Die Empfindlichkeit eines Telephons.

Von

R. Gans.

1. Allgemeiner Ansatz für die Empfindlichkeit des Telephons. Vor einigen Tagen kam mir eine Arbeit von Herrn H. Hoffmann¹⁾ zu Gesicht, in welcher er diskutiert, wie man den permanenten Magneten eines Telephons zu magnetisieren hat, um eine möglichst große Empfindlichkeit zu erzielen.

Da ich mich selbst gerade mit dieser Frage beschäftigt habe, möchte ich meine Resultate kurz mitteilen, weil ich glaube, daß sie die Ergebnisse der Hoffmannschen Untersuchung in einigen Punkten zu ergänzen vermögen.

Während nämlich Herr Hoffmann fragt: „Wie stark magnetisiert man den permanenten Magneten eines Telephons am besten?“, möchte ich erörtern, wie man den Magneten am günstigsten magnetisiert und dimensioniert. Dabei wird es sich auch darum handeln, welches Material am geeignetsten zur Herstellung des Magneten ist.

Für die Berechnung der Zugkraft geht Hoffmann von einem Idealfalle aus, bei welchem sich zwei unendlich lange, achsial magnetisierte Eisenstäbe in einer unendlich langen Magnetisierungsspule befinden. Auch wir müssen, um die Rechnungen durchführen zu können, den praktisch vorliegenden Fall etwas idealisieren.

Fig. 1.

Nehmen wir zu dem Zwecke an, das „Telephon“ bestehe aus einem hufeisenförmig gebogenen permanenten Magneten, dessen „Membran“ ein Anker (Fig. 1) aus demselben Material und von demselben Querschnitt oder auch ein Hufeisenmagnet (Fig. 2) sei.

Fig. 2.

Die Magnetisierungsspule umgebe in gleichmäßigen Windungen den ganzen Magneten und die Membran, und es sei gestattet, die Streuung dieses magnetischen Kreises zu vernachlässigen.

Nach der Maxwellschen Formel ist die Kraft des Magneten auf den Anker

$$F = \frac{S}{8\pi} \mathfrak{B}^2 \quad 1)$$

wenn S die Stirnfläche des Magneten, $\mathfrak{B}$ die Induktion im Kreise bezeichnet.

Die Empfindlichkeit des Telephons ist somit

$$\frac{dF}{di} = \frac{S}{4\pi} \mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{B}}{di} \quad 2)$$

unter i den Magnetisierungsstrom verstanden.

Nun gilt in dem magnetischen Kreise die Gleichung

$$\mathfrak{H}_i l_i + \mathfrak{H}_a l_a = 4\pi N i \quad 3)$$

wenn wir mit $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_a$ die Feldstärke im Stahl bzw. im Luftschlitz, mit l_i und l_a die Länge des von den Kraftlinien im Stahl bzw. in der Luft durchlaufenen Weges, mit N die Windungszahl der Magnetisierungsspule bezeichnen.

Nun ist

$$\mathfrak{H}_a = \mathfrak{B} \quad 4)$$

ferner wollen wir die Feldstärke im Stahl anstatt $\mathfrak{H}_i$, einfach $\mathfrak{H}$ nennen. Dann lautet (3)

$$\mathfrak{H} l_i + \mathfrak{B} l_a = 4\pi N i \quad 5)$$

¹⁾ H. Hoffmann, Arch. f. Elektrotechn. 1, 1913 S. 433.

Durch Differentiation von (5) erhält man

$$l_i d\mathfrak{S} + l_a d\mathfrak{B} = 4\pi N di$$

oder

$$di = \frac{1}{4\pi N} \left(l_i + l_a \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{S}} \right) d\mathfrak{S},$$

so daß (2) die Form

$$\frac{dF}{di} = \frac{NS}{l_i} \frac{\mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{S}}}{1 + \frac{l_a}{l_i} \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{S}}} \quad (6)$$

annimmt. Diese Gleichung geht für $\frac{l_a}{l_i} = 0$, d. h. für unendlich kleine Schlitzweite oder für unendlich lange Magnete in die von Hoffmann benutzte über.

In (6) ist $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{S}$ die von mir¹⁾ sogenannte reversible Permeabilität, die wir mit

$$\mu_r = \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{S}} \quad (7)$$

bezeichnen wollen, während das „Dimensionsverhältnis“ l_a/l_i zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{l_a}{l_i} \quad (8)$$

Fig. 3.

gesetzt werden möge. Dann ist nach (6) die Empfindlichkeit des Telephons dem Ausdrücke

$$K = \frac{\mathfrak{B} \mu_r}{1 + \varepsilon \mu_r} \quad (9)$$

proportional.

Fließt kein Strom in der Magnetisierungsspule, so ist nach (5)

$$\mathfrak{S} l_i + \mathfrak{B} l_a = 0 \quad (10)$$

d. h. in der $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$ -Ebene ist der permanente Magnet dadurch charakterisiert, daß der ihn repräsentierende Punkt auf der Linie OS liegen muß, wenn diese Gerade mit der $\mathfrak{B}$ -Achse einen Winkel α einschließt, der durch die Beziehung

$$\frac{l_a}{l_i} = \operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

gegeben ist. Denn für alle Punkte der Linie OS ist $-\mathfrak{S}/\mathfrak{B} = \operatorname{tg} \alpha$, und nach (10) muß $-\mathfrak{S}/\mathfrak{B} = l_a/l_i$ sein.

Jedes Dimensionsverhältnis ist also durch eine Linie OS von ganz bestimmter Neigung gegen die $\mathfrak{B}$ -Achse definiert.

2. Maximum der Empfindlichkeit bei dem Dimensionsverhältnis Null. Um zunächst für unendlich gestreckte Magnete $\varepsilon = 0$ die günstigste Magnetisierung und das geeignetste Material zu finden, diskutieren wir nach (9) die Größe K für $\varepsilon = 0$, die wir K_0 nennen wollen, in ihrer Abhängigkeit von $\mathfrak{B}$

$$K_0 = \mathfrak{B} \mu_r. \quad (12)$$

Dabei erinnern wir uns eines von mir gefundenen Resultats¹⁾, daß die reversible Suszeptibilität χ_r sich folgendermaßen als Funktion der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ ausdrückt

$$\frac{\chi_r}{\chi_a} = \varphi \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty} \right). \quad (13)$$

¹⁾ R. Gans, Ann. Phys. 33, 1910 S. 1064; Phys. Zs. 1911 S. 1053.

Hier bedeutet κ_a die Anfangssuszeptibilität, d. h. die Suszeptibilität für sehr schwache Magnetisierung des Ferromagnetikums, $\mathcal{M}_\infty$ die Sättigungsmagnetisierung, und φ ist eine universelle (vom Material unabhängige) und von mir an anderer Stelle bereits ermittelte Funktion.

Da die reversible Permeabilität

$$\begin{aligned}\mu_r &= 4\pi\kappa_r + 1 \\ \mathcal{B} &= 4\pi\mathcal{M} + \mathcal{H}\end{aligned}$$

ist, so darf man genähert $\frac{\kappa_r}{\kappa_a}$ durch $\frac{\mu_r}{\mu_a}$ und $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\infty}$ durch $\frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty}$ ersetzen. Demnach ist approximativ

$$\frac{\mu_r}{\mu_a} = \varphi\left(\frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty}\right) \quad (13^1)$$

und nach (12)

$$K_0 = \mathcal{B}\mu_0 \cdot \varphi\left(\frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty}\right) = 4\pi\mathcal{M}_\infty\mu_0 \cdot \frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty} \varphi\left(\frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty}\right) \quad (14)$$

Setzen wir

$$\frac{\mathcal{B}}{4\pi\mathcal{M}_\infty} = x, \quad (15)$$

so wird

$$K_0 = 4\pi\mathcal{M}_\infty\mu_0 x \cdot \varphi(x) \quad (16)$$

Für einen bestimmten Wert $x = \bar{x}$ hat $x\varphi(x)$ ein Maximum, wie sich aus folgender Tabelle ergibt²⁾, die durch Fig. 4 graphisch dargestellt ist.

Tabelle 1.

x	$\frac{1}{3}\varphi(x)$	$x\varphi(x)$
0,0000	0,3333	0,0000
0,0665	0,3307	0,0660
0,1639	0,3173	0,1560
0,2260	0,3030	0,2054
0,3131	0,2759	0,2590
0,3662	0,2555	0,2806
0,4381	0,2239	0,2942
0,4600	0,2134	0,2945
0,4808	0,2031	0,2929
0,5373	0,1740	0,2804
0,6136	0,1328	0,2445
0,6716	0,1011	0,2037
0,7507	0,0612	0,1378
0,8001	0,0398	0,0955
0,8571	0,0204	0,0525
1,0000	0,0000	0,0000

Aus der Figur folgt, daß $\bar{x}$ den Wert

$$\bar{x} = 0,46$$

hat, oder daß

$$\bar{\mathcal{B}} = 0,46 \cdot 4\pi\mathcal{M}_\infty = 5,78\mathcal{M}_\infty$$

die günstigste Induktion ist.

Aus Gleichung (1) folgt, daß die Induktion $\bar{\mathcal{B}}$, welche K_0 zum Maximum macht, der Sättigung des Materials proportional ist, und daß das Maximum selbst der Sättigung und der Anfangspermeabilität proportional ist.

Fig. 4. Die Funktion $x \cdot \varphi(x)$

1) R. Gans, l. c.

2) R. Gans, Gött. Nachr. 1911 S. 45.

Allerdings gilt die Beziehung, daß die reversible Permeabilität von der Vorgeschichte unabhängig ist, nicht ganz genau, insbesondere nicht für kleine $\mathfrak{B}$, worauf ich schon früher hinwies, und was die Messungen von Hoffmann auch bestätigt haben. Trotzdem ist die Näherung für den vorliegenden Zweck hinreichend. So trägt auch Herr Hoffmann kein Bedenken, bei der Diskussion der Kraftwirkung unendlich langer Magnete auf einander die auf der Grenzkurve $URU'C$ (Fig. 3) gemessenen Werte von μ_r zu benutzen, während er eigentlich die μ_r -Werte auf der Ordinatenachse OR brauchte.

Doch unter der Annahme des durch (13') ausgedrückten Gesetzes verursacht das keinen Fehler.

Wenden wir diese Ergebnisse speziell auf einen geglühten Remy-Stahl an.

Die Fig. 5 stellt μ_r als Funktion von $\mathfrak{B}$ (Kurve I) und $\mu_r \mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{B}$ (Kurve II) dar, und zwar gilt der Ordinatenmaßstab links für die μ_r -Kurve, rechts für die $\mathfrak{B} \mu_r$ -Kurve.

Die entsprechenden Zahlen sind in Tabelle 2 niedergelegt, während Fig. 6 von der Grenzkurve $URCU'$ der Hysteresisschleife (vgl. Fig. 3) nur den Teil zwischen R und C darstellt, denn nur dieser Teil der Hysteresiskurve hat für permanente Magnete Interesse.

Tabelle 2.

$\mathfrak{B}$	μ_r	$\mathfrak{B} \mu_r \cdot 10^{-4}$	$\mathfrak{B}$	μ_r	$\mathfrak{B} \mu_r \cdot 10^{-4}$
0	70,00	0,000	12 770	36,53	46,67
792	69,85	5,531	13 170	34,65	45,65
1 581	69,44	10,97	13 560	32,82	44,49
2 363	68,79	16,26	13 920	31,09	43,27
3 136	67,81	21,26	14 270	29,42	41,96
3 898	66,64	25,98	14 590	27,89	40,69
4 645	65,22	30,30	14 890	26,37	39,28
5 373	63,62	34,18	15 180	24,98	37,94
6 085	61,86	37,64	15 460	23,67	36,59
6 774	59,95	40,61	15 710	22,41	35,22
7 442	57,93	43,11	15 970	21,23	33,89
8 098	55,84	45,22	16 430	19,11	31,39
8 706	53,65	46,71	16 840	17,22	28,98
9 301	51,45	47,85	17 200	15,59	26,80
9 870	49,21	48,57	17 540	14,14	24,79
10 420	47,01	48,97	17 840	12,85	22,94
10 940	44,81	49,01	18 120	11,71	21,23
11 430	42,65	48,74	18 380	10,73	19,72
11 910	40,57	48,29			
12 350	38,51	47,55			

Aus Tabelle 2 und Fig. 5 ersieht man, daß der Maximalwert von $\mathfrak{B} \mu_r$ den Betrag $49 \cdot 10^4$ bei einer Induktion von 10 800 hat.

3. Maximum der Empfindlichkeit bei beliebigem Dimensionsverhältnis. Um auch für Magnete von endlicher Länge dieselben Betrachtungen durchzuführen, suchen wir das Maximum von K bei konstant gedachtem ε nach Gleichung (9).

Die Differentiation von K nach $\mathfrak{B}$ ergibt

$$\frac{dK}{d\mathfrak{B}} = \frac{(1 + \varepsilon \mu_r) \frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}} - \mathfrak{B} \mu_r \varepsilon \frac{d\mu_r}{d\mathfrak{B}}}{(1 + \varepsilon \mu_r)^2}$$

oder

$$\frac{dK}{d\mathfrak{B}} = \frac{\frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}} + \varepsilon \mu_r^2}{(1 + \varepsilon \mu_r)^2}$$

Daraus folgt $\frac{dK}{d\mathfrak{B}} = 0$ für einen Wert $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}}$, der der Bedingung

$$\varepsilon \mu_r^2 + \frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}} = 0 \quad (18)$$

genügt. Das ist eine transzendente Gleichung für $\bar{\mathfrak{B}}$, welche ε als Parameter enthält.

Einfacher löst man (18), indem man umgekehrt $\mathfrak{B}$ als bekannt annimmt und das dazugehörige ε nach der Formel

$$\varepsilon = - \frac{1}{\mu_r^2} \frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}} \quad (19)$$

für verschiedene Werte von $\mathfrak{B}$ berechnet.

Da ε nur positiv sein kann, so kommen nur Werte von $\bar{\mathfrak{B}}$ in Frage, für die $\frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}} < 0$ ist,

d. h. $\bar{\mathfrak{B}} > 10800$ (vgl. Fig. 5). Da ferner im zweiten Quadranten der Hysteresisschleife, der für permanente Magnete allein maßgebend ist, $\mathfrak{B} < 14200$ ist (vgl.

Fig. 6), so brauchen wir nur für $10800 < \mathfrak{B} < 14200$ die Größe (19) zu berechnen. Es ergibt sich

Fig. 5. Kurve I: μ_r Kurve II: $\mu_r \cdot \mathfrak{B}$.

Tabelle 3.

$\mathfrak{B}$	$\frac{d(\mu_r \mathfrak{B})}{d\mathfrak{B}}$	μ_r	$\varepsilon = - \frac{1}{\mu_r^2} \frac{d(\mathfrak{B} \mu_r)}{d\mathfrak{B}}$
10 405	+ 4,112	47,0	- 0,1862 · 10 ⁻²
10 925	- 2,277	45,0	+ 0,1125
11 425	- 7,422	42,6	+ 0,4090
11 890	- 12,93	40,6	+ 0,7847
12 340	- 18,84	38,5	+ 1,271
12 760	- 23,17	36,5	+ 1,740
13 165	- 27,60	34,7	+ 2,293
13 545	- 31,74	32,9	+ 2,932
13 915	- 35,63	31,1	+ 3,683
14 255	- 38,50	29,4	+ 4,456

Um die Resultate dieser Tabelle zu diskutieren, zeichnen wir in Fig. 6 eine Parallele zur $\mathfrak{H}$ -Achse im Abstände $\mathfrak{B} = 10000$ und messen auf dieser Geraden die Werte von ε in 10000 mal größerem Maßstabe als $\mathfrak{H}$. Dann entspricht die Verbindungslinie OS des Koordinatenursprungs mit dem Punkte $\varepsilon = 0,001$, z. B. einem Magneten vom Dimensionsverhältnis 0,001 usw. (vergl. auch Fig. 3).

Tabelle 3 sagt aus, daß für $\varepsilon = 0$ die Induktion $\mathfrak{B} = 10800$ ist, und daß mit wachsendem ε auch $\bar{\mathfrak{B}}$ wächst. Trägt man zusammengehörige Werte von ε und $\bar{\mathfrak{B}}$ in das Diagramm Fig. 6 ein, so ergibt sich eine Linie M M'', die innerhalb der Grenzkurve fast gerade und fast horizontal verläuft (M M'). Außerhalb derselben würde sie ansteigen, doch interessiert das nicht, da die Punkte außerhalb der Grenzkurve nicht erreicht werden können. Deshalb ist der Teil M' M'' dieser Kurve, der außerhalb der Grenzkurve verläuft, gestrichelt gezeichnet.