigen kann (vgl. P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 182. 1916). In dem inzwischen erschienenen zweiten Teil seiner auf p. 554 angeführten Abhandlung stellt Bohr eine Untersuchung von Kramers in Aussicht, welche durch Berücksichtigung der Relativitätskorrektur eine Erklärung des beobachteten Anwachsens des Effektes mit dem Felde gibt.