Über die Verteilung von Irrationalitäten mod. 1.

Von H. BEHNKE in Hamburg.

Im ersten Heft dieser Zeitschrift hat Herr HECKE¹⁾ die Summen $\sum_{m=1}^x \left\{ R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right\}$, wo $R(x)$ der Bruchbestandteil von x , d. h. diejenige Zahl für die $0 \leq R(x) < 1$, $x - R(x)$ ganz rational, für quadratische Irrationalitäten α mit Zuhilfenahme Dirichletscher Reihen behandelt²⁾; diese Dirichletschen Reihen zeichneten sich dadurch aus, daß in ihnen die Summe lief über alle ganzen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers. Es liegt nahe, diese Untersuchungen unter Beibehaltung derselben Methoden in zwei Richtungen zu verallgemeinern, einerseits höhere Irrationalitäten einzubeziehen und andererseits das Polynom für $R(m\alpha)$ von höherem Grade zu wählen. Während nun die zweite Aufgabe sich erledigen läßt, stößt die erste auf Schwierigkeiten, da die den Heckschen $\mathcal{O}$ -Reihen analog gebauten Reihen für höhere Körper sich nicht zu Reihen zusammensetzen lassen, die in so einfacher Beziehung zu $\sum \frac{R(m\alpha) - \frac{1}{2}}{m^s}$ stehen. Auch sind diese $\mathcal{O}$ -Reihen im allgemeinen nicht fortsetzbar. Über diese mit den Heckschen Methoden zu erledigenden Fragen und über die zugehörigen Gitterpunktsprobleme wird eine zweite Note im folgenden Hefte handeln.

Hier sollen auch mit Dirichletschen Reihen, die sich jedoch nicht aus „Körperfunktionen“ zusammensetzen lassen, die Summen $\sum_1^x P_q(m\alpha)$ abgeschätzt werden, wo $P_q(x)$ die Bernoullische Funktion q . Grades ($q > 1$) in x ist, für alle Irrationalitäten α , deren $R(m\alpha)$ sich nicht stärker als das $R(m\alpha)$ von algebraischen Zahlen Null nähert, für die es also ein ν und

¹⁾ Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. Band I, Heft I, S. 54–76, 1921.

²⁾ Für alle Irrationalitäten mit beschränkten Kettenbruchnennern haben die Herren HARDY und LITTLEWOOD ohne Beweis den Satz ausgesprochen:

$$\sum_1^x \left\{ R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right\} = O(\log x)$$

und Herr OSTROWSKI hat ihn elementar bewiesen. Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. Band I, Heft I, S. 81, 1921.

ein $C > 0$ gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen m

$$R(m\alpha) > \frac{C}{m^\nu}.$$

Statt nämlich die Dirichletschen Reihen $\sum \frac{P_q(m\alpha)}{m^s}$ aus „Körperfunktionen“ zusammenzusetzen, benutzen wir, nachdem für die Bernoullischen Funktionen die Fourierentwicklung angewandt ist und in üblicher Weise die Dirichletschen Reihen in ein Integral verwandelt sind, die Thetatransformationsformel (§ 1). Für gerades q bekommen wir dann eine Reihe mit lauter positiven Gliedern. Benutzen wir dann die Tatsache, daß die stark Null angenäherten $R(m\alpha)$ nur selten vorkommen, so können wir die Regularität unserer Funktionen bis $\Re(s) = 1 - \frac{q}{\mu}$ zeigen (§ 2). Hier ist μ ein der Irrationalität α fest zugeordneter Exponent, der definiert wird durch: $\lim_{m=\infty} \frac{|\log R(m\alpha)|}{\log |m|} = \mu$, d. h. μ sei eine solche Zahl, daß

$$R(m\alpha) > \frac{1}{|m|^{\mu+\delta}}$$

für alle ganzen rationalen m , wo $|m| > M(\delta)$ und $\delta > 0$ beliebig, ferner

$$R(m\alpha) < \frac{1}{|m|^{\mu-\delta}}$$

für unendlich viele ganze rationale m . Untersuchen wir schließlich das Verhalten unserer Funktionen auf den vertikalen Geraden im Streifen $1 - \frac{q}{\mu} < \Re(s) < 1$, so kommen wir zu unseren Resultaten. Dabei ent-

wickeln wir alles zunächst nur für $\sum \frac{\tilde{P}_2(m\alpha)}{m^s}$ (§ 1—3), um dann die Abweichungen bei anderem q anzugeben (§ 4). Das Schlußresultat lautet:

Für jedes $q \geq 2$ konvergiert die Dirichletsche Reihe

$$Z_q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_q(k\alpha)}{k^s},$$

wenn $\mu \geq q$, für $\Re(s) > 1 - \frac{q}{2\mu}$; wenn $q \geq \mu > 1$, für $\Re(s) > \frac{1}{1 + \frac{q}{\mu}}$; ist q

gerade, so konvergiert $Z_q(s)$ sicher nicht mehr, falls $\Re(s) < 1 - \frac{q}{\mu}$.

Es ist:

$$\sum_{k=1}^x P_q(k\alpha) = O\left(x^{1 - \frac{q}{2\mu} + \epsilon}\right) \text{ für } \mu > q,$$

$$\sum_{k=1}^x P_q(k\alpha) = O\left(x^{\frac{1}{1 + \frac{q}{\mu}} + \epsilon}\right) \text{ für } q \geq \mu > 1,$$

ferner ist für gerades q

$$\sum_{n=1}^x P_q(k\alpha) = \Omega\left(x^{1-\frac{q}{\mu}-\epsilon}\right), (\epsilon > 0)^3).$$

§ 1. Thetatransformation.

Wir bilden mit einem positiven irrationalen α die Dirichletsche Reihe

$$Z(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\left(R(n\alpha) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}}{n^s}$$

und wenden zunächst die Γ -Formel an.

$$Z(s) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(R(n\alpha) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \right\} e^{-tn^2} t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

$\sum'$ läuft über alle n mit Ausnahme von $n=0$; die Möglichkeit der Vertauschung von $\int$ und $\sum$ ist evident, wenn man das Integral in eine Summe über Integrale von fester Länge zerlegt.

Die Fourierentwicklung für

$$P_2 = \left(R(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

ist

$$P_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{4\pi^2 k^2}.$$

Setzen wir

$$(2) \quad Z_1(s) = \int_1^{\infty} \sum_{\substack{k, n \\ -\infty}}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k n \alpha - tn^2}}{k^2} t^{\frac{s}{2}-1} dt,$$

$$(3) \quad Z_2(s) = \int_0^1 \sum_{\substack{k, n \\ -\infty}}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k n \alpha - tn^2}}{k^2} t^{\frac{s}{2}-1} dt,$$

wobei in der Summe weder über $k=0$ noch über $n=0$ zu summieren ist, so erhalten wir

$$Z(s) = \frac{Z_1(s)}{8\pi^2 \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{Z_2(s)}{8\pi^2 \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Das Integral für $Z_1(s)$ konvergiert offenbar in der ganzen Ebene. Da das Integral für $Z_2(s)$ nur für $\Re(s) > 1$ konvergiert, so schreiben wir

³⁾ Für die Erklärung von Ω siehe HARDY und LITTLEWOOD Acta 37, S. 225.

$$(4) \quad Z_2(s) = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k n \alpha - t n^2}}{k^2} t^{\frac{s}{2}-1} dt - \frac{2\zeta(2)}{s}$$

und wenden die Transformationsformel

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k n \alpha - t n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}(\alpha k + n)^2}$$

an, so daß wir erhalten:

$$(5) \quad \begin{aligned} Z_2(s) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2}{t}(\alpha k + n)^2}}{k^2} t^{\frac{s}{2}-1} dt - \frac{2\zeta(2)}{s} \\ &= \sqrt{\pi} \int_1^\infty \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 t(\alpha k + n)^2}}{k^2} t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dt - \frac{2\zeta(2)}{s}. \end{aligned}$$

Da $(\alpha k + n)$ wie $R(k\alpha)$ beliebig dicht an Null herankommt, wissen wir zunächst nur, daß das Integral für $\Re(s) > 1$ konvergiert. Die Summe hat lauter positive Glieder. Wir spalten sie in eine Summe über die Glieder, bei denen $|\alpha k + n| > 1$, und eine Summe von Gliedern, bei denen $|\alpha k + n| < 1$, und brauchen dann nur die Konvergenz des einzelnen Teiles zu untersuchen. Offenbar konvergiert das Integral über die erste Summe in der ganzen Ebene. Das zweite Integral

$$U(s) = 2\sqrt{\pi} \int_1^\infty \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha)}}{k^2} t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dt,$$

haben wir nunmehr auf Konvergenz für $\Re(s) \leq 1$ zu untersuchen.

§ 2. Die Halbebene der Regularität für $U(s)$.

Wir gebrauchen nun den Exponenten μ , den wir α zugeordnet haben mittels der Gleichungen:

$$(1) \quad R(m\alpha) > \frac{1}{|m|^{\mu+\delta}}$$

für alle ganzen rationalen m , wo $|m| > M(\delta)$,

$$(1a) \quad R(m\alpha) < \frac{1}{|m|^{\mu-\delta}}$$

unendlich oft für ganze rationale m , während $\delta > 0$ beliebig ist, aber nun für diesen ganzen Paragraphen fest gewählt werden soll, und zwar kleiner als $\mu - 1$. Wir nehmen dabei an, daß α eine Irrationalität mit $\mu > 1$ sei.

Zur Feststellung der Konvergenzgrenze von

$$\int_1^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha)}}{k^2} t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dt,$$

kommt es auf das Verhalten von

$$S_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - 2 \log k}$$

und

$$S_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 t R^2(-k\alpha) - 2 \log k}$$

für $t = \infty$ an.

$$U(s) = 2V\pi \int_1^{\infty} \{S_1(t) + S_2(t)\} t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dt.$$

In S_1 oder S_2 oder beiden kommen unendlich viele k vor, für die

$$(1a) \quad R(k\alpha) < \frac{1}{k^{\mu-\delta}}.$$

Wir nehmen an, dies passiere in S_1 (für S_2 ließen sich die folgenden Schlüsse genau so ausführen). Zunächst ist dann

$$\limsup_{t=\infty} \left\{ t^{\frac{1}{\mu}+\delta} S_1(t) \right\} = \infty.$$

Denn man lasse $k_n (n = 1, 2, \dots)$ solche ganzen Zahlen durchlaufen, wofür (1a) besteht. Dann ist das k_n^{te} Glied in $S_1(t)$ und mithin $S_1(t)$ selbst

$$> \frac{1}{k_n^2} e^{-\frac{\pi^2 t}{k_n^{2\mu-2\delta}}},$$

und es wird für

$$t_n = \frac{k_n^{2\mu-2\delta}}{\pi^2(\mu-\delta)}.$$

$$t_n^{\frac{1}{\mu}+\delta} S_1(t_n) > \text{const.} \cdot k_n^{2(\mu-\delta)\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)-2} > \text{const.} \cdot k_n^{2\delta\left(\mu-\frac{1}{\mu}-\delta\right)}.$$

Wegen $\mu > 1$ ist daher, wenn δ klein genug,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{\frac{1}{\mu} + \delta} S_1(t_n) = \infty.$$

Auch $\int_1^p S_1(t) t^{\frac{1}{\mu} + \delta - 1} dt$ und damit $\int_1^p \{S_1(t) + S_2(t)\} t^{\frac{1}{\mu} + \delta - 1} dt$ (p reell und $p > 1$) wächst mit wachsendem p über alle Grenzen, denn ist t_i einer jener eben ausgewählten t -Werte, so ist im Intervalle von t_i bis $t_i \{1 + \mu + \delta\}$ sicher $S_1(t) t^{\frac{1}{\mu} + \delta}$ größer als

$$e^{c_1(\delta, \mu) - 1 - \left(\frac{1}{\mu - \delta} - \frac{1}{\mu} - \delta\right) \log t},$$

weil eines der Glieder

$$e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - 2 \log k + \left(\frac{1}{\mu} + \delta\right) \log t}$$

dies schon ist.

Andererseits ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{1}{2\mu} - \delta} S_1(t) \right\} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{1}{2\mu} - \delta} S_2(t) \right\} = 0 \quad \text{für } \delta > 0.$$

Zum Beweise beachten wir:

$$t^{\frac{1}{2\mu} - \delta} S_1(t) < \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\pi^2 t}{k^{2\mu+2\delta}} - (1-\delta) \log k + \left(\frac{1}{2\mu} - \delta\right) \log t} \frac{1}{k^{1+\delta}}.$$

Hier bleibt der Zähler unterhalb einer von k und t unabhängigen Grenze, denn der größte Zähler der Majorante tritt auf für k_0 , wo

$$k_0^{2\mu+2\delta} = \frac{2\pi^2 t(\mu + \delta)}{1 - \delta}$$

und ist

$$< e^{-\left(\frac{1-\delta}{2\mu+2\delta} - \frac{1}{2\mu} + \delta\right) \log t - \frac{1-\delta}{2\mu+2\delta} \log \frac{2\pi^2}{1-\delta}} < e^{-\frac{\delta^2}{2\mu^2} \log t - \frac{1-\delta}{2\mu+2\delta} \log \frac{2\pi^2(\mu+\delta)}{1-\delta}}.$$

Jetzt beweisen wir das wesentlich schärfere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{1}{\mu} - 2\delta} S_1(t) \right\} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{1}{\mu} - 2\delta} S_2(t) \right\} = 0.$$

Es ist

$$(6) \quad t^{\frac{1}{\mu} - 2\delta} S_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - 2 \log k + \left(\frac{1}{\mu} - 2\delta\right) \log t}.$$

Das größte Glied dieser Summe bei laufendem k ist offenbar kleiner als

$$e^{-\frac{\pi^2 t}{k_0^{2\mu+2\delta}} - 2\log k_0 + \left(\frac{1}{\mu} - 2\delta\right)\log t},$$

wo für k_0 die Gleichung gilt: $k_0^{2\mu+2\delta} = \pi^2 t (\mu + \delta)$, $t > M_1(\delta)$. Folglich ist das größte Glied kleiner als

$$e^{-\frac{1}{\mu+\delta} - \left(\frac{1}{\mu+\delta} + 2\delta - \frac{1}{\mu}\right)\log t - \frac{1}{\mu+\delta}\log \pi^2(\mu+\delta)} = O(1) \text{ für festes } \delta.$$

Die Summe der Glieder aus (6) für $k = 1, \dots, [k_0^{1-\epsilon}], [k_0^2] + 1, \dots, \epsilon > 0$ ist $O(1)$ in t , denn schreiben wir diese Glieder in der Form

$$\frac{e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - (1-\delta)\log k + \left(\frac{1}{\mu} - 2\delta\right)\log t}}{k^{1+\delta}},$$

so ist der Zähler gleichmäßig in k $O(1)$. Nun gehöre für $[k_0^{1-\epsilon}] < k \leq [k_0^2]$,

wenn $R(k\alpha) > \frac{1}{k_0^{\mu-\delta}}$, das k^{te} Glied von (6) zu A ,

wenn $R(k\alpha) \leq \frac{1}{k_0^{\mu-\delta}}$, das k^{te} Glied von (6) zu B .

Jedes Glied aus A ist $O(e^{-c_3 t^{1/\delta}})$, wo $c_3 > 0$.

Die Anzahl der Glieder aus A ist aber höchstens $k_0^2 = C_4 t^{\frac{1}{\mu+\delta}}$, so daß ihre Summe

$$O(1)$$

ist in t .

Zur Feststellung der Anzahl der Glieder aus B brauchen wir den

Satz: Ist $R(k_0\alpha) < \frac{1}{2}$ ($k_0 > 0$), so ist die Anzahl D der Zahlen $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_0 + H$ mit $R(k\alpha) < R(k_0\alpha)$, $H > k_0$

$$D \leq 2 R(k_0\alpha) \cdot H.$$

Ist $k_0 < 0$, so gilt dasselbe für die Anzahl $\overline{D}$ der Zahlen $k_0 - 1, k_0 - 2, \dots, k_0 - H$.

Zu seinem Beweise ziehen wir heran den

Hilfssatz (wo die Bezeichnungen dieselben sind wie im vorigen Satze): In jedem Intervall von der Länge H , das beginnt mit $\tilde{k} > k_0 + H$, liegen mindestens wieder D Zahlen k , für die entweder

$$R(k\alpha) < R(k_0\alpha)$$

oder

$$R(k\alpha) > 1 - R(k_0\alpha).$$

Zum Beweise subtrahieren wir k_0 von den fraglichen D Zahlen des Intervalles $k_0 + 1, \dots, k_0 + H$. Für die $R(\bar{k}\alpha)$ der so erhaltenen D Zahlen $\bar{k}$ gilt

$$R(\bar{k}\alpha) > 1 - R(k_0\alpha).$$

Wir bezeichnen mit $\bar{\bar{k}}$ die letzte ganze Zahl vor $\bar{k}$ für die $R(\bar{\bar{k}}\alpha) < R(k_0\alpha)$. Zu $\bar{\bar{k}}$ addieren wir nun die Zahlen $\bar{k}$. Dann ist $R((\bar{\bar{k}} + \bar{k})\alpha) < R(k_0\alpha)$ oder $R((\bar{\bar{k}} + \bar{k})\alpha) > 1 - R(k_0\alpha)$. Genügt das kleinste $\bar{\bar{k}} + \bar{k}$ der ersten Ungleichung, so ist alles bewiesen; genügt es der zweiten Ungleichung, so kann noch $\bar{\bar{k}} + \bar{k} < \tilde{k}$ sein. In diesem Falle addieren wir zu $\bar{\bar{k}} + \bar{k}$ noch k_0 . Dann ist $R(\alpha(\bar{\bar{k}} + \bar{k} + k_0)) < R(k_0\alpha)$ und $\bar{\bar{k}} + \bar{k} + k_0 > \tilde{k}$. Es ist nun sicher $\bar{\bar{k}} + \bar{k}_1 + k_0 \neq \bar{\bar{k}} + \bar{k}_2$, weil

$$R((\bar{\bar{k}}_1 + k_0)\alpha) < R(k_0\alpha) \text{ und } R(\bar{\bar{k}}_2\alpha) > 1 - R(k_0\alpha).$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Zur Verifizierung des vorstehenden Satzes brauchen wir jetzt nur noch die Tatsache, daß für $\varrho \leq 1$ die Anzahl der k , wo $R(k\alpha) < \varrho$, $k < x$

$$\varrho x + o(x) \text{ in } x$$

bei festen ϱ ist⁴⁾. Hieraus folgt: Die Anzahl der k , für die bei gegebenem ganzem rationalen y

$$k < yH + k_0$$

und

$$R(k\alpha) < R(k_0\alpha)$$

oder

$$R(k\alpha) > 1 - R(k_0\alpha),$$

ist

$$2HyR(k_0\alpha) + o(Hy) + C(k_0) \text{ für } y \rightarrow \infty;$$

nach unserem Hilfssatze ist diese Anzahl aber $\geq Dy$. Folglich muß $(2HR(k_0\alpha) - D)y + o(Hy) + C(k_0) \geq 0$ sein. Wir lassen jetzt y gegen $+\infty$ laufen und halten k_0 und H fest.

So folgt

$$2HR(k_0\alpha) \geq D, \text{ q. e. d.}$$

Hieraus folgt, daß die Anzahl der Glieder aus B

$$< 2 \frac{(k_0^2 - k_0)}{k_0^\mu - \delta} = O(k_0^{2-\mu+\delta}) = O\left(t^{\frac{2+\delta-\mu}{2\mu+2\delta}}\right).$$

Damit ist bewiesen, daß für Limes $t = \infty$ die Reihe B für $\mu > 2$ 0 ist⁵⁾. Um dies auch für $1 < \mu \leq 2$ zu beweisen, teilen wir die Glieder der Reihe B noch einmal feiner ein.

⁴⁾ Siehe etwa WEYL, Gleichverteilung von Zahlen mod. 1, Math. Annalen 77, 1916, S. 313–352.

⁵⁾ Zunächst gilt dies nur für $\delta < \mu - 2$; man sieht dann aber leicht, daß er für größere δ erst recht gültig ist.

Wir setzen $\frac{s}{2} = z = x + iy$. Die Integranden in den beiden ersten Termen rechts in (7) sind in der ganzen t -Halbebene $\Re(t) > 0$ regulär. Deshalb können wir das erste Integral auf die Strecke $(1, z)$ und die Strecke (z, ∞) der Halbgeraden $(0, z, \infty)$ verschieben, entsprechend das zweite Integral auf die Strecke $(1, \bar{z})$ und die Strecke $(\bar{z}, \infty)$ der Halbgeraden $(0, \bar{z}, \infty)$, wo $\bar{z}$ die zu z konjugierte Zahl bedeutet.

Es sei

$$\mathfrak{J}_1(z) = \int_z^{\infty} \sum_{k,n}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n k a - t n^2}}{k^2} t^{z-1} dt.$$

Wir substituieren $t = zq$ und nehmen an $y \neq 0$.

$$\mathfrak{J}_1(z) = z^z \int_1^{\infty} \sum_{k,n}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n k a - t n^2}}{k^2} q^{z-1} dq,$$

$$|\mathfrak{J}_1(z)| \leq |z^z| \cdot 2\zeta(2) \cdot \int_1^{\infty} \sum_n^{+\infty} e^{-\delta q n^2} q^{x-1} dq \leq |z^z| \cdot C_6,$$

$$\mathfrak{J}_2(z) = \int_{\bar{z}}^{\infty} \sum_k^{+\infty} \sum_n^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 t (\alpha k + n)^2}}{k^2} t^{-z-\frac{1}{2}} dt.$$

Wir substituieren $t = \bar{z}q$.

$$\mathfrak{J}_2(z) = \bar{z}^{-z+\frac{1}{2}} \int_1^{\infty} \sum_k^{+\infty} \sum_n^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 \delta q (\alpha k + n)^2}}{k^2} q^{-z-\frac{1}{2}} dq,$$

$$|\mathfrak{J}_2(z)| \leq \left| \bar{z}^{-z+\frac{1}{2}} \right| \cdot C_7.$$

Drittens ist

$$\sqrt{\pi} \int_1^{\bar{z}} \sum_k^{+\infty} \sum_n^{+\infty} \frac{e^{-\pi^2 t (\alpha k + n)^2}}{k^2} t^{-z-\frac{1}{2}} dt = - \int_1^{\frac{1}{\bar{z}}} \sum_k^{+\infty} \sum_n^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n k a - t n^2}}{k^2} t^{z-1} dt,$$

ferner

$$\begin{aligned} (9) \quad & \int_1^z \sum_{k,n}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n k a - t n^2}}{k^2} t^{z-1} dt - \frac{\zeta(2)}{z} \\ &= \int_1^z \sum_k^{+\infty} \sum_n^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n k a - t n^2}}{k^2} t^{z-1} dt - \frac{\zeta(2) \cdot z^z}{z}. \end{aligned}$$

Wir setzen die letzten beiden Integrale zusammen zu $\int_{\frac{1}{z}}^z$ und substituieren $t = zq$, so daß wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_3(z) &= z^z \int_{\frac{1}{z\bar{z}}}^1 \sum_k' \sum_n^{\pm\infty} \frac{e^{2\pi i n k \alpha - zq n^2}}{k^2} q^{z-1} dq. \\ |\mathfrak{J}_3(z)| &< 2\zeta(2) \cdot |z^z| \cdot \int_{\frac{1}{z\bar{z}}}^1 \sum_n^{\pm\infty} e^{-\delta q n^2} q^{x-1} dq \\ &= 2\zeta(2) \cdot |z^z| \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} \int_1^{\frac{z\bar{z}}{x}} \sum_n^{\pm\infty} e^{-\frac{qn^2\pi^2}{x}} q^{-x-\frac{1}{2}} dq \\ &< 2\zeta(2) \cdot |z^z| \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} \left(2 \int_1^{\infty} e^{-\frac{qn^2\pi^2}{x}} q^{-x-\frac{1}{2}} dq + \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{-x+\frac{1}{2}}}{\left| -x+\frac{1}{2} \right|} \right) \\ &= O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|} |y|^x\right) + O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Da

$$|z^z| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|} |y|^x\right),$$

$$|\bar{z}^{-z}| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{-x}\right)$$

und

$$\Gamma^{-1}(z) = O\left(e^{+\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{-x+\frac{1}{2}}\right)$$

in jedem Vertikalstreifen gleichmäßig in x , folgt

Satz: $|Z(s)| = |Z(2z)| = O(|y|) = O(|t|)$ gleichmäßig in σ für alle σ , für die gleichzeitig

$$0 < \sigma \leq 1 \text{ und } \sigma > 1 - \frac{2}{\mu}.$$

Wir müssen uns nun noch von der Annahme befreien $0 < \sigma$, indem wir $|Z(s)|$ für $\sigma > 1 - \frac{2}{\mu}$ und $\sigma < 0$ abschätzen.

Wir setzen jetzt voraus $\sigma < 0$ und damit $x < 0$ und nehmen nun als Hilfspunkt $\tilde{z} = -x + iy$ und lassen bei $\tilde{z}$ und $\bar{\tilde{z}}$ die Knicke der Integrationswege eintreten.

Wählen wir hier entsprechende Bezeichnungen, so ist in unserem Streifen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1^*(z) &= O(|\tilde{z}^z|); \mathfrak{S}_2^*(z) = O\left(\left|\tilde{z}^{-z+\frac{1}{2}}\right|\right); \text{ das Glied ganz rechts in (9) } \\ &= \frac{\zeta(2)\tilde{z}^z}{z}; \mathfrak{S}_3^*(z) = O\left(|\tilde{z}^z| \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}^{-x+\frac{1}{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Da $|\tilde{z}^z| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|}|y|^x\right)$, $|\tilde{z}^{-z}| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|y|}|y|^{-x}\right)$ ebenda gleichmäßig in x , so folgt

Satz: $Z(\sigma + it) = O(|t|^{1-\sigma})$ für alle σ für die gleichzeitig $\sigma < 0$ und $\sigma > 1 - \frac{2}{\mu}$.

Nun können wir den Schnee-Landauschen Konvergenzsatz anwenden und bekommen so

Hauptsatz: Die Dirichletsche Reihe für $Z(s)$ konvergiert bei $\mu \geq 2$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{\mu}$ und bei $1 < \mu < 2$ für $\Re(s) > \frac{1}{1 + \frac{2}{\mu}}$; sie konvergiert sicher

nicht mehr für $\Re(s) < 1 - \frac{2}{\mu}$, wo μ durch (1) bestimmt ist. Folglich ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^x \left\{ \left(R(n\alpha) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right\} = O\left(x^{1-\frac{1}{\mu}+\varepsilon}\right)$$

für $\mu > 2$ und

$$\sum_{n=1}^x \left\{ \left(R(n\alpha) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right\} = O\left(x^{\frac{1}{1+\frac{2}{\mu}}+\varepsilon}\right)$$

für $1 < \mu < 2$, ferner

$$\sum_{n=1}^x \left\{ \left(R(n\alpha) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right\} = O\left(x^{1-\frac{2}{\mu}-\varepsilon}\right)^6.$$

Die Bohrsche Summabilitätsgrenze ist $\sigma = 1 - \frac{2}{\mu}$ ⁷⁾.

§ 4. $\sum_m P_q(m\alpha)$ für $q > 2$.

Wir können die Methoden des vorigen Paragraphen auch für gewisse Summen anwenden, in deren Gliedern die $R(n\alpha)$ in höherer als zweiter Potenz auftreten. Bezeichnen wir

$$\left(R(n\alpha) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} = P_2(n\alpha),$$

⁶⁾ Siehe Anmerkung ³⁾ auf S. 254.

⁷⁾ Siehe H. BOHR, Göttinger Nachrichten 1909 S. 258, Satz XVIa.

so bekommen wir durch die Forderungen

$$P_2'(x) = -P_{2H-1}(x), \quad P_2'(x) = P_{2H}(x), \quad (H = 1, 2, \dots)$$

$$\int_0^1 P_q(x) dx = 0 \quad (q = 2, 3, \dots)$$

eine Reihe von Polynomen P_q in $R(n\alpha)$, deren Grad q genau wie die Gliednummer steigt. Sie unterscheiden sich von den Bernoullischen Funktionen $(q-1)$ -Grades nur um den Faktor $\pm (q-1)!$. Für die Polynome P_q gilt die Fourierreentwicklung:

$$P_q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{(2\pi k)^q}.$$

Ist q gerade, so können wir die Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_q(m\alpha),$$

$$Z_q(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_q(m\alpha)}{m^s}$$

ebenso behandeln wie $\sum P_2(n\alpha)$ und $Z(s)$. Wir bilden wieder

$$S_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - q \log k},$$

$$S_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 t R^2(k\alpha) - q \log k}.$$

Dann ist ebenso wie in § 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left\{ t^{\frac{q}{2\mu} + \frac{\delta q}{2}} (S_1(t) + S_2(t)) \right\} = \infty$$

für $\delta > 0$, denn das k_0^{te} Glied ist jetzt

$$\geq e^{-\left(\frac{q}{2(\mu-\delta)} - \frac{q}{2\mu} - \frac{\delta q}{2}\right) \log t + c_3(\delta, \mu)}$$

wo μ wieder durch (1) festgelegt ist.

Auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{q}{2\mu} - q\delta} S_1(t) \right\} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^{\frac{q}{2\mu} - q\delta} S_2(t) \right\} = 0$$

⁹⁾ Siehe etwa BIEBERBACH, Funktionentheorie I, Berlin 1922, Abschnitt XIV.

ist ebenso zu beweisen. Das größte Glied ist offenbar kleiner als

$$e^{-\frac{\pi^2 t}{k_0^2 \mu + 2\delta} - q \log k_0 + \left(\frac{q}{2\mu} - \delta q\right) \log t}$$

wo k_0 sich ergibt aus: $k_0^{2\mu+2\delta} = \pi^2 t \cdot (\mu + \delta) \cdot \frac{2}{q}$, und folglich ist das größte Glied $O(1)$ in t für festes δ . Auch sieht man sofort, insbesondere wenn man beachtet, daß wieder nur die Glieder zwischen $[k_0^{1-\varepsilon}]$, $[k_0^2]$ in t nichtbeschränkte Zähler⁹⁾ haben können und die Anzahl der Glieder in Klasse B unabhängig von q ist, daß der Konvergenzbeweis hier ebenso weiterzuführen ist wie bei P_2 . Wir haben also wieder:

Satz: Für gerades q ist $Z_q(s)$ regulär für $\Re(s) > 1 - \frac{q}{\mu}$ und wächst

bei Annäherung an den Punkt $s = 1 - \frac{q}{\mu}$ über alle Grenzen.

Beachten wir, daß die Abschätzungen für $Z_q(\sigma + it)$ für $\sigma < 1$ genau so vorzunehmen sind und dieselben Resultate liefern wie für $Z(\sigma + it)$, so folgt ein dem Hauptsatz analoger für $\sum P_q$ mit geradem q .

Bei den $\sum P_q(x)$ mit ungeradem q können wir nicht ebenso verfahren, da wegen $P_q(x) = -P_q(-x)$ für ungerade q die Theta-Transformationsformel nicht ebenso angewandt werden kann. Hier haben wir eine Modifizierung vorzunehmen, die wir für $P_3(x)$ jetzt durchführen.

$$Z_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_3(n\alpha)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{6} R^3(n\alpha) - \frac{1}{4} R^2(n\alpha) + \frac{1}{12} R(n\alpha)}{n^s},$$

$$Z_3(s) = \frac{1}{(2\pi)^3 \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n k \alpha - n^2 t}}{k^3} t^{\frac{s}{2} - \frac{1}{2}} dt.$$

Wir können statt $\sum_{n=1}^{\infty}$ setzen $\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ und wenden nun die Theta-Transformationsformel an, nachdem wir sie nach t differenziert haben¹⁰⁾

$$i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{2\pi i n k \alpha - t n^2} = -\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha k + n) e^{-\frac{\pi^2}{t} (\alpha k + n)^2}.$$

So bekommen wir

$$Z_3(s) \cdot 2 \cdot (2\pi)^3 \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = Z_{31}(s) + Z_{32}(s),$$

⁹⁾ Sogar nur die Glieder zwischen $[k_0^{1-\varepsilon}]$ und $[k_0^{\frac{q}{q-1}}]$.

¹⁰⁾ Den Hinweis hierauf verdanke ich Herrn HECKE.

$$Z_{31}(s) = \int_1^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n e^{2\pi i n k \alpha - t n^2}}{k^3} t^{\frac{s}{2} - \frac{1}{2}} dt,$$

$$Z_{32}(s) = i \pi^{\frac{3}{2}} \int_1^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha k + n)}{k^3} e^{-\pi^2 t (\alpha k + n)^2} t^{-\frac{s}{2}} dt.$$

Auch hier wird wieder das Verhalten von

$$\int_1^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(\alpha k)}{k^3} e^{-\pi^2 t (\alpha k + n)^2} t^{-\frac{s}{2}} dt$$

für $Z_{32}(s)$ ausschlaggebend sein. Man sieht leicht auf Grund der Untersuchungen für $\sum P_2(k\alpha)$ in § 2¹¹⁾, daß

$$t^{\frac{3}{2\mu} + \frac{1}{2} - \varepsilon} \sum_k \frac{R(\alpha k)}{k^3} e^{-\pi^2 t R^2(\alpha k)} = O(1), \quad \varepsilon > 0.$$

Somit ist $Z_{32}(s)$ regulär für $\sigma > 1 - \frac{3}{\mu}$; ob $s = 1 - \frac{3}{\mu}$ ein singulärer Punkt ist, bleibt fraglich, da unsere Reihen Glieder verschiedenen Vorzeichens haben. Im Falle von Herrn HECKE — lineare Polynome in $R(n\alpha)$ und α quadratisch — kommt es vor, daß der Punkt regulär ist¹²⁾. Die Abschätzungen von $Z_3(\sigma + it)$ als Funktion von t für $1 - \frac{3}{\mu} < \sigma \leq 1$ lassen sich offenbar genau so durchführen wie für $Z(s + it)$, und da die obigen Entwicklungen für $Z_3(s)$ ebenso gelten für

$$Z_{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2n+1}(k\alpha)}{k^s} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

so haben wir den

Hauptsatz: Für jedes $q \geq 2$ konvergiert die Dirichlet-Reihe

$$Z_q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_q(k\alpha)}{k^s},$$

wenn $\mu \geq q$, für $\Re(s) > 1 - \frac{q}{2\mu}$, wenn $q \geq \mu > 1$, für $\Re(s) > \frac{1}{1 + \frac{q}{\mu}}$, bei

geradem q konvergiert sie sicher nicht mehr für $\Re(s) < 1 - \frac{q}{\mu}$.

¹¹⁾ Siehe Anmerkung ⁹⁾.

¹²⁾ Siehe HECKE, a. a. O.

$$\sum_{k=1}^x P_q(k\alpha) = O\left(x^{1-\frac{q}{2\mu}+\varepsilon}\right)$$

für $\mu \geq q$,

$$\sum_{k=1}^x P_q(k\alpha) = O\left(x^{\frac{1}{1+\frac{q}{\mu}}+\varepsilon}\right)$$

für $q \geq \mu > 1$, ferner ist für gerades q

$$\sum_{k=1}^x P_q(k\alpha) = \Omega\left(x^{1-\frac{q}{\mu}-\varepsilon}\right). \quad (\varepsilon > 0)$$

Die Bohrsche Summabilitätsgrenze ist bei geradem $q: \sigma = 1 - \frac{q}{\mu}$.

Zusatz bei der Korrektur: Wie aus den Schlußbemerkungen der in diesem Hefte stehenden Arbeit der Herren HARDY und LITTLEWOOD hervorgeht, haben diese zu gleicher Zeit die obigen Fragen behandelt. Ihre Methoden zur Abschätzung des Fehlergliedes sind aber andere; sie unterscheiden sich von den hier benutzten wie der erste Beweis der Fortsetzbarkeit der Riemannschen ζ -Funktion von dem zweiten. In den Ergebnissen über den ersten singulären Punkt (von rechts ausgehend) ist zwischen uns insofern ein Unterschied als die Herren HARDY und LITTLEWOOD für $q = 1$ und 2 nachweisen, daß $\sigma = 1 - \frac{q}{\mu}$ eine natürliche Grenze ist und nur die technische Durchführung der Rechnung sie abhält, dies für alle q zu beweisen. Hier dagegen ist die Singularität der Punkte $s = 1 - \frac{q}{\mu}$ bei allen geraden q (dagegen nicht bei den ungeraden q) sofort zu sehen.