ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 48.

**1. Theoretisches und Experimentelles zu der
piezoelektrischen Erregung eines Kreiszylinders
durch Drillung und Biegung;
von W. Voigt und V. Freedericksz.**

Mitgeteilt von W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung der K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen
am 8. Mai 1915.)

1. Die ersten Versuche, einen Kristall *durch Drillung* piezoelektrisch zu erregen, hat Hr. Röntgen¹⁾ angestellt. Er benutzte dabei zwei Kreiszyylinder aus Bergkristall, deren Achsen der kristallographischen Hauptachse parallel sein sollten, und studierte ihre Erregung mit Hilfe der Influenz auf einen der Oberfläche genäherten, zur Zylinderachse parallelen und mit einem Elektrometer verbundenen Draht. Die Beobachtungen ergaben überraschenderweise im scheinbaren Widerspruch mit der trigonalen Symmetrie des Bergkristalles eine Erregung, bei der vier Quadranten des Zylinderumfangs sich abwechselnd entgegengesetzt verhielten. Hr. Röntgen hat an seinen Quarzzyindern auch das inverse Phänomen, die elektrische Drillungsdeformation, hervorgebracht. Er setzte zu diesem Zweck seine beiden Quarzzyylinder zu einem von der doppelten Länge zusammen und armierte das Präparat mit Hilfe von Stanniolstreifen, die auf die vier Zonen stärkster piezoelektrischer Erregung aufgeklebt wurden. Bei abwechselnd +- und -- Ladung und Entladung dieser Streifen, ließ die Beobachtung mit Fernrohr, Spiegel und Skala an dem freien Ende des einseitig befestigten Zylinders eine minimale Drehung erkennen.

Nach der allgemeinen Theorie der piezoelektrischen Erregung²⁾ beruht der ganze von Hrn. Röntgen beobachtete Effekt darauf, daß die Achsen seiner Zylinder nicht genau in die kristallographische Hauptachse fielen, da ein genau

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **39**. p. 16. 1889.

2) W. Voigt, Gött. Abh. 1890; Kristallphysik, p. 814. Leipzig 1910.

richtig orientierter Zylinder keine der beobachteten Wirkungen zeigen kann. Es besteht nämlich der allgemeine Satz¹⁾, daß ein gleichwie immer orientierter Kreiszyylinder aus beliebiger Kristallsubstanz durch gleichförmige Drillung oder Biegung, *wenn überhaupt*, dann stets so erregt wird, daß sein Umfang in vier Quadranten abwechselnd entgegengesetzten Verhaltens zerfällt. Ist also die kristallographische Symmetrie des Zylinders mit einer solchen Vierteilung im Widerspruch, so muß die Erregbarkeit überhaupt fehlen.

Der Umstand, daß nach dem Vorstehenden die piezoelektrische Erregung durch Drillung und ihr Reziprokes bisher eigentlich sozusagen nur zu Unrecht beobachtet worden sind, ließ es mir erwünscht erscheinen, einige Beobachtungen nach wirklicher Anleitung der Theorie auszuführen. In der Tat mag wohl die bisherige ausschließlich negative Aussage der Theorie bzw. der Röntgenschen Beobachtung nicht voll überzeugend erscheinen und einer Ergänzung nach der positiven Seite bedürfen. Offenbar mußte in geeignet gewählten Orientierungen der Effekt beträchtlich stärker ausfallen, als bei den von Hrn. Röntgen gewählten, im Grunde sehr ungünstigen Verhältnissen, und quantitativ mit der Theorie vergleichbar sein. Ferner schien es mir lohnend, daneben ein erstes Beispiel für die Erregung eines Zylinders durch *Biegung* zu liefern, da meine theoretischen Entwicklungen diesen Fall mit umfassen und für ihn analoge Verhältnisse signalisieren wie für die Drillung, eine bezügliche Beobachtung bisher aber fehlt.

2. Die Potentialfunktion eines hinreichend langen, der Z-Achse parallelen und längs dieser Achse homogen erregten Zylinders läßt sich schreiben

$$(1) \quad \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \int P_1 \ln(r^2) dq_0 + \frac{\partial}{\partial y} \int P_2 \ln(r^2) dq_0,$$

wobei P_1 und P_2 die spezifischen elektrischen Momente nach X und Y bezeichnen, dq_0 das Querschnittelement des Zylinders an der Stelle $x_0 y_0$ und r die Entfernung dieses Elementes von dem betrachteten Punkt xy ist. Wir schreiben dies kurz

$$(2) \quad \varphi = \frac{\partial J'}{\partial x} + \frac{\partial J''}{\partial y}.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 62 bzw. 887.

Für unseren Fall eines kreisförmigen Querschnittes führen wir Polarkoordinaten ein, setzen also

$$(3) \quad \begin{cases} x = p \cos \chi, & y = p \sin \chi, & x_0 = p_0 \cos \chi_0, \\ & y_0 = p_0 \sin \chi_0, & dq_0 = p_0 d p_0 d \chi_0 \end{cases}$$

und schreiben

$$(4) \quad \begin{cases} \text{für } p > p_0: \ln r^2 = \ln p^2 - 2 \sum \frac{1}{h} \left(\frac{p_0}{p} \right)^h \cos h(\chi - \chi_0), \\ \text{für } p < p_0: \ln r^2 = \ln p_0^2 - 2 \sum \frac{1}{h} \left(\frac{p}{p_0} \right)^h \cos h(\chi - \chi_0). \end{cases}$$

Analog entwickeln wir P_1 und P_2 in Reihen nach den Formeln

$$(5) \quad \begin{cases} P_1 = A_0' + \sum (A_n' \cos n\chi_0 + B_n' \sin n\chi_0), \\ P_2 = A_0'' + \sum (A_n'' \cos n\chi_0 + B_n'' \sin n\chi_0); \end{cases}$$

die A und B sind dabei Funktionen von p_0 , und alle Reihen sind von 1 bis ∞ erstreckt.

Kürzt man bei Einführung des Zylinderradius R ab:

$$(6) \quad \int_0^R A_n' p_0^{n+1} d p_0 = A_n', \quad \int_0^R B_n' p_0^{n+1} d p_0 = B_n', \dots,$$

so ergibt sich für äußere Punkte, d. h. für $p > R$

$$(7) \quad J' = 2 \pi \left[A_0' \ln(p^2) - \sum \frac{1}{h p^h} (A_h' \cos h\chi + B_h' \sin h\chi) \right]$$

und analog J'' . Hieraus folgt dann gemäß (2)

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi = 2 \pi \left[\frac{2}{p} (A_0' \cos \chi + A_0'' \sin \chi) \right. \\ \left. + \sum \frac{1}{p^{h+1}} ((A_h' - B_h'') \cos(h+1)\chi + (A_h'' + B_h') \sin(h+1)\chi) \right]. \end{cases}$$

Von dieser allgemeinen Formel machen wir Anwendung auf den Fall, daß P_1 und P_2 linear in x und y sind; wir setzen demgemäß

$$(9) \quad \begin{cases} P_1 = a' x_0 + b' y_0 = p_0 (a' \cos \chi_0 + b' \sin \chi_0), \\ P_2 = a'' x_0 + b'' y_0 = p_0 (a'' \cos \chi_0 + b'' \sin \chi_0). \end{cases}$$

Es verschwinden dann alle A und B , mit Ausnahme von

$$(10) \quad A_1' = p_0 a', \quad B_1' = p_0 b', \quad A_1'' = p_0 a'', \quad B_1'' = p_0 b''$$

und analog auch alle A und B , mit Ausnahme von

$$(11) \quad A_1' = \frac{1}{4} a' R^4, \quad B_1' = \frac{1}{4} b' R^4, \quad A_1'' = \frac{1}{4} a'' R^4, \quad B_1'' = \frac{1}{4} b'' R^4.$$

Hiernach wird in dem vorausgesetzten Falle

$$(12) \quad \varphi = \frac{\pi R^4}{2p^2} [(a' - b') \cos 2\chi + (a'' + b') \sin 2\chi].$$

Für die Beobachtung nach der Kundtschen Bestäubungs- oder der Röntgenschen Influenzmethode ist die zum Radius p parallele Feldkomponente $\mathfrak{E}_p = -\partial\varphi/\partial p$ für $p = R$ maßgebend. Für diese folgt nunmehr

$$(13) \quad \bar{\mathfrak{E}}_p = \pi R [(a' - b') \cos 2\chi + (a'' + b') \sin 2\chi].$$

Da nach der Theorie die gleichförmige Biegung und Drillung eines elliptischen, und spezieller eines Kreiszylinders auf Ausdrücke für P_1 und P_2 von der Form (9) führt, so hat die gewonnene Formel für φ auch in diesen Fällen Geltung, und es folgt der Satz, auf den im Eingang Bezug genommen ist.

Für absolute Messungen der Erregung wird man am besten so verfahren, daß man die vier Quadranten, in denen $\mathfrak{E}_p$ je dasselbe Vorzeichen bewahrt, mit leitenden, aber gegeneinander isolierten Belegungen versieht und die bei der Deformation in ihnen influenzierten Ladungen durch die meßbaren Elektrizitätsmengen kompensiert, die ein Curiescher Quarzstreifen liefert. Die Theorie dieses Verfahrens setzt voraus die Bestimmung derjenigen Oberflächendichte σ_0 , deren Potentialfunktion diejenige der Erregung des Zylinders in der ganzen Oberfläche zu Null kompensiert.

Machen wir für σ_0 den Ansatz

$$(14) \quad \sigma_0 = m_0 + \Sigma (m_h \cos h\chi^0 + n_h \cos h\chi^0),$$

so findet sich die Potentialfunktion von σ_0 zu

$$(15) \quad \varphi_0 = -2\pi R \left[m_0 \ln R^2 - \Sigma \frac{1}{h} \left(\frac{p}{R} \right)^h (m_h \cos h\chi + n_h \sin h\chi) \right].$$

Damit nun für $p = R$

$$\varphi + \varphi_0 = 0$$

sei, muß gelten

$$m_2 = \frac{1}{2} R (a' - b''), \quad n_2 = \frac{1}{2} R (a'' + b'),$$

während alle anderen m und n verschwinden. Somit findet sich

$$(16) \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} R [(a' - b'') \cos 2\chi + (a'' + b') \sin 2\chi],$$

was mit $\bar{\mathfrak{E}}_p/2\pi$ übereinstimmt.

Um die Gesamtladung eines Quadranten zu bestimmen, hat man σ_0 über die Fläche der Belegung zu integrieren.

3. Für einen Kristall der hemimorphen Gruppe des trigonalen Systemes (Quarz) lauten die Werte der piezoelektrischen Momente nach den Koordinatenachsen, als Funktionen der Druckkomponenten $X_x, \dots X_y$, falls man (wie ich gewöhnlich tue) die Z - in die Hauptachse, die X - in eine Nebenachse legt¹⁾,

$$(17) \quad \begin{cases} -P_1 = d_{11}(X_x - Y_y) + d_{14}Y_z, \\ P_2 = d_{14}Z_x + 2d_{11}X_y, \quad P_3 = 0. \end{cases}$$

Dabei stellen d_{11} und d_{14} die beiden piezoelektrischen Moduln der bezüglichen Kristallgruppe dar.

Die Druckkomponenten im Innern eines mit dem Moment N um die Längsachse gedrillten Kreiszyllinders werden, wenn die Z' -Achse in diese Längsachse gelegt wird, bei beliebigen X' - und Y' -Richtungen, gegeben durch²⁾

$$(18) \quad X'_x = Y'_y = Z'_z = X'_y = 0, \quad Y'_z = -\frac{2Nx'}{\pi R^4}, \quad Z'_x = +\frac{2Ny'}{\pi R^4}.$$

Fällt die Z' - mit der obigen Z - bzw. Hauptachse zusammen, und ebenso X' mit X , Y' mit Y , dann wird

$$(19) \quad P_1 = \frac{2Nd_{14}x}{\pi R^4}, \quad P_2 = \frac{2Nd_{14}y}{\pi R^4}, \quad P_3 = 0.$$

Die elektrische Erregung findet in diesem ersten Hauptfalle in radialer Richtung und in mit $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ proportionaler Stärke statt. Es ist von vornherein klar, daß eine solche Erregung in dem Außenraum keine Wirkung üben kann, und der allgemeine Ausdruck für φ bestätigt dieses.

Nehmen wir den zweiten speziellen oder Hauptfall, daß der Zylinder mit seiner Achse parallel einer Nebenachse liegt, so formen wir das Formelsystem (17) am besten durch zyklische Vertauschung auf ein Achsenkreuz um, dessen Y -Achse in die Hauptachse und dessen Z - in eine Nebenachse fällt. Dasselbe lautet nun

$$(20) \quad \begin{cases} P_1 = d_{14}Y_z + 2d_{11}Z_x, \quad P_2 = 0, \\ -P_2 = d_{11}(Z_z - X_x) + d_{14}X_y. \end{cases}$$

1) W. Voigt, l. c. p. 26 bzw. 830 u. 832.

2) S. W. Voigt, Gött. Abh. 1887, p. 61; Kristallphysik, p. 636.

Hier ergibt sich dann

$$(21) \quad -P_1 = \frac{2N}{\pi R^4} (x d_{14} - 2y d_{11}), \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0;$$

es ist also nach (9)

$$(22) \quad a' = -\frac{2N d_{14}}{\pi R^4}, \quad b' = +\frac{4N d_{11}}{\pi R^4}, \quad a'' = b'' = 0,$$

und nach (12) und (16)

$$(23) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{N}{p^2} (-d_{14} \cos 2\chi + 2d_{11} \sin 2\chi), \\ \sigma_0 = \frac{N}{\pi R^2} (-d_{14} \cos 2\chi + 2d_{11} \sin 2\chi), \end{cases}$$

oder, wenn

$$d_{14} = -D \sin 2\psi, \quad 2d_{11} = D \cos 2\psi$$

gesetzt wird,

$$(24) \quad \varphi = \frac{ND}{p^2} \sin 2(\psi + \chi), \quad \sigma_0 = \frac{ND}{\pi R^2} \sin 2(\psi + \chi).$$

Die Gesamtladung E' einer Quadrantenbelegung von der Länge L , deren Mitte bei χ' liegt, findet sich hiernach zu

$$(25) \quad E' = LR \int_{\chi' - \frac{1}{2}\pi}^{\chi' + \frac{1}{2}\pi} \sigma_0 d\chi = \frac{LND}{\pi R^2} \sin 2(\psi + \chi');$$

sie ist also gleich Null für $2(\psi + \chi') = h\pi$, ein Extremum für $2(\psi + \chi') = \frac{1}{2}(2h - 1)\pi$.

Eine dritte spezielle Lage von besonderer Symmetrie entsteht, wenn die Zylinderachse senkrecht sowohl zur Haupt- als zu einer Nebenachse steht. Läßt man gleichzeitig die X - in die kristallographische Hauptachse fallen, so gilt das aus (20) durch zyklische Vertauschung folgende Wertsystem

$$(26) \quad \begin{cases} P_1 = 0, & -P_2 = d_{11}(Y_y - Z_z) + d_{14}Z_x, \\ & P_3 = d_{14}X_y + 2d_{11}Y_z. \end{cases}$$

Hier liefert die Drillung gemäß (18)

$$(27) \quad P_1 = 0, \quad -P_2 = \frac{2N d_{14} y}{\pi R^4}, \quad P_3 = 0;$$

es ist also

$$a' = b' = a'' = 0, \quad b'' = -\frac{2N d_{14}}{\pi R^4},$$

$$(28) \quad \varphi = \frac{N}{p^2} d_{14} \cos 2\chi, \quad \sigma_0 = \frac{N}{\pi R^3} d_{14} \cos 2\chi,$$

$$(29) \quad E' = \frac{L N}{\pi R^2} d_{14} \cos 2\chi'.$$

Die Orientierungen, für welche E' verschwindet, sind also durch $2\chi' = \frac{1}{2}(2h-1)\pi$ gegeben, diejenigen, für welche es Extremwerte annimmt, durch $2\chi' = h\pi$.

Erstrecken sich die Belegungen nicht über volle Quadranten, aber lassen sie nur an den Stellen, wo die Wirkung durch Null hindurchgeht, sehr kleine Lücken zwecks der nötigen gegenseitigen Isolation frei, so werden die erhaltenen Formeln (25) und (29) trotzdem anwendbar bleiben. Anders verhält sich die Sache, wenn die Belegungen beträchtlich schmaler oder gegen die soeben vorausgesetzte Lage etwas gedreht sind, wie das unten bei gewissen Beobachtungen zur Anwendung gebracht werden wird. Hier ist das vorstehende Berechnungsverfahren in Strenge gar nicht mehr anwendbar, denn dasselbe setzt ausdrücklich voraus, daß die *ganze* Oberfläche des Zylinders auf das Potential Null gebracht sei. Indessen wird man die Formel (25) bzw. (29) mit einem von der Breite der Belegungen abhängigen Faktor immer noch für die Bestimmung desjenigen Einflusses anwenden können, den die Orientierung des Belegungssystemes auf die influenzierte Ladung übt, und so die Symmetrieverhältnisse der Erregung feststellen. Für diesen Zweck, wo nur relative Messungen in Frage kommen, wird man auch nicht das umständlichere Verfahren der Kompensation durch den Curie-streifen anzuwenden brauchen, sondern sich allein auf die Beobachtung von Elektrometerausschlägen beschränken können.

4. Für die Beobachtungen standen uns zwei Zylinder aus Bergkristall in Orientierungen zur Verfügung, die oben als zweite und dritte bezeichnet sind.

Der erste Zylinder mit der Achse parallel einer kristallographischen Nebenachse hatte einen Durchmesser von 1,20 cm und die beträchtliche Länge von rund 16 cm; der zweite Zylinder mit der Achse normal zur Haupt- und einer Nebenachse hatte 1,09 cm Durchmesser und rund 13 cm Länge. Für die Drillung wurde der betreffende Zylinder vertikal aufgestellt und an dem oberen freien Ende einem Drehungsmoment ausgesetzt. Die Beobachtungen zerfielen je in zwei

Teile: eine Verifikation der *geometrischen Verhältnisse* der elektrischen Erregung, wie sie durch die Formeln (25) und (29) ausgedrückt werden, und eine Vergleichung des faktischen *Absolutwertes* der maximalen Erregung mit dem Resultat der Theorie.

Bei dem ersten Teile handelt es sich, wie schon oben angedeutet, um *relative* Bestimmungen der Influenzierung eines leitenden Quadrantensystemes, wenn dasselbe sukzessive in verschiedenen Orientierungen gegen die transversal zum Quarzzyylinder liegende kristallographische Hauptachse angebracht wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein in vier Quadranten zerlegtes Messingrohr, dessen Teile durch Hartgummiringe zusammengehalten wurden, über den Zylinder gesteckt.

Fig. 1.

(Der Querschnitt ist in Fig. 1 wiedergegeben.) Dieses System ließ sich um den Zylinder drehen; ein am Zylinder fester Teilkreis gestattete die jeweilige Orientierung der Quadranten gegen die Richtung der auf einer Grundfläche markierten kristallographischen Hauptachsen abzulesen. Je zwei gegenüberliegende Quadranten waren leitend miteinander gekoppelt; das eine Paar wurde bei der Beobachtung geerdet, das andere

mit dem Faden eines Edelmannschen Elektrometers verbunden, welches wiederholt durch eine Krügerbatterie graduirt wurde. Bei der gewählten Anordnung sind die piezoelektrischen Effekte außerordentlich stark. Das geringe Drehungsmoment von $280 \text{ g} \times 6,7 \text{ cm}$, das natürlich an dem starken Zylinder eine ganz minimale Drillung bewirkte, lud bei der günstigsten Stellung der Quadranten am ersten Zylinder den Elektrometerfaden auf mehr als 25 Volt. Es bot keinerlei Schwierigkeit, den ganzen Verlauf der Erregung bei Drehung der Quadranten um den Zylinder zu verfolgen. Bei der Beobachtung wurde das Quadrantensystem sukzessive um den Quarzzyylinder gedreht und die jedesmalige Orientierung am Teilkreis festgestellt, dann das Drehungsmoment durch Belastung ausgeübt und der Ausschlag des Elektrometerfadens abgelesen. Diese Ablesungen wurden (gemäß der Graduierungstabelle des Elektrometers) auf Spannungen umgerechnet.

Für absolute Messungen sind drehbare Quadranten, die sich naturgemäß nicht ganz dicht an den Quarzzylinder anschmiegen können, ersichtlich nicht eine brauchbare Anordnung. Für die Verifikation der geometrischen Resultate der Theorie sind sie sehr bequem, besonders auch für die Bestimmung der Orientierung der maximalen piezoelektrischen Erregung, die ein Interesse besitzt, weil für sie beim ersten Zylinder das Verhältnis der beiden piezoelektrischen Moduln d_{11} und d_{14} des Bergkristalles maßgebend ist.

Fig. 2. Quarz Nr. 1 Drillung.

Die Erscheinung eignet sich sehr zur Demonstration in Vorlesungen über Kristallphysik, und die Firma Dr. Steeg & Reuter in Bad Homburg, die uns die Quarzzylinder und den Drillungsapparat geliefert hat, führt die Apparatur deshalb auch in ihrem neuen Preisverzeichnis.

Fig. 2 stellt zwei von Dr. Freedericksz am ersten Zylinder mit zwei verschiedenen Belastungen erhaltene Kurven für die Abhängigkeit der Ladungen von der Orientierung der Quadranten dar. Auf der Abszissenachse sind die Ablesungen an dem Teilkreis verzeichnet, der die Orientierung der Quadranten erkennen läßt; die Ordinaten geben die zugehörigen Spannungen in Volt. Die speziellen Stellungen,

wo die eine Quadrantenspalte in die Richtung der kristallographischen Hauptachse fiel, sind durch A bezeichnet. Naturgemäß ist die Bestimmung dieser Stellen weniger genau als diejenige der relativen Drehungen, da, wie gesagt, die Richtung der Hauptachse nur durch einen Strich auf der einen Endfläche des Zylinders markiert war; die Unsicherheit mochte etwa 2° betragen. Immerhin lassen die mitgeteilten Kurven außer der von der Theorie geforderten Vierteilung des Umfangs nach dem Gesetz (25) unzweifelhaft erkennen, daß die Nullstellen der piezoelektrischen Erregung nicht genau mit den durch die A markierten Lagen zusammenfallen. Dies hat ein Interesse, weil die Theorie auf eben dieses Resultat führt. Nach Formel (25) und dem dazu Bemerkten liegen die Nulllagen um einen Winkel ψ von den Richtungen A entfernt, der gegeben ist durch $\operatorname{tg} 2\psi = -d_{14}/2d_{11}$. Der Modul d_{11} ist am genauesten durch P. Curie¹⁾ und Röntgen²⁾ bestimmt; man kann für ihn in absolutem Maß $6,9 \cdot 10^{-8}$ einsetzen. Der Modul d_{14} ist bisher noch nicht zuverlässig gemessen; nach den vorliegenden Beobachtungen³⁾ darf man ihn auf etwa $1,7 \cdot 10^{-8}$ schätzen. Hieraus würde für ψ der Wert $3,5^\circ$ folgen; man ersieht aus den Kurven in Fig. 2, daß der beobachtete Wert (ca. 5°) in der Tat von dieser Größe nicht mehr abweicht, als die Unsicherheit der Bestimmung von χ' beträgt.

Um zweitens den *absoluten Wert* der an dem ersten Zylinder beobachteten piezoelektrischen Erregung durch Drilung mit dem Resultat der Theorie zu vergleichen, haben wir den Zylinder auf 11,9 cm seiner Länge mit Stanniolstreifen beklebt, die sich angenähert je von einer bis zur nächsten Nullstelle der Erregung erstreckten und so vier leitende Quadranten darstellten. An sie schlossen sich an den beiden Zylinderenden Schutzringe aus Stanniol. Die Streifen waren nach Auflötung feiner Zuleitungsdrähte mit einem Schellacküberzug versehen. Dem so armierten Zylinder war ein Curiescher Piezoquarz parallel entgegengeschaltet, von 13,5 cm belegter Länge bei 0,098 cm Dicke. Es wurden Belastungen an dem Zylinder und an dem Streifen aus-

1) Mad. P. Curie, *Traité de Radioactivité* 1. p. 98. 1910.

2) W. C. Röntgen, *Ann. d. Phys.* 41. p. 449. 1913.

3) W. Voigt, *Kristallphysik*, p. 869.

probiert, bei denen die an beiden Präparaten erzeugten Ladungen *gleich* waren, der Faden des Elektrometers also merklich in der Ruhelage verharrte. Ein solches Wertpaar war 142 g an dem Zylinder, 280 g an dem Streifen.

Für die maximal erregte Ladung auf zwei Quadranten des Zylinders liefert (25) die Formel $E' = 2 L N D / \pi R^2$, wobei L die Länge der Quadrantenbelegung bezeichnet. $D = \sqrt{4 d_{11}^2 + d_{14}^2}$ ist für unsere Zwecke mit $2 d_{11}$ praktisch gleich. Da der Hebelarm = 6,7 cm war, so hatte N den Wert 950. Der Durchmesser des Zylinders von 1,2 cm lieferte für πR^2 den Wert 1,13. Diese Zahlen führen auf $E' = 4,03 \cdot 10^4 \cdot d_{11}$. Bezeichnet E'' die auf dem Curiestreifen von der belegten Länge l und der Dicke d durch ein Gewicht P erregte Ladung, so gilt $E'' = P l d_{11} / d$. Die Werte $P = 280$ g, $l = 13,7$ cm, $d = 0,098$ cm führen auf $E'' = 3,92 \cdot 10^4 \cdot d_{11}$.

Dieser Wert kann als eine durchaus genügende Bestätigung der Theorie gelten, obwohl er um 2,5 Proz. kleiner ist als E' . Es wirken nämlich, soweit erkennbar, alle Fehlerquellen dahin, den beobachteten Wert von E'' zu *verkleinern*. Von solchen kommen besonders zwei in Betracht: einmal können die Stanniolbelege naturgemäß weder streng die *volle* Ausdehnung von Quadranten haben, noch ist es möglich, sie *genau* in die theoretische Lage maximaler Wirkung zu bringen; sodann ist eine absolut genaue Orientierung des Zylinders gegen die Kristallachsen an sich schwierig und möglicherweise durch unvermeidliche Inhomogenitäten innerhalb eines Kristallindividuums von so mächtigen Dimensionen (mehr als 16 cm Dicke!) prinzipiell ausgeschlossen. Da aber die vorausgesetzte Orientierung eine solche maximaler Erregung ist, so muß jeder Fehler herabdrückend wirken. Ein Überschlag zeigt, daß die beiden Umstände zusammen sehr wohl einen Einfluß von der Größenordnung der Differenz $E'' - E'$ üben können.

Es mag bemerkt werden, daß ein Quarzzylinder in der von uns benutzten Orientierung recht gut statt des Curischen Streifens als konstante Elektrizitätsquelle benutzt werden kann. Er bietet gegenüber dem Streifen den Vorteil einer viel geringeren Zerbrechlichkeit; auch ist bei dem großen Querschnitt ein störender Einfluß der metallischen Belegung nicht zu befürchten. Stellt man die Belegungen durch Versilberung des Zylinders her, ihre Grenzen durch mit einem

Diamanten gezogene Linien, so wird man auch den Voraussetzungen der Formel (25) leicht sehr genau entsprechen können.

Mit dem zweiten Quarzzylinder, dessen Achse normal zur Haupt- und einer Nebenachse lag, hat Dr. Freedericksz dieselben beiden Beobachtungsreihen ausgeführt, über die vorstehend bezüglich des ersten Zylinders berichtet ist. Wegen der geringeren Dimensionen des Zylinders wurde ein neues Quadrantensystem von der durch Fig. 1 angedeuteten Einrichtung hergestellt. Fig. 3 gibt in analoger Weise, wie Fig. 2

Fig. 3. Quarz Nr. 2 Drillung.

für den ersten Zylinder tat, die Resultate der relativen Messungen wieder. Die Verteilung des Zylinderumfanges bezüglich der piezoelektrischen Erregung und die Lagen der Extremwerte und Nullstellen entsprechen der Theorie, wobei zu bemerken, daß auf genaueste Orientierung der Kreisteilung der Quadranten zur optischen Achse hier kein besonderer Wert gelegt worden ist. Die viel geringere Stärke der Erregung des zweiten Zylinders gegenüber dem ersten bei dem gleichen Moment fiel auch ohne absolute Messung sofort auf und veranlaßte eine Einstellung des Elektrometers auf größere Empfindlichkeit.

Die absoluten Messungen hatten allerdings bei dem zweiten Zylinder geringere Zuverlässigkeit als bei dem ersten, da bei ihm Fehler in der Orientierung (die, wie oben gesagt, unter Umständen durch das Material notwendig bedingt sein können) viel mehr ins Gewicht fallen, als bei jenem. Läßt sich nun zwar die Ebene normal zur Hauptachse optisch recht genau festlegen, so versagen doch optische Hilfsmittel zur

Bestimmung einer speziellen Richtung *in dieser Ebene* vollkommen. Die Firma Steeg & Reuter gibt einen Fehler in dieser Ebene von $0,5^\circ$ gegen die Kristallform ausdrücklich zu, wozu noch die Möglichkeit unvollkommener Homogenität des Materiales kommt. Innerhalb der Äquatorebene ist nun aber die beim zweiten Zylinder vorausgesetzte Achsenrichtung diejenige eines *außerordentlich spitzen* Minimums der Erregbarkeit. Weicht die Zylinderachse um einen Winkel ζ aus der verlangten Richtung ab, so tritt nach der Theorie an Stelle von (29) die Formel

$$E' = \frac{LN}{\pi R^2} (d_{14} \cos 2\chi' - 2d_{11} \sin 3\zeta \sin 2\chi'),$$

und dies bedingt eine Vergrößerung der maximalen Erregung im Verhältnis $\sqrt{d_{14}^2 + 4d_{11}^2 \sin^2 3\zeta} : d_{14}$. Da nun d_{14}^2 zu $4d_{11}^2$ sich etwa wie 3:200 verhält, so sieht man, welche *enorme* Wirkung schon ein relativ kleiner Fehler ζ zu üben vermag. Es war also zu erwarten, daß die Messung der Erregung an dem zweiten Zylinder einen zu großen Wert von d_{14} liefert, mit einem Fehler, der viel beträchtlicher ist, als der bei der Bestimmung von d_{11} mit dem ersten Zylinder begangene. Trotz dieser Aussicht ist die Messung ausgeführt worden, und sie hat den Erwartungen entsprochen.

Für die absolute Bestimmung der Erregung wurde wieder eine Stanniolbelegung angebracht, deren Quadranten möglichst vollständig die Bereiche gleichartiger Oberflächenladungen bedeckten und beiderseits durch Schutzringe ergänzt wurden. Ihre Länge betrug 9 cm. Die Beobachtung geschah mit Hilfe des entgegengeschalteten Curieschen Streifens; es zeigte sich, daß eine Belastung von 500 g am Drillingssapparat durch eine solche von 151 g am Streifen kompensiert wurde. Die Formel (29) liefert für die auf zwei Quadranten von der Länge L maximal frei werdende Ladung $E' = 2L \frac{N d_{14}}{\pi R^2}$ und die angegebenen Daten führen auf $E' = 6,47 \cdot 10^4 d_{14}$. Die auf dem Curiestreifen entwickelte Ladung $E'' = P l d_{11} / d$ findet sich bei $P = 151$ zu $2,11 \cdot 10^4 \cdot d_{11}$. Die Gleichsetzung ergibt $d_{14} = d_{11} \cdot 0,326$, woraus bei $d_{11} = 6,9 \cdot 10^{-8}$ folgt $d_{14} = 2,25 \cdot 10^{-8}$. Wie schon gesagt, übertrifft dieser Wert auch den größten durch direkte Beobachtung gefundenen (Pockels gibt $1,93 \cdot 10^{-8}$) erheblich. Immerhin stellt das Resultat nach dem zuvor Gesagten keinerlei Widerspruch mit der Theorie dar.

5. Die Werte der Spannungskomponenten innerhalb eines mit den Momenten L oder M um die X - oder Y -Achse gebogenen Kreiszylinders sind ¹⁾

$$(30) \quad \begin{cases} X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0, \\ Z_z = -\frac{4Ly}{\pi R^4} \text{ oder } = +\frac{4Mx}{\pi R^4}. \end{cases}$$

Verglichen mit den Formeln (17) zeigt dies, daß ein mit seiner Achse in die Kristallhauptachse fallender Kreiszylinder (erster Hauptfall) durch gleichförmige Biegung überhaupt nicht erregt wird. Ebenso läßt (20) erkennen, daß ein mit seiner Achse zu einer Nebenachse paralleler Kreiszylinder (zweiter Hauptfall) durch eine Biegung keine *transversalen* dielektrischen Momente P_1 und P_2 erhält, somit dabei auf der Mantelfläche keine Erregung zeigen kann.

Anders verhält sich ein Kreiszylinder mit einer Achse, die sowohl zur Haupt- als zu einer Nebenachse normal liegt (dritter Hauptfall). Die Kombination von (30) mit (26) liefert nämlich

$$(31) \quad P_1 = 0, \quad -P_2 = \frac{4d_{11}Ly}{\pi R^4} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{4d_{11}Mx}{\pi R^4};$$

es ist also jetzt $a' = b' = 0$ und bzw. $a'' = 0, \quad b'' = \frac{4d_{11}L}{\pi R^4}$ oder $a'' = -\frac{4d_{11}M}{\pi R^4}, \quad b'' = 0$.

Dies gibt nach (12) die beiden Potentialwerte

$$(32) \quad \varphi_x = -\frac{2d_{11}L}{p^2} \cos 2\chi \quad \text{und} \quad \varphi_y = -\frac{2d_{11}M}{p^2} \sin 2\chi,$$

die der Biegung um die X - und um die Y -Achse entsprechen, und hieraus die Ausdrücke für die Ladungsdichte σ_0 in einer leitenden und auf dem Potential 0 gehaltenen Belegung des Zylinders

$$(33) \quad \sigma_{0x} = -\frac{2d_{11}L}{\pi R^3} \cos 2\chi, \quad \sigma_{0y} = -\frac{2d_{11}M}{\pi R^3} \sin 2\chi.$$

Dem entspricht für eine Quadrantenbelegung von der Länge l mit der Mitte bei χ' die Gesamtladung

$$(34) \quad E'_x = -\frac{2d_{11}lL}{\pi R^2} \cos 2\chi', \quad E'_y = -\frac{2d_{11}lM}{\pi R^2} \sin 2\chi'.$$

1) W. Voigt, Gött. Abh. 1887, p. 73; Kristallphysik, p. 628.

Die Winkel χ und χ' sind gegen die X -Achse gemessen, welche nach p. 150 mit der kristallographischen Hauptachse zusammenfällt. Erfüllen die Belegungen statt des vollen Quadranten einen kleineren Winkelraum, so kommen die Bemerkungen von p. 151 zur Geltung. Nach diesen Resultaten wirken die Biegungen durch Momente um die X - und um die Y -Achse — d. h. also in unserem Falle um die kristallographische Haupt- und eine Nebenachse — in bemerkenswerter Weise verschieden erregend; in dem *einen* Falle liegen die Extremwerte der Erregung eben da, wo sich im *anderen* die Nullwerte finden. Dabei sind die Extremwerte für beide Lagen einander gleich.

Eine Biegung durch ein Moment D um eine *beliebige* Achse, welche mit der X -Achse den Winkel ψ , mit der Y -Achse den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \psi$ einschließt, kann durch Superposition der zwei Wirkungen von Momenten $L = D \cos \psi$ und $M = D \sin \psi$ dargestellt werden. Hier folgt eine Ladung

$$(35) \quad E' = - \frac{2 d_{11} D}{\pi R^2} \cos(2\chi' - \psi),$$

welche ihre Extremwerte von der früheren Größe bei $2\chi' - \psi = h\pi$ annimmt. Die Möglichkeit der Anwendung von Momenten um verschiedene Querachsen gibt dem Problem der Biegung eine Mannigfaltigkeit, welche dem Drillungsproblem fehlt.

Zu den Biegungsbeobachtungen wurde (da der erste Zylinder nach p. 158 auf Biegung nicht reagiert) ausschließlich der zweite benutzt, für dessen Erregung die Formeln (31) bis (35) gelten. Bei den Versuchen lag der Zylinder Z in zwei Gabeln G_1, G_2 von Hartgummi und trug an beiden Enden Fassungen F_1, F_2 , die in dünne axiale Messingdrähte D_1, D_2 ausliefen. In diese Drähte waren Rillen eingedreht für die Fäden, welche die Wirkung des belastenden Gewichtes P vermittelten. Vgl. die schematische Fig. 4 auf folgender Seite.

Die Einrichtung gestattete eine bequeme Drehung des Zylinders um seine Achse, zum Zweck ihn einem biegenden Moment um verschiedene Querachsen auszusetzen. Vor Aufsetzen der Fassungen war über den Zylinder das p. 156 erwähnte Quadrantensystem geschoben.

Die eine Hartgummischeibe am Ende der Quadranten trug eine Kreisteilung, die benachbarte Fassung F des Quarzzylinders einen Zeiger. Auf diese Weise ließen sich Drehungen des Quadrantensystemes um den Quarzzylinder mit durchaus hinreichender Genauigkeit einstellen. Ebenso konnte, wenn die Quadranten festgehalten wurden, der Quarzzylinder recht

Fig. 4.

genau um einen bestimmten Winkel, insbesondere den durch die Formeln (34) an die Hand gegebenen Winkel von 90° gedreht werden. Eine genaue Orientierung der kristallographischen Hauptachse gegen die Achse des wirkenden Drehungsmomentes oder gegen den Nullpunkt der Quadrantenteilung war nicht vorgesehen; die hauptsächlich interessierenden Aussagen der Theorie: die Vierteilung des Umfanges des Quarzzylinders bezüglich der elektrischen Erregung und die Drehung dieser Erregungsquadranten um 45° , wenn die Achse des Momentes um 90° gedreht wird, ließen sich ohne eine solche genaue Orientierung sicher prüfen.

Die Beobachtungen sind wiederum durch Dr. Freedericksz ausgeführt worden, unter Benutzung der p. 152 beschriebenen Hilfsmittel. Die Messungen zerfielen, analog wie die bei Drillung, in zwei Teile. Der erste Teil sollte die durch die Theorie signalisierten *geometrischen Verhältnisse* der Erregung durch Biegung verifizieren, der zweite eine Bestimmung des *absoluten Wertes* der maximalen Erregung liefern. Fig. 5 veranschaulicht die Resultate des ersten Teiles. Der Quarzzylinder wurde erst mit ungefähr vertikaler Lage der kristallographischen Hauptachse in die Gabeln G_1 , G_2 gelegt, also einem Moment M um die Y -Achse ausgesetzt. Der Nullpunkt der Quadrantenteilung, der in die Ebene eines Spaltes zwischen Quadranten fiel, wurde auf den Zeiger gebracht und der bei Belastung eintretende Ausschlag des Elektro-

meterfadens abgelesen, dann das Quadrantensystem sukzessive gedreht, die Belastung und Ablesung wiederholt. Die Ausschläge wurden auf Spannungen umgerechnet und diese letzteren als Ordinaten zu den Drehungen als Abszissen eingetragen. So ist die Kurve $\circ-\circ-$ in Fig. 5 entstanden. Nachdem der Nullpunkt der Quadrantenteilung wieder erreicht war, wurde der Quarzzylinder um 90° gedreht und die eben beschriebene Beobachtungsreihe wiederholt. Sie lieferte die Kurve $\oplus-\oplus-$ in der Figur. Beide Kurven

Fig. 5. Quarz Nr. 2 Biegung.

mit den sehr genau gleichen Amplituden entsprechen den Aussagen der Theorie. Dabei ist zu berücksichtigen, daß nach obigem der Nullpunkt der Abszisse einigermaßen willkürlich gelassen ist.

In bezug auf den zweiten Teil der Messungen, die absolute Bestimmung, kommen natürlich wiederum die Schwierigkeiten der richtigen Orientierung des Zylinders gegen die Kristallachsen in Betracht. Indessen verhält sich bezüglich der Biegung der zweite Zylinder analog wie der erste bezüglich der Drillung; seine Orientierung entspricht einem *Maximum* der Erregung durch Biegung, und dies Maximum ist unvergleichlich breiter als das Minimum, welches derselbe Zylinder bezüglich der Erregung durch Drillung liefert und

dessen Natur p. 162 ausführlicher besprochen ist. Es wird also der Fehler infolge unrichtiger Orientierung viel geringer sein.

Für die Bestimmung der absoluten Erregung wurde der Bequemlichkeit halber zunächst keine Stanniolbelegung des Zylinders benutzt. Bei dem Drillungszyylinder hatte sich gezeigt, daß solche ausgedehnten Belegungen mit feinem Zwischenraum sich nur schwierig gut gegeneinander isolieren lassen; deshalb wurde vorerst das bewegliche Quadrantensystem zur absoluten Bestimmung herangezogen. Natürlich wurde hierdurch von vornherein auf eine höhere Genauigkeit verzichtet; denn wenn das benutzte System sich auch dem Zylinder ziemlich gut anschmiegte, so berührte es ihn doch nicht so innig wie eine eigentliche Belegung desselben. Es war also von vornherein zu erwarten, daß das Resultat der Beobachtung um einen größeren Betrag von der Theorie abweiche, als dies bei der Drillungsbeobachtung nach p. 155 gefunden worden ist.

Dr. Freedericksz fand, daß eine Belastung von 220 g am Biegungsapparat die Wirkung des Curiestreifens mit 280 g (wie oben p. 155) kompensiere. Da nun die Länge l der Quadrantenbelegung 9 cm war, der Hebelarm am Biegungsapparat (Fig. 4) rund 10 cm, also das Moment $D = 2,20 \cdot 10^4$ betrug, der Zylinderradius 0,545 cm maß, so ergibt die Formel $E' = 2d_{11}lD/\pi R^2$, auf zwei Quadranten angewandt, für die durch Biegung maximal erregte berechnete Ladung $4,23 \cdot 10^4 d_{11}$; der beobachtete Wert, der durch die Belastung am Curiestreifen gemessen wird, ist nach p. 155 $3,92 \cdot 10^4 \cdot d_{11}$. Die Differenz entspricht nach Sinn und Größenordnung durchaus dem zu Erwartenden; sie gewährt zugleich ein Urteil darüber, inwieweit die beweglichen Quadranten den Voraussetzungen der Theorie von p. 158 entsprechen.

Eine weitere Messung mit aufgelegten Stanniolquadranten und Schutzringen lieferte das Wertepaar 201 g für den Zylinder, 280 g für den Curiestreifen. Die Rechnung ergibt als die theoretisch für den gebogenen Zylinder zu erwartende Ladung $3,87 \cdot 10^4 d_{11}$, was mit dem gemessenen $3,92 \cdot 10^4 \cdot d_{11}$ so nahe übereinstimmt, als irgend erwartet werden kann. Das Resultat der Theorie bezüglich der Biegung des Kreiszyllinders kann also als vollständig bestätigt gelten.

7. Wie schon im Eingang bemerkt, hatten wir uns die Aufgabe gestellt, außer dem direkten auch den inversen Effekt bei Drillung wenigstens in einem Falle zum ersten Male quantitativ zu studieren. Es handelt sich da vor allem darum, die Formeln für den Vorgang vollständig zu entwickeln, und die Lage der Dinge bringt es mit sich, daß hierbei Biegung und Drillung gleichzeitig behandelt werden.

Die allgemeine Theorie der *piezoelektrischen Deformation* drückt die durch ein elektrisches Feld mit den Komponenten $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ erzeugten Druckkomponenten $\mathfrak{X}_x, \dots, \mathfrak{X}_y$ durch lineäre Beziehungen zwischen diesen beiden Größenarten aus. Es bleibt dann Aufgabe der Elastizitätstheorie, die diesen Drucken entsprechenden Deformationen $x_x, \dots, x_y$ zu berechnen.¹⁾ Diese Aufgabe ist unter Umständen sehr kompliziert; sie wird aber höchst einfach, wenn der dem Feld ausgesetzte Körper keinen mechanischen, sondern nur elektrischen Einwirkungen unterliegt, und dazu die elektrischen Komponenten $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ konstant oder aber lineäre Funktionen der Koordinaten sind. In diesem Falle stellen sich die Deformationsgrößen direkt als lineäre Funktionen der Feldkomponenten dar, und es sind die Parameter dieser Beziehungen eben jene piezoelektrischen Moduln, welche den direkten Effekt bestimmen. Für einen Kristall der enantiomorphen Gruppe des trigonalen Systemes wird bei Anwendung des oben als *ersten* benutzten Hauptkoordinatensystemes einfach

$$(36) \quad \begin{cases} x_x = d_{11}\mathfrak{E}_1, & y_y = -d_{11}\mathfrak{E}_1, & z_z = 0, \\ y_z = d_{14}\mathfrak{E}_1, & z_z = -d_{14}\mathfrak{E}_2, & x_y = -2d_{11}\mathfrak{E}_2. \end{cases}$$

Ist das Feld die Wirkung elektrischer Ladungen außerhalb des piezoelektrisch wirksamen Körpers, dann muß es ein Potential Φ besitzen, welches innerhalb des Körpers die Bedingung $\Delta \Phi = 0$ erfüllt. Handelt es sich speziell um unseren Kreiszylinder mit zur Z-parallelen Achse und ein Feld normal zu Z und unabhängig von z , so wird diese Gleichung zu

$$(37) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

1) W. Voigt, Kristallphysik, p. 901 u. f.

Der allgemeinste dieser Beziehung und zentrischer Symmetrie entsprechende Ansatz für Φ , der auf in x und y lineäre Ausdrücke für die Feldkomponenten führt, ist

$$(38) \quad \Phi = \frac{1}{2} (A(x^2 - y^2) + 2Bxy) = \frac{1}{2} p^2 (A \cos 2\chi + B \sin 2\chi);$$

schreibt man für die Parameter A und B

$$(39) \quad A = C \cos 2\omega, \quad B = C \sin 2\omega,$$

so erhält man

$$(40) \quad \Phi = \frac{1}{2} C p^2 \cos 2(\chi - \omega),$$

und man erkennt, daß die Extremwerte von Φ auf den Kreisen $p = \text{Konst.}$ bei $2(\chi - \omega) = n\pi$ liegen. Für die Komponenten nach den Koordinatenachsen folgt

$$(41) \quad -\mathfrak{E}_1 = Ax + By, \quad -\mathfrak{E}_2 = Bx - Ay, \quad -\mathfrak{E}_3 = 0,$$

und für die Komponente normal zur Z -Achse bei Benutzung von (40) direkt

$$(42) \quad -\mathfrak{E}_p = Cp \cos 2(\chi - \omega).$$

Die letztere Komponente hat ihre Extremwerte auf demselben Radius wie Φ .

Weiter sind die allgemeinsten Ausdrücke für die Deformationsgrößen, welche einem von z unabhängigen elastischen Zustand des am Umfang freien Zylinders entsprechen¹⁾,

$$(43) \quad \begin{cases} x_x = \frac{\partial U}{\partial x}, & y_y = \frac{\partial V}{\partial y}, & z_z = g_1 x + g_2 y + g_3, \\ y_z = \frac{\partial W}{\partial y} + h x, & z_x = \frac{\partial W}{\partial x} - h y, & x_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

Dabei mißt g_3 die lineäre Dilatation in der Z -Achse; g_1 und g_2 sind die reziproken Krümmungsradien der Kurve, nach der die ursprünglich in die Z -Achse fallende materielle Linie bzw. die Zylinderachse in der XZ - bzw. der YZ -Ebene gebogen wird, h ist die Drillung der Längseinheit des Zylinders. Um diese Größen handelt es sich für uns in erster Linie, da sie die beobachtbaren Veränderungen des Zylinders darstellen.

U, V, W sind Funktionen von x und y , die durch die allgemeine Forderung der Unabhängigkeit des elastischen Zustandes von z nicht bestimmt werden. Sind aber, wie in

1) W. Voigt, Gött. Abh. 1887, p. 59; Kristallphysik, p. 626.

unserem Falle, $x_x \dots x_y$ speziell als lineäre Funktionen von x und y gegeben, so genügt man den Formeln (43), sowie den Bedingungen der Befestigung durch Ansätze von der Form

$$(44) \quad U = \frac{1}{2} a_1 x^2 + b_1 x y + \frac{1}{2} c_1 y^2, \dots$$

Indessen haben die Parameter a_h, b_h, c_h für uns keinerlei Interesse. Von den Gleichungen (36), welche der ersten oder Hauptlage des Achsenkreuzes entsprechen, nehmen hiernach die dritte bis fünfte die Form an

$$(45) \quad \begin{cases} O = g_1 x + g_2 y + g_3, & -(A x + B y) d_{14} = (b_3 + h) x + c_3 y, \\ & -(A y - B x) d_{14} = (b_3 - h) y + a_3 x. \end{cases}$$

Aus ihnen ergeben sich g_1, g_2, g_3 und h zu Null; der, wie angenommen, mit seiner Achse parallel der Kristallhauptachse orientierte Zylinder erfährt durch das angenommene transversale Feld also weder Biegung, noch Dehnung, noch Drillung.

Für die zweite Lage des Zylinders, bei der die Längsachse in einer Nebenachse, die Y- in der Kristallhauptachse liegt, tritt an Stelle von (36) das System

$$(46) \quad \begin{cases} x_x = -d_{11} \mathfrak{E}_3, & y_y = 0, & z_z = d_{11} \mathfrak{E}_3, \\ y_z = -d_{14} \mathfrak{E}_1, & z_x = -2d_{11} \mathfrak{E}_1, & x_y = d_{14} \mathfrak{E}_3. \end{cases}$$

Hiervon liefert die dritte bis fünfte Formel nach (41) und (43)

$$(47) \quad \begin{cases} O = g_1 x + g_2 y + g_3; & d_{14}(A x + B y) = (b_3 + h) x + c_3 y, \\ & 2d_{11}(A x + B y) = (b_3 - h) y + a_3 x. \end{cases}$$

Auch bei dieser Orientierung verschwinden g_1, g_2, g_3 , erleidet der Zylinder also weder Biegung noch Dehnung. Dagegen folgt für h

$$b_3 + h = d_{14} A, \quad b_3 - h = 2d_{11} B,$$

somit

$$(48) \quad 2h = d_{14} A - 2d_{11} B;$$

es tritt also eine Drillung ein.

Für dritte Lage endlich gilt statt (36)

$$(49) \quad \begin{cases} x_x = 0, & y_y = d_{11} \mathfrak{E}_2, & z_z = -d_{11} \mathfrak{E}_2, & y_z = -2d_{11} \mathfrak{E}_3, \\ & z_x = d_{14} \mathfrak{E}_2, & x_y = -d_{14} \mathfrak{E}_3. \end{cases}$$

Hiermit liefert die dritte bis fünfte Formel

$$(50) \quad \begin{cases} -d_{11}(Ay - Bx) = g_1x + g_2y + g_3, & 0 = (b_3 + h)x + c_3y, \\ d_{14}(Ay - Bx) = (b_3 - h)y + a_3x, \end{cases}$$

somit also

$$(51) \quad g_1 = Bd_{11}, \quad g_2 = -Ad_{11}, \quad g_3 = 0, \quad 2h = d_{14}A.$$

Demgemäß treten bei dieser dritten Orientierung des Zylinders Biegungen nach beiden Koordinatenebenen ein, daneben eine Drillung um die Längsachse. Dagegen fehlt abermals die Längsdehnung.

Es mag besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Parameter A und B gemäß (41) nur allein durch das auf den Zylinder wirkende elektrische Feld bestimmt sind; der Radius des Zylinders tritt in den Ausdrücken (48) und (51) für Biegung und Drillung gar nicht auf: *dasselbe Feld* bewirkt also an dickeren und an dünneren Zylindern *die-selben Biegungen und Drillungen*. Dies zunächst paradox erscheinende Resultat wird verständlich, wenn man beachtet, daß nach (41) das vorausgesetzte Feld mit dem Abstand von der Zylinderachse linear zunimmt, daß also, wenn man von dünneren zu dickeren Zylindern übergeht, die hinzutretenden äußeren Schichten *gesteigerte* Einwirkungen erfahren. Daß unter Umständen dünnere Zylinder auch noch absolut stärkeren Feldern ausgesetzt werden können als dickere, und für sie dann die A und B größere Werte erhalten, mag beiläufig erwähnt werden.

8. Vergleicht man die Resultate (48) und (51) mit den in (23), (28) und (33) enthaltenen, so tritt die Reziprozität der piezoelektrischen Erregung und Deformation anschaulich hervor. In der ersten Hauptlage gibt weder Drillung noch Biegung eine nach außen wirksame piezoelektrische Erregung; demgemäß bewirkt auch das zentrisch symmetrische Feld weder Biegung noch Drillung. In der zweiten Hauptlage ist Drillung piezoelektrisch wirksam, Biegung nicht, und demgemäß wird der Zylinder durch das Feld zwar gedreht, aber nicht gebogen. In der dritten Hauptlage wirkt sowohl Drillung als Biegung erregend, und parallelgehend ruft das Feld Drillung und Biegung hervor.

Dabei werden die sich entsprechenden Effekte auch durch dieselben Moduln gemessen, und es stimmen die Richtungen

größter piezoelektrischer Erregung mit denjenigen größter Feldwirkung überein.

So ist z. B. für die zweite Hauptlage nach (23) die influenzierte Oberflächendichte

$$(52) \quad \sigma_0 = -\frac{N}{\pi R^3} (d_{14} \cos 2\chi - 2d_{11} \sin 2\chi)$$

und nach (48) die spezifische Drillung

$$(53) \quad h = \frac{1}{2} A d_{14} - B d_{11} = \frac{1}{2} C (d_{14} \cos 2\omega - 2d_{11} \sin 2\omega).$$

Bei $d_{14} = -D \sin 2\psi$, $2d_{11} = D \cos 2\psi$ gibt dies auch

$$(54) \quad \sigma_0 = \frac{N D}{\pi R^3} \sin 2(\psi + \chi), \quad h = \frac{1}{2} C D \sin 2(\psi + \omega).$$

Demgemäß liefern dieselben Werte von χ und von ω die Extremwerte für σ_0 und h .

Denkt man das Feld durch eine Ladungsverteilung außerhalb des Zylinders hervorgebracht, so muß diese, der Formel (40) entsprechend, auf jeden Kreis $p = \text{konst.}$ einmal das Vorzeichen wechseln und ihre Maxima bei $\chi = \omega + \frac{1}{2} n\pi$ haben.

Maximale Drillung stellt sich ein, wenn

$$2(\psi + \omega) = -\frac{2n+1}{2}\pi$$

ist. Setzen wir den Wert $2(\psi + \omega) = -\frac{1}{2}\pi$ voraus, dann ist

$$(55) \quad 2h = CD \text{ und } \mathfrak{E}_p = Cp \sin 2(\chi + \psi).$$

Ein positives C würde bei $2(\chi + \psi) = +\frac{1}{2}\pi$ positives, bei $2(\chi + \psi) = -\frac{1}{2}\pi$ negatives $\mathfrak{E}_p$ ergeben, also in der ersteren Richtung eine negative, in der zweiten eine positive Ladung verlangen. Für σ_0 würde bei positivem N die Formel (52) im ersten Falle ein negatives, im zweiten Falle ein positives Vorzeichen liefern. Hieraus ergibt sich, daß ein Drehungsmoment N in jedem leitenden Quadranten eine *gebundene* Ladungsdichte σ_0 liefern würde von *gleichen* Vorzeichen, wie diejenige, welche eine mit N gleichsinnige Drillung bewirken würde. Da σ_0 das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie die in der leitenden Belegung *frei* werdende Ladung, so entspricht das vorstehende Resultat der für die einfachen Fälle homogener Deformation von Lippmann ausgesprochenen Regel.

9. Um ein Feld von der oben vorausgesetzten Gesetzmäßigkeit hervorzubringen, haben wir vier zylindrische Drähte von einer etwas geringeren Länge als die beobachteten Quarzzyylinder, durch zwei Hartgummiringe zu einem System von quadratischer Symmetrie zusammengefaßt und dieses über den Quarzzyylinder geschoben. Den Querschnitt der so erhaltenen Anordnung zeigt die Fig. 6. Die vier Drähte waren abwechselnd mit dem $+$ - und dem $-$ -Pol einer Influenzelektrisierungsmaschine verbunden.

Fig. 6.

Bei Bestimmung des durch diese Anordnung in dem Quarzzyylinder bewirkten Feldes ist die dielektrische Influenzierung des Zylinders in Rechnung zu setzen; doch genügt es, den Quarzkristall hierfür als *dielektrisch isotrop* zu betrachten.

Für die Behandlung des Problems der Feldberechnung gehen wir aus von der Aufgabe der Influenzierung eines Kreiszyinders durch vier geladene Gerade, die (wie oben

Fig. 7.

die Drähte) in vierzähliger Symmetrie, und zwar je im Abstand a von der Zylinderachse, angeordnet sind (vgl. Fig. 7). Die Ladung der Längeneinheit sei gleich m , die Dielektrizitätskonstante des Zylinders gleich ϵ . Dann findet man nach bekannten Methoden für dieses Potential der vier geladenen Geraden und der durch sie influenzierten Ladungen im Innern des Kreiszyinders den Ausdruck

$$(56) \quad \Phi_i = -\sum m_k \left(\frac{s-1}{s+1} \ln a^2 + \frac{2}{s+1} \ln r_k^2 \right),$$

im Außenraum aber

$$(57) \quad \Phi_a = -\sum m_k \left(\ln r_k^2 + \frac{s-1}{s+1} \ln \frac{\rho^2}{r_k'^2} \right).$$

Dabei bezeichnet r_k den Abstand des Aufpunktes in der XY -Ebene von dem durch eine der Geraden gegebenen Pol m_k , und r_k' den Abstand vom Spiegelpunkt des Poles m_k in der Kreislinie vom Radius R . p ist, wie früher, der Radiusvektor nach dem Kreismittelpunkt. Die Summe $\sum$ ist über alle vier Pole 1, 2, 3, 4 zu nehmen. Da nun $\sum m_k = 0$ ist, so ergibt sich, wenn man m weiter als absolute Größe rechnet,

$$(58) \quad \Phi_i = -\frac{2m}{s+1} \ln \frac{r_1^2 r_3^2}{r_2^2 r_4^2}, \quad \Phi_a = -m \left(\ln \frac{r_1^2 r_3^2}{r_2^2 r_4^2} - \frac{s-1}{s+1} \ln \frac{r_1'^2 r_3'^2}{r_2'^2 r_4'^2} \right).$$

In dem durch Φ_a bestimmten äußeren Felde lassen sich dann vier Kreiszyylinder um die vier geladenen Geraden angeben, längs deren je Φ_a konstant ist. Betrachtet man die Radien R' dieser Zylinder als Größen erster Ordnung neben den Abständen a , dann liegen die Zylinderachsen um Beträge $a = R'^2/a$ weiter vom Mittelpunkte 0 des Systemes ab, als die zur Konstruktion der Lösung benutzten Pole. Werden also die Abstände der Achsen der Drähte von der Achse des Quarzzyinders mit b bezeichnet, so ist $b = a + a = a + R'^2/a$, woraus bei gegebenem b in genügender Annäherung folgt $a = b(1 - R'^2/b^2)$. Für die Potentialwerte an der Oberfläche der Drähte ergibt sich gleichzeitig

$$(59) \quad \bar{\Phi}_a = \pm m \ln \frac{a^2}{R'^2},$$

wodurch nun m mit Hilfe der Potentialwerte und der geometrischen Verhältnisse des Systemes ausgedrückt ist.

Um Φ_i in eine uns bequeme Form zu bringen, wenden wir für die $\ln r_k^2$ die Reihenentwicklung (4) an und erhalten

$$(59) \quad \Phi_i = -\frac{2}{s+1} \sum m_k \left[\ln a^2 - 2 \sum \frac{1}{h} \left(\frac{p}{a} \right)^h \cos h \left(\chi - \frac{k-1}{2} \pi \right) \right],$$

wobei die Summe $\sum$ wieder über $k = 1, 2, 3, 4$ zu nehmen ist.

Die ersten Glieder dieser Reihe, welche nicht verschwinden, sind die für $h = 2$ und $h = 6$. Demgemäß wird

$$(60) \quad \Phi_i = + \frac{8m}{s+1} \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 \cos 2\chi + \frac{1}{3} \left(\frac{p}{a} \right)^6 \cos 6\chi + \dots \right].$$

Ist das System der vier Pole um den Winkel ω gegen das XY-Kreuz gedreht, so kommt nur statt des Vorstehenden

$$(61) \quad \Phi_i = + \frac{8m}{s+1} \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 \cos 2(\chi - \omega) + \frac{1}{3} \left(\frac{p}{a} \right)^6 \cos 6(\chi - \omega) + \dots \right].$$

Das erste Glied dieser Reihe stimmt mit dem Ansatz (40) überein, der p. 164 der Rechnung zugrunde gelegt ist. Das zweite Glied hat eine Form, deren Behandlung ungleich komplizierter sein würde; indessen fällt sein Einfluß schon deshalb wenig ins Gewicht, weil $\cos 6(\chi - \omega)$ dreimal so oft sein Vorzeichen wechselt als $\cos 2(\chi - \omega)$. Für eine bloße Abschätzung der Größenordnung kann man sich unbedenklich auf die Benutzung des ersten Gliedes beschränken. Dann entsteht der Ansatz (40) mit dem Parameterwert

$$(62) \quad C = + \frac{16m}{(s+1)a^2},$$

während m sich durch die Potentialdifferenz V zwischen den benachbarten Drähten des Systemes Fig. 6 bestimmt, gemäß

$$(63) \quad V = 2m \ln \frac{a^2}{R'^2}.$$

Somit ist

$$(64) \quad C = + \frac{8V}{(s+1)a^2 \ln(a^2/R'^2)}$$

10. Ein Zylinder, nach der zweiten Hauptlage orientiert, gibt nach (55) einen maximalen Wert der spezifischen Drillung gleich $\frac{1}{2} CD$, wobei $D = \sqrt{(2d_{11})^2 + d_{14}^2}$ und $= 14 \cdot 10^{-8}$ gesetzt werden darf. Bezeichnet l die benutzte Länge des Zylinders, so ergibt sich die gesamte relative Drillung ϑ der beiden Endquerschnitte

$$(65) \quad \vartheta = h l = \frac{28 l V \cdot 10^{-8}}{(s+1)a^2 \ln(a/R')}.$$

In unserem Falle war die Länge der Konduktordrähte 14 cm, ihr Durchmesser $2R' = 4,2$ mm, der Abstand $2b = 17$ mm,

sonach $a = 8,1$ mm. Für $\varepsilon + 1$ kann man den Wert 5,5 annehmen. Die Beobachtung der Drillung geschah mit Spiegel und Skala in der gegenseitigen Entfernung von 450 cm.

Bei den Versuchen wurde zuerst zugesehen, ob eine Bewegung der Skala wahrzunehmen wäre, wenn die Influenzmaschine dauernd im Gang gehalten und die Entladung durch Funken zwischen den in unveränderlicher Entfernung befindlichen Konduktoren hervorgerufen wurde. Hier war die Erscheinung undeutlich, offenbar deswegen, weil die Wiederaufladung zu schnell geschah. Dagegen lieferte die von Hrn. Röntgen angewandte Methode, die Konduktoren der Influenzmaschine abwechselnd voneinander zu entfernen und zur Berührung zu bringen, ein befriedigendes Ergebnis. Während die Entladungsfunken bei etwa 4 mm Abstand zwischen den Kugeln von rund 1 cm Durchmesser übersprangen, ließen sich Verschiebungen v der Skala im Betrage von etwa 0,4 mm wahrnehmen. Die Berechnung nach der obigen Formel für $v = \vartheta \cdot 900$ cm ergibt, wenn man $V = 15000$ Volt $= 50$ absolute Einheiten annimmt, etwas mehr als 0,3 mm. Die Bestätigung der Theorie erscheint wiederum befriedigend.

Daß hier der beobachtete Wert etwas größer ist als der berechnete, beruht wohl zum Teil darauf, daß die obige theoretische Betrachtung nur eine Annäherung liefert, insbesondere von der Reihe in (61) bei der Berechnung nur das erste Glied benutzt ist und die folgenden nicht völlig zu vernachlässigen sind. Ferner kann von Einfluß sein, daß die Konduktordrähte in der benutzten Anordnung nicht nur auf das Bereich des Quarzzyllinders wirken, dem sie unmittelbar benachbart sind, sondern mit ihren Enden, die überdies stärkere Ladungen tragen als die übrigen Teile, über jenes Bereich hinaus ein Feld geben; hierdurch würde l in (65) mit 14 cm zu klein eingesetzt sein.

11. Die Kleinheit der elektrischen Deformation bei unserer Anordnung, welche die *günstigsten* Verhältnisse benutzte, macht es einigermäßen verwunderlich, daß Hr. Röntgen nach seinem Bericht die entsprechende Wirkung bei einem Quarzstab beobachten konnte, wo sie nur infolge einer Fehlerquelle aufgetreten ist. Da die Orientierung der von Hrn. Röntgen benutzten Zylinder sich infolge des Versagens optischer Hilfs-

Zylinder um 3° aus der Achse abgewichen ist, so gelangt man dazu, daß bei ihm unter sonst gleichen Umständen die piezoelektrische Erregung rund $\frac{1}{10}$ von der von uns beobachteten maximalen darstellen würde.

Die Formeln für die elektrische Deformation nehmen die Gestalt an

$$(69) \quad \begin{cases} x_x = d_{11}c^3\mathfrak{E}_1 + d_{14}sc\mathfrak{E}_2 + d_{11}c^2s\mathfrak{E}_3, \\ y_y = -d_{11}c\mathfrak{E}_1 & -d_{11}s\mathfrak{E}_3, \\ z_z = d_{11}cs^2\mathfrak{E}_1 - d_{14}sc\mathfrak{E}_2 + d_{11}s^3\mathfrak{E}_3, \\ y_z = d_{14}c^2\mathfrak{E}_1 - 2d_{11}s\mathfrak{E}_2 + d_{14}sc\mathfrak{E}_3, \\ z_x = 2d_{11}c^2s\mathfrak{E}_1 - d_{14}(c^2 - s^2)\mathfrak{E}_2 + 2d_{11}s^2c\mathfrak{E}_3, \\ x_y = -d_{14}cs\mathfrak{E}_1 - 2d_{11}c\mathfrak{E}_2 - d_{14}s^2\mathfrak{E}_3. \end{cases}$$

Führt man gemäß (41) wieder ein

$$-\mathfrak{E}_1 = Ax + By, \quad -\mathfrak{E}_2 = Bx - Ay, \quad -\mathfrak{E}_3 = 0,$$

so treten an Stelle der letzten beiden Formeln (47) die folgenden

$$\begin{aligned} -d_{14}c^2(Ax + By) + 2d_{11}s(Bx - Ay) &= (b_3 + h)x + c_3y, \\ -2d_{11}c^2s(Ax + By) + d_{14}(c^2 - s^2)(Bx - Ay) &= (b_3 - h)y + a_3x, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$2h = -d_{14}s^2A + 2d_{11}s(1 + c^2)B.$$

Betrachtet man das in B multiplizierte Glied als das überwiegende, dann besteht für kleines ϑ zwischen der Drillung bei dem jetzt vorausgesetzten Stab und der durch (48) gegebenen und von uns beobachteten dasselbe Verhältnis $2s:1$, wie zwischen den piezoelektrischen Erregungen. Nimmt man wieder $\vartheta = 3^\circ$ an, so würde auch wieder das Zahlenverhältnis $1:10$ resultieren.

Dieses in beiden Fällen gefundene Verhältnis überrascht zunächst durch seine Größe; man sollte so nahe an der Orientierung gänzlich fehlender Wirkung wohl einen geringeren Effekt erwarten. Der große Wert ist in der Tat auch durchaus an die vorausgesetzte Ebene durch Haupt- und Nebenachse

gebunden, wo die Veränderlichkeit in der Nähe der Hauptachse mit $\sin \vartheta$ proportional ist; in einer dazu normalen Ebene z. B. würde eine Proportionalität mit $\sin^2 \vartheta$ stattfinden, der Effekt also bei $\vartheta = 3^\circ$ unmerklich sein.

Der (zusammengesetzte) Quarzstab, den Hr. Röntgen benutzt hat, besaß die Länge von 18 cm, etwas mehr, als diejenige des uns zur Verfügung stehenden, und er ist vielleicht in einem etwas größeren Teil seiner Länge ausgenutzt worden. Seine Dicke war geringer (0,71 bzw. 0,76 cm Durchmesser statt 1,2 cm), und da die Ladungen direkt an der Oberfläche angebracht waren, so war die Größe a in der Formel (65) kleiner.

Für eine strenge Berechnung des elektrischen Feldes, das Hr. Röntgen anwandte, fehlen die Unterlagen. Vertauscht man aber für die Rechnung die von ihm benutzten schmalen aufgeklebten Stanniolstreifen mit Drähten von 1 mm Durchmesser, so ist $a/R' = 7,4$ und $\ln(a/R') = 2$ ca. Für V folgt aus Hrn. Röntgens Angaben etwa 4700 Volt, d. h. rund 16 cm/gr/sec. Die Beobachtung geschah aus 3 m Entfernung. Faßt man dies alles zusammen, so sollte man eine Bewegung der Skala erwarten, die *sehr beträchtlich* kleiner gewesen sein müßte, als die von uns unter günstigsten Umständen erzielte. Es müssen demnach zufällige Umstände überaus glücklich zusammengewirkt haben, um die wahrgenommenen Verschiebungen um Bruchteile eines Millimeters (selbst für die einzelne Stabhälfte!) zu bewirken.

In jedem Falle erscheint die vorstehende quantitative Untersuchung und Bestätigung der Theorie keineswegs überflüssig.

Ergebnisse.

1. Es ist die Theorie der piezoelektrischen Erregung eines Kreiszyllinders aus einem Kristall der enantiomorphen Gruppe des trigonalen Systemes (Quarz) durch Drillung für die drei Hauptfälle, daß die Zylinderachse entweder in die kristallographische Hauptachse, oder in eine Nebenachse, oder in eine zu beiden normale Richtung fällt, bis zur Aufstellung der Gesetze für die beobachtbaren Erscheinungen entwickelt.

2. Die Resultate sind in den allein wirksamen zwei letzten Hauptfällen mit der Beobachtung verglichen worden, einerseits bezüglich der Symmetrieverhältnisse der Erregung, andererseits bezüglich deren absoluten Beträgen. Die Symmetrieverhältnisse erwiesen sich durchaus der Theorie entsprechend. Die absolute Erregung fand sich bei dem zweiten Hauptfall mit den besten Bestimmungen des dafür charakteristischen Moduls d_{11} in guter Übereinstimmung; in dem dritten Hauptfall ergab sich gegen die bisherigen sehr unsicheren Bestimmungen des maßgebenden Moduls d_{14} eine größere Differenz. Die genaue Untersuchung machte sehr wahrscheinlich, daß dieselbe auf einem kleineren Fehler der Orientierung des benutzten Präparates beruht, da bei dem dritten Hauptfall eine kleine Abweichung von der richtigen Orientierung einen enormen Einfluß in eben dem beobachteten Sinne hat.

3. Es ist die Theorie der piezoelektrischen Erregung durch gleichförmige Biegung mittels eines Momentes um eine Querrihtung für die vorigen drei Fälle entwickelt worden. Dabei erwies sich nur der dritte Fall piezoelektrisch wirksam, und zwar in einer mit der Orientierung der Momentenachse in sehr merkwürdiger Weise wechselnden Art. Die Beobachtung bestätigte dieses letztere Resultat und lieferte auch bezüglich des absoluten Betrages der Erregung eine gute Übereinstimmung mit den anderweit bestimmten Zahlen für den hier maßgebenden Modul d_{11} .

4. Es sind die Gesetze der elektrischen Deformation für die oben bezeichneten drei Hauptfälle entwickelt, wenn das auf den Zylinder wirkende elektrische Feld eine homogene lineäre Funktion der Querkoordinaten ist. Die Resultate gehen dahin, daß der Zylinder in der ersten Hauptlage weder Biegung noch Drillung, in der zweiten nur Drillung, in der dritten Biegung und Drillung erfährt.

5. Es ist die Theorie einer Anordnung entwickelt, die in Annäherung eine ebensolche Feldverteilung bewirkt, wie sie vorstehend vorausgesetzt ist. Dieselbe ist auf den Zylinder in der zweiten Hauptlage zur Anwendung gebracht, und es ist dabei eine Drillung beobachtet worden, die in guter Übereinstimmung mit dem theoretisch bestimmten Wert steht.

6. Die Kleinheit der letzteren, unter ausgesucht günstigen Umständen erzielten Wirkung ließ es verwunderlich erscheinen,

daß Hr. Röntgen unter sehr viel ungünstigeren Bedingungen doch eine wahrnehmbare Drillung erhalten hat. Es wurden demgemäß die Verhältnisse, die bei jenen Beobachtungen vermutlich vorgelegen haben, der theoretischen Berechnung unterworfen und gezeigt, daß durch Zusammentreffen mehrerer glücklichen Umstände bei jener Anordnung nach der Theorie eine eben wahrnehmbare Drillung in der Tat eintreten kann.

Göttingen, April 1915.

(Eingegangen 18. Juli 1915.)