**3. Eine absolute Messung der Schallintensität
und die Bestimmung
der Wärmeleitungsfähigkeit der Gase;
von Kálmán Heindlhofer.**

Im folgenden schlagen wir eine Methode vor zur Messung der Schallintensität, beruhend auf der Messung ihres termischen Effektes. Diese Methode stellt als Bedingung: eine verhältnismäßig große thermometrische Empfindlichkeit und zugleich eine kleine Wärmeträgheit. Diesen Bedingungen könnte Genüge geleistet werden mittels der Anwendung einer sehr dünnen Goldplatte, mit einem Meßtransformator und konst. EMK. in Serie geschaltet. Die Temperaturschwankungen der Goldplatte erzeugen Wechselstrom im Sekundärkreis des Transformators, daraus kann auf die Schallamplitude geschlossen werden.

(Anstatt Transformator kann unter Umständen eine Brückenschaltung angewendet werden.) Der Sekundärkreis des Transformators enthält einen Barretter als Meßorgan.

Im folgenden soll die Theorie der Methode gegeben werden.

Die Platte soll in die Fortpflanzungsrichtung ebener Schallwellen gelegt werden. In dieser Lage stört die Platte, in mechanischer Hinsicht, das Feld nicht. Die Gasteilchen ändern ihre Entfernung von der Platte während den Druckschwankungen nicht. Ferner sei die Dimension der Platte klein gegen die Wellenlänge, gemessen in der Fortpflanzungsrichtung. Dies bedingt eine örtlich konstante Verteilung des Druckes längs der Platte, es kann also bloß eine Wärmebewegung normal zur Platte auftreten, solange die Platte homogen und überall gleich dick vorausgesetzt wird. Die Wärme dringt in die Platte beiderseits symmetrisch zur Mittelebene ein. Die X-Achse normal zur Platte gelegt, ist die Differentialgleichung der Wärmebewegung in der Platte

$$(1) \quad a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t} .$$

Der Index 1 soll die Größen in der Platte, 2 in der Luft (Gas) bedeuten.

$$(2) \quad a_1 \equiv \frac{K_1}{\varrho_1 c_1},$$

für Gold ist $K_1 = 0,5$ bis $0,7$; $c_1 = 0,032$, $\varrho_1 = 19,2$, somit

$$a_1 \cong 0,83.$$

Eine in bezug auf die Mittelebene symmetrische Lösung ist

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} x} \sin\left(\nu t + \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} x\right) \\ \quad + C_1 e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} x} \sin\left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} x\right) + u_0. \end{cases}$$

u_0 ist die herrschende mittlere absolute Temperatur.

Die Differentialgleichung für die Luft erhalten wir durch die folgende Überlegung: In der Raumeinheit fließt durch die Flächeneinheit die Wärmemenge

$$K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

pro Zeiteinheit ein. Wenn Q die Wärmemenge pro Masseneinheit bedeutet, ist

$$(4) \quad dQ = c_v du_2 + A p dv,$$

wo c_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen, A das kalorische Arbeitsäquivalent und v das spezifische Volumen bedeutet.

Um die Rechnung einfacher zu halten, wollen wir uns mit dem Falle eines einfachen sinoidalen Tones mit der Schwingungszahl n begnügen. Offenbar könnte ein komplizierterer Ton mit etwas mehr Mühe ähnlich berechnet werden. Wenn p_0 den herrschenden mittleren Druck bedeutet, wird entsprechend unserem Ansatz

$$(5) \quad \begin{aligned} p &= p_0 + P \sin \nu t, \\ \nu &\equiv 2 \pi n. \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Raum, wo der Wärmeaustausch zwischen Luft und Platte stattfindet, sehr klein ist gegenüber der Wellenlänge, selbst bei hohen Tönen. Dadurch wird die von der Platte verursachte Druckstörung momentan ausgeglichen, d. h. ungestört bleiben.

(4) und (5) ergibt

$$dQ = c_v du_2 + (A p_0 + A P \sin \nu t) dv,$$

dies mit der Zustandsgleichung der Gase

$$p v = R u_2$$

kombiniert, ergibt

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c_v \frac{\partial u_2}{\partial t} + A R \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{A R u_2}{P \sin \nu t + p_0} P \nu \cos \nu t.$$

Da P sehr klein gegen p_0 und u_2 fast absolut konstant ist, kann die letzte Gleichung wesentlich einfacher geschrieben werden.

Die letzte Gleichung auf das Einheitsvolumen reduziert und mit der eingeströmten Wärmemenge pro Zeiteinheit gleichgesetzt, erhalten wir

$$K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varrho_2 (c_v + A R) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\varrho_2 A R u_0}{p_0} P \nu \cos \nu t.$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$(6) \quad \frac{K_2}{\varrho_2 (c_v + A R)} = \frac{K_2}{\varrho_2 c_p} \equiv a_2,$$

$$(7) \quad \frac{A R u_0 P}{p_0 c_p} \equiv b.$$

Für die Luft ist ungefähr

$$a_2 = 0,000182, \quad b = 87,4 \left(\frac{P}{p_0} \right),$$

wenn $u_0 = 300^\circ \text{C.}$ ist (etwa im Sommer).

Somit ist die obere Gleichung

$$a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} - b \nu \cos \nu t.$$

Wenn wir substituieren

$$u_2 = a_2 z + b \sin \nu t,$$

wo z eine neue Variable bedeutet, erhalten wir

$$a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Als Lösung soll

$$z = -C e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_2}} x} \sin \left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu}{2a_2}} x + \gamma \right) + \text{const.}$$

angenommen werden, so ist nach der Substitutionsgleichung

$$(8) \quad \begin{cases} u_2 = -C_2 e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_2}} (x-\mu)} \cdot \sin \left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu}{2a_2}} (x-\mu) + \gamma \right) \\ \quad + b \sin \nu t + \mu_0, \end{cases}$$

wo μ die halbe Plattendicke bedeutet.

Wir wollen die Wärmestrahlung zwischen der Platte und Umgebung in Betracht ziehen, da diese Wärme vergleichbar mit dem Wärmegewinn der Platte ist. Entsprechend dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz ist die pro 1 cm² Oberfläche ausgestrahlte Wärmemenge pro Sekunde

$$\sigma [(u_1)_{x=\mu}^4 - u_0^4].$$

Da die Änderung von u_1 sehr klein ist, kann gesetzt werden:

$$\sigma [(u_1)_{x=\mu}^4 - u_0^4] = 4 u_0^3 C_1 \sigma \left[e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \left(\nu t + \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right) + e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right) \right].$$

Nun können wir die Grenzbedingungen einführen.

$$(9) \quad \begin{cases} K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=\mu} - K_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=\mu} \\ \quad + 4 u_0^3 C_1 \sigma \left[e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \left(\nu t + \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right) \right. \\ \quad \left. + e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right) \right] \equiv 0 \end{cases}$$

und

$$(10) \quad u_1 \equiv u_2$$

für jeden Wert von t .

(9) und (10) bestimmen C_1 , C_2 und γ , uns interessiert bloß C_1 , somit wollen wir die Bestimmung von C_2 und γ unterlassen.

Gleichung (9) ergibt für $t = 0$.

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & K_1 C_1 \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu + e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \cos \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right. \\ & \quad \left. + e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu - e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \cos \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right\} \\ & - K_2 C_2 \sqrt{\frac{\nu}{2a_2}} \{ \sin \gamma + \cos \gamma \} \\ & + 4 u_0^3 C_1 \sigma \left\{ e^{\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right. \\ & \quad \left. - e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu} \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Gleichung (10) ergibt für $t = 0$ und $t = \pi/2$ nach Addition

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & 2 C_1 \left\{ \sin h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu + \cos h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \cos \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \right\} \\ & + b = C_2 (\sin \gamma + \cos \gamma). \end{aligned} \right.$$

Gleichungen (6), (7), (11), (12) ergeben

$$(13) \quad C_1 = \frac{b}{2 \sin h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu + 2 \cos h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \cos \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu + \sqrt{\frac{K_1 \varrho_1 C_1}{K_2 \varrho_2 C_2}} \{B\}},$$

wo zur Abkürzung sei

$$\begin{aligned} B &= 2 \cos h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu + 2 \sin h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \cos \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \\ &+ \frac{8 u_0^3 \sigma}{K_1 \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}}} \sin h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu. \end{aligned}$$

Für eine Schwingungszahl $n = 2000 \text{ sec}^{-1}$ und eine Plattendicke $2\mu = 10^{-5} \text{ cm}$ ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu &\cong 0,000436, \\ \sin h \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu &= 0,000436 + \frac{1}{8} (0,000436)^3 + \dots \\ \sin \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu &= 0,000436 - \frac{1}{8} (0,000436)^3 + - \dots \end{aligned}$$

$$\cos h \sqrt{\frac{\nu}{2 a_1}} \mu = 1 + \frac{1}{2} (0,000436)^2 + \dots$$

$$\cos \sqrt{\frac{\nu}{2 a_1}} \mu = 1 - \frac{1}{2} (0,000436)^2 + \dots$$

Daraus folgt, daß die Gleichung (13) kann einfacher geschrieben werden,

$$(14) \quad C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{1 + \sqrt{\frac{2 \nu}{K_2 q_2 c_p}} \cdot (q_1 c_1 \mu)}.$$

Dies ist gültig, wenn die Schwingungszahl bis 2000 oder noch mehr ist und die Plattendicke bis 10^{-5} oder etwas mehr betrifft. Bekanntlich kann Gold noch dünner gehämmert werden. — Gleichung (14) lehrt, daß das Leitvermögen der Platte praktisch keine Rolle spielt, vielmehr ist die Wärmeabsorption pro 1°C. maßgebend. Es ist ferner ersichtlich, daß die Wärmestrahlung die Amplitude nicht beeinflusst. (Sie bedingt offenbar nur eine Phasenverschiebung.) Die Gleichung (3) kann ähnlich vereinfacht werden,

$$(15) \quad u_1 = 2 C_1 \sin \nu t + u_0.$$

Es wird interessant sein, einige spezielle Fälle auszurechnen. Für $\mu = \frac{1}{2} 10^{-5} \text{ cm}$ wird für die untere Hörgrenze $n = 16$,

$$(C_1)_{16} = \frac{1}{2} \frac{b}{1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{5,6 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0013 \cdot 0,238}} 19,2 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{2} 10^{-5}},$$

$$(C_1)_{16} = \frac{1}{2} \frac{b}{1,33},$$

somit nach (15)

$$u_1 = 0,75 b \sin \nu t + u_0,$$

entspricht also 25% Temperaturabfall.

Sei für dieselbe Platte $n = 2000$, also ziemlich hoch, so ist

$$(C_1)_{n=2000} = \frac{1}{2} \frac{b}{4,7},$$

dies entspricht einem Abfall von etwa 79% . Dies würde dafür sprechen, daß die Methode für die meisten praktischen Fälle brauchbar wäre, was die Frequenz anbetrifft.

Was die Empfindlichkeit anbetrifft, würden die Versuche die einfachste Aufklärung geben; es wäre nämlich nur nötig,

die Grundstromstärke so lange zu steigern, bis die Resultate dieselben bleiben (vorausgesetzt, daß das Schallfeld konstant gehalten wird). Es ist nämlich leicht einzusehen, daß eine erhebliche Erwärmung der Platte von dem elektrischen Strom die Konstanten der Differentialgleichung ändert und eine theoretisch unkontrollierbare Abweichung stattfinden muß. Eine andere Störung wird veranlaßt durch die Wärmewirkung des übergelagerten Wechselstromes. Vorausgesetzt, daß wir eine Störung dieser Art von der Größenordnung von 1%₀₀ zulassen, können wir den entsprechenden maximalen Grundstrom durch die Einheitsbreite folgendermaßen ermitteln:

$$i = i_0 \frac{1}{1 + \varepsilon 2 C_1} \cong i_0 (1 - \varepsilon 2 C_1).$$

Wenn ε den elektrischen Temperaturkoeffizienten, r den spezifischen Widerstand bedeutet, ist

$$\frac{1}{2n} i_0^2 (2 C_1 \varepsilon)^2 \cdot \frac{r}{2\mu} \leq 4,192 \mu c_1 \varrho_1 \frac{2 C_1}{1000}$$

daraus

$$i_0 \leq \frac{2\mu}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4,19 c_1 \varrho_1 n}{1000 r C_1}}.$$

Für $2\mu = 10^{-5}$ cm Platindicke ist

$$i_0 \leq 0,096 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{C_1}}.$$

Die Wechselstromamplitude wird

$$i_{1a} \sim \frac{1}{2} 0,0035 0,096 \cdot 2 \sqrt{C_1 n} = 3,35 \cdot 10^{-4} \sqrt{C_1 n},$$

für eine Schallamplitude von $P = 10^{-4}$ Atm. (1 mm Wassersäule) wäre:

$$i_{1a} \leq 2,2 \cdot 10^{-5} \sqrt{n} \text{ Amp.}$$

Sei für den tiefsten Ton ($n = 16$) und $P = 10^{-4}$ Atm. die Wechselstromamplitude berechnet, so erhalten wir:

$$i_{1a} \sim 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.} = 88 \text{ Mikroamp.}$$

Diese Stromstärke ist leicht meßbar mit dem Gätischen transportablen Barrettersystem.¹⁾ Gätis Meßanordnung hat

1) Gáti, Elektrotechn. Zeitschr. 1907. p. 91; Physik. Zeitschr. 10. 1909. p. 897.

den großen Vorteil, daß sie einen sehr erweiterbaren Meßbereich besitzt. Ersetzt man das Spitzengalvanometer durch ein Fadeninstrument, so kann man die Empfindlichkeit mehr als 1000 mal steigern. Im obigen Beispiel wäre also die Meßgrenze $P = 10^{-7}$ Atm. oder 10^{-3} mm Wassersäule, was jedenfalls eine ziemlich brauchbare Empfindlichkeit wäre.

Wenn man genügend Raum zur Verfügung hat, könnte man anstatt 1 cm Breite eine größere Streifenbreite anwenden, oder mehrere parallel schalten und so die Empfindlichkeit noch weiter steigern. Wenn man die Bedingung der absoluten Messung fallen läßt und mit geeichten Streifen arbeitet, könnte man daran denken, den äußerst delikaten Goldstreifen auf einen Wärmeisolator aufzukleben (so z. B. auf Glimmer, Quarz- oder Glasfadengitter usw.), dadurch würde an praktischer Anwendbarkeit gewonnen.

Wir wollen nicht unerwähnt lassen, daß die beschriebene Meßmethode als quantitativer Schallresonator durchgebildet werden könnte, wenn man den gewonnenen Wechselstrom auf einen elektrischen Schwingungskreis einwirken ließe.

Auch ein Mikrophon könnte auf diesem Wege hergestellt werden, man müßte dann den Grundstrom auf den höchsten erreichbaren Wert steigern, weil dann der elektrische Temperaturkoeffizient erheblich steigt und die höhere Lufttemperatur ebenfalls günstig wirkt (Gleichung (7)). Der beste Effekt ist erreicht, wenn der Schall durch einen Schalltrichter konzentriert wird. Eine bessere Kühlung, als dies bei den Kohlenmikrophonen möglich ist, wäre voraussichtlich leicht durchkonstruierbar; ob jedoch auf diesem Wege ein Starkstrommikrophon hergestellt werden könnte, kann nur auf Grund von Versuchen beantwortet werden, da es eine offene Frage ist, wie hoch die Schallwellen konzentriert werden können. Meines Wissens liegen derlei Versuche und Mikrophonanordnungen bis jetzt noch nicht vor.

Experimentelle Daten für die vorliegende Arbeit sind noch nicht ausgeführt worden, diese sollen den Gegenstand einer zukünftigen Abhandlung bilden.

Die vorliegende Idee könnte ausgedehnt werden auf die Messung der Wärmeleitungskonstante der Gase, sobald man nur unter einem Kolben eine bekannte Druckvariation erzeugt und den Detektorstreifen in diesem Raum anbringt. Der Kolben kann etwa mittels eines Motors sinoidal bewegt, der Hub etwa mit einer Mikrometeranordnung gemessen werden. Mittlerer Druck und Temperatur können mit einem Barometer und Thermometer, angebracht im Zylinder, stets kontrolliert werden. Vermittelt Gleichung (7) und (14) sind wir in der Lage, K_2 zu berechnen.

Es entsteht die Frage, was ist die günstigste Plattendicke 2μ ? Eine unendlich dünne Platte gibt kein Resultat, eine zu dicke würde eine zu kleine Empfindlichkeit ergeben. Es muß also ein Optimum existieren. Die Bedingung für ein Optimum ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \sqrt{\frac{\nu}{2a_1}}} \left(\frac{\partial K_2}{\partial C_1} \right) = 0.$$

Wenn wir die Werte einsetzen, erhalten wir nach Ausrechnung

$$\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu = \frac{1}{2} \log \text{nat} \left\{ \frac{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_1 q_1 K_1}{c_p q_2 K_2}} + 1}{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_1 q_1 K_1}{c_p q_2 K_2}} - 1} \right\}.$$

Für Luft und Gold erhalten wir

$$\sqrt{\frac{\nu}{2a_1}} \mu = 0,0007094,$$

ν und somit n soll nicht zu klein sein, um Störungen, verursacht von Konvektion und Radiation, zu vermeiden und auch um einen konstanten und nicht einen pendelnden Ausschlag am Galvanometer zu erhalten. Zu hoch darf n nicht gewählt werden wegen der Grenze, die durch den antreibenden Motor, Vibrationen usw., die den Kolbenhub beeinflussen, gegeben ist. Die Grenze wird vielleicht $n = 10$ und $n = 40$ sein. Dies ergibt für Luft und Gold eine günstigste Plattendicke von $2\mu = 0,00046$ bis $0,00023$ cm.

Ich möchte nicht unerwähnt lassen die Schwierigkeit, die wahrscheinlich auftreten wird bei der Ausmessung der Platten-

dicke, hauptsächlich für die Zwecke der Schallmessung. Eine direkte Mikrometermessung ist undenkbar. Man wird auf Umwege angewiesen sein. So würde eine Dichtebestimmung und eine genaue Wägung eine mittlere Dickenberechnung zulassen. Eine zweite Methode wäre die Bestimmung des elektrischen Widerstandes. Dieser Weg hat den Vorteil der großen Genauigkeit und auch die Möglichkeit, die Homogenität der Platte bezüglich der Dicke zu untersuchen. Beide Verfahren haben eine Unsicherheit darin, daß es nicht gesagt werden kann, daß die Dichte bzw. der spezifische Widerstand sich bei dem Walzen und Hämmern nicht ändern. Jedoch, wenn beide Verfahren zu demselben Ergebnis führen, könnte man es mit großer Wahrscheinlichkeit für richtig annehmen.

(Eingegangen 6. November 1911.)