vernachlässigen; wir setzen sie gleich Null. Man kann diesen Beweis (!) noch weiter verfolgen. Wenn man sich eine noch so kleine endliche Größe vorstellt, so ist doch immer eine noch viel kleinere Größe denkbar, die mit dem schärfsten Mikroskop nicht mehr sichtbar gemacht werden kann. Da aber eine unendlich kleine Größe noch viel kleiner ist als diese, so kann der Beweis, daß sie gegen eine endliche Größe vernachlässigt werden kann, mit beliebiger Genauigkeit geführt werden. Sieht man unter dem Mikroskop am Ende eines Maßstabes mehrere Staubbörner, so bemerkt man, daß sie verschiedene Größe haben, daß das eine vielleicht zweimal so groß ist wie ein anderes. Das Verhältnis zweier sehr kleiner Größen ist also eine reelle (!) Zahl, hier z. B. Zwei. Nehmen wir jetzt schärfere Mikroskope und betrachten wir mit ihnen immer kleinere Teilchen, so nähern wir uns den unendlich kleinen Größen immer mehr. Man kann also mit beliebiger Genauigkeit beweisen, daß das Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen eine endliche Zahl ist.“ Angesichts dieses Tatbestandes scheint es nicht überflüssig, die Trivialität niederzuschreiben: Auch über einen mathematischen Gegenstand darf einer nur dann ein Buch schreiben, wenn er diesen Gegenstand versteht!

Hans Hahn.

Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten von L. Tesar. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906. VIII + 128 S. Preis geb. M. 2.20.

Dies Buch scheint mir weitaus besser zu sein, als die meisten anderen Lehrbücher der Differential- u. Integralrechnung zum Gebrauche an Mittelschulen, die in der letzten Zeit erschienen sind, wenigstens soweit sie mir unter die Hände kamen; es sei ihm daher eine eingehendere Besprechung gewidmet. Das erste Kapitel handelt von der graphischen Darstellung von Funktionen; es werden eingehend behandelt: die Gerade ($y = mx + b$), die Parabel ($y = ax^2 + bx + c$) und die gleichseitige Hyperbel ($y = \frac{a}{x}$). Kapitel II trägt die Überschrift Differentialquotient und Integral; ausgehend vom Begriffe der Geschwindigkeit wird, der erste Differentialquotient eingeführt, ausgehend vom Begriffe der Beschleunigung der zweite. Das Integral wird eingeführt als Summengrenzwert (Flächeninhalt) und sodann gezeigt, daß Differenzieren und Integrieren inverse Operationen sind. Es folgen geometrische und physikalische Anwendungen in großer Zahl. Kapitel III, Untersuchung von Kurven, bringt die übliche Kurvendiskussion, einschließlich der Lehre von der Krümmung. Kapitel IV entwickelt die Eigenschaften des Logarithmus und der Exponentialfunktion, und zwar (nach J. Tannery) ausgehend von der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel. Kapitel V endlich enthält die Lehre von den Maxima und Minima der Funktionen, die an zahlreichen gut gewählten Beispielen durchgeführt wird (Brechungsgesetz, Reflexionsgesetz, Thomsons Satz vom wirtschaftlichen Querschnitt etc.). — Mit Auswahl und Anordnung des Stoffes kann man sich wohl einverstanden erklären; vielleicht wird man die Behandlung des Logarithmus etwas gekünstelt finden, vielleicht auch bedauern, daß der Verfasser, in der Meinung, die Theorie der unendlichen Reihen erzeuge im Schüler nur öde Langweile (Vorwort, S. IV), von der Taylor'schen Reihe nichts erwähnt. Doch ist dies Ansichtssache. Nicht unerwähnt

darf aber bleiben, daß die Sprache nicht überall die in einem Mittelschullehrbuche ganz besonders notwendige Präzision zeigt. Gleich im ersten Paragraphen finden sich Belege dafür; z. B. heißt es bei Besprechung der Funktionen $y = \frac{a}{x}$ und $y = \sqrt{b - x^2}$ (S. 2): Zweitens erkennen wir, daß nur in einem bestimmten Intervall der unabhängigen Veränderlichen x y eine wohldefinierte Funktion sein wird.“ Welches soll dieses bestimmte Intervall für $\frac{a}{x}$ sein? oder ist der Satz anders zu verstehen? Ich weiß es nicht. Oder (S. 3): „Ferner ist der letzte Fall, vorausgesetzt, wir fassen die Wurzel als zweideutig auf, ein Beispiel dafür . . .“ Können wir die Wurzel auch als nicht zweideutig auffassen? Auch die Worte „im allgemeinen“ sollten tunlichst vermieden werden. Wenn z. B. (S. 3) der Satz vorkommt: „Im letzten Falle endlich ist einleuchtend, daß, soll y einen für uns vorstellbaren Wert haben, und auf solche wollen wir uns im allgemeinen beschränken . . .“ muß man sich fragen, ob also in Ausnahmefällen auch für uns nicht vorstellbare Werte in dem Buche vorkommen werden. Bedenklicher aber als diese sprachlichen Inkorrektheiten sind die, leider auch nicht allzu seltenen, sachlichen Inkorrektheiten. So wird z. B. (S. 9) ein funktionaler Zusammenhang als stetig bezeichnet, wenn die ihn darstellende Kurve „unzerrissen“ ist. Das kann wohl nicht anders gemeint sein, als daß eine Funktion stetig heißt, wenn sie nicht von einem Wert zu einem anderen übergehen kann, ohne alle Zwischenwerte anzunehmen. Diese Eigenschaft hat nun mit Stetigkeit so wenig zu tun, daß sie auch total unstetigen Funktionen zukommt! S. 36 wird die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ eingeführt als Limite des Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und es heißt: „Daß dieser Grenzquotient als Grenze eines Quotienten, dessen Zähler und Nenner der Null zustrebt, trotzdem einen bestimmten Wert hat, lehrt uns die Erfahrung.“ Das ist doch ganz unrichtig, die Erfahrung kann uns doch über die Existenz einer solchen Limite keinen Aufschluß geben! Durchaus unkorrekt ist auch ein Satz, wie der folgende (S. 47): „Nähert sich x_2 dem x_1 , so wird $\frac{x_2 - x_1}{2}$ eine sehr kleine Größe, daher $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$.“ Die Verfasser von Mittelschullehrbüchern über Differential- und Integralrechnung müßten, wie mir scheint, scharf darauf achten, den Schüler nicht durch vage Ausdrucksweise und logisch bedenkliche Beweise zur Ansicht zu verleiten, die ganze höhere Mathematik sei doch nur „ein Schwindel“; es könnte sonst leicht das Gegenteil von dem erreicht werden, was man anstrebt: es könnten leicht gerade die begabtesten Schüler abgestoßen werden und die Liebe zur Mathematik verlieren, sobald sie einsehen, daß der ihnen vorgetragenen Mathematik nicht mehr absolute Gewißheit zukommt. Ganz scheint mir diese Gefahr im vorliegenden Buche nicht vermieden zu sein. Ich möchte wünschen, daß sich der Verfasser möglichst mit den exakt arithmetischen Darstellungen der Infinitesimalrechnung (Stolz, Peano) befreunde; Unkorrektheiten, wie die oben angeführten, würden ihm dann wohl nicht mehr passieren; eine eventuelle Neuauflage des Buches würde dann hoffentlich so ausfallen, daß man es rückhaltlos empfehlen kann.

Hans Hahn.