

UNA PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DELLE TRAIETTORIE DINAMICHE SPICcate DA DUE PUNTI ¹⁾.

NOTA DI T. LEVI-CIVITA.

Il Sig. R. Straubel rilevò, pochi anni or sono, una notevole relazione di reciprocità, concernente i pennelli elementari di raggi emessi da due centri luminosi di un mezzo qualsiasi ²⁾ (comunque eterogeneo, ma isotropo). Questa relazione dà luogo a interessanti applicazioni fotometriche e diottriche, indicate dallo stesso Straubel, e ricorre nei fondamenti della teoria dell'irraggiamento, secondo il metodo integrale di Hilbert ³⁾.

Mi propongo di far vedere, sfruttando in generale le caratteristiche dell'azione hamiltoniana ⁴⁾, che il risultato in questione rientra come caso particolare in una proprietà di simmetria dei fasci conservativi di traiettorie dinamiche, il che è quanto dire delle geodetiche di un arbitrario ds^2 . Nella relativa metrica la proposizione generale appare anche più semplice dei suoi corollari ottici. Ne illustrerò uno a titolo

¹⁾ *Rend. della R. Accad. dei Lincei*, vol. XXIV, serie 5.^a fasc. 7.^o.

²⁾ *Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen*, *Phys. Zeitschrift*, IV, 1903, pp. 114-117. Il sig. A. Gleichen ne ha dato poco dopo [ibidem, pp. 226-227] una dimostrazione di carattere elementare, considerando un numero finito di mezzi omogenei, e valutando l'influenza delle successive rifrazioni.

³⁾ *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, *Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1912, pp. 1-17; riprodotto in *Phys. Zeitschrift*, XIII, 1912, pp. 1056-1064; e in *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, XXII, 1913, pp. 1-20.

⁴⁾ Nella forma che meglio si presta alle applicazioni ottiche, quale emerge ad es. dal *Treatise on natural philosophy* di Kelvin e Tait, part. I [Cambridge, University Press, 1896], pp. 347-358. A pag. 358, sotto il titolo *Applications to commons optics*, si trova accennato con espressivo commento un caso particolare del teorema di Straubel.

d'esempio, ricavando sotto forma esplicita l'estensione della formula di Straubel ai mezzi anisotropi.

1. *Generalità — Enunciato del teorema.* — Sia O un punto di una varietà V_n a n dimensioni, definita metricamente dal quadrato del suo elemento lineare

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{ik}^n a_{ik} dx_i dx_k .$$

Consideriamo una geodetica G passante per O e un cir-costante pennello elementare (di geodetiche, spiccate tutte da O). Sia l la lunghezza dell'arco contato, su ogni geodetica del pennello, a partire da O . Le ipersuperficie (ipersfere geodetiche di centro O e raggio l) $l = \text{cost}$ tagliano ortogonalmente ¹⁾ il pennello in campi $d\omega$ ad $n - 1$ dimensioni. Fissiamo una di queste ipersfere di raggio generico l , e sia O' il punto di G che ad essa appartiene.

Il rapporto

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}}$$

si può considerare come ampiezza angolare del pennello, misurata alla distanza l . Negli spazi euclidei, $d\Omega_l$ è indipendente da l (= per es. al $d\omega$ dell'ipersfera di raggio 1) e si può identificare coll'angolo solido del pennello nel suo vertice O , cioè con

$$d\Omega = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{d\omega}{l^{n-1}} .$$

In uno spazio di natura qualunque, $d\Omega_l$ varia, in generale, con l , e così il rapporto

$$\frac{d\Omega_l}{d\Omega} = J(O, O') ,$$

che misura manifestamente l'*ingrandimento* (angolare) in O' d'un pennello elementare di geodetiche, spiccate da O verso O' .

¹⁾ Cfr., per es., Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 336-338.

Ciò posto, si consideri invece un pennello spiccato da O' verso O , e il relativo ingrandimento angolare, in O , $J(O', O)$. L'annunciata relazione di simmetria è espressa dalla formula

$$J(O, O') = J(O', O).$$

2. La distanza geodetica $W(P, P')$ va risguardata come una funzione simmetrica dei due punti P, P' , regolare, finchè questi rimangono distinti, entro una regione convenientemente limitata della varietà V_n . Essa coincide notoriamente coll'azione hamiltoniana di un sistema libero da forze, la cui energia cinetica abbia per espressione $\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}$ e si conservi $= \frac{1}{2}$ durante tutto il moto. Giova rammentarne, per quanto verrà in uso qui appresso, il comportamento differenziale caratteristico.

Fissiamo, all'uopo, una geodetica generica, indicando con \dot{x}_i le derivate delle coordinate x_i rispetto all'arco della stessa geodetica, e introduciamo le *coniugate* o *momenti cinetici*

$$(2) \quad p_i = \sum_1^n a_{ik} \dot{x}_k,$$

atti, al pari delle \dot{x}_i , a caratterizzare la direzione della geodetica in un suo punto qualsiasi ¹⁾. L'identità

$$(3) \quad \sum_1^n a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = 1,$$

cui, per loro definizione, soddisfanno le \dot{x}_i , implica tra le p la relazione quadratica reciproca

$$(3') \quad \sum_1^n a^{(ik)} p_i p_k = 1$$

($a^{(ik)}$ complementi algebrici delle a_{ik} nel determinante da esse costituito, divisi per il determinante stesso).

¹⁾ È manifesto che le p_i non differiscono dalle λ_i di Ricci, cioè dal sistema coordinato covariante della geodetica in questione.

Riferiamoci in particolare alla geodetica congiungente P con P'. Siano x_i, x'_i le coordinate di questi due punti; p_i, p'_i i valori che in essi assumono i momenti, convenendo che essi corrispondano, in entrambi i casi, alla direzione della geodetica che è rivolta *verso l'esterno dell'arco* PP'.

Per arbitrari spostamenti infinitesimi di questi due punti, cioè per arbitrari incrementi dx_i, dx'_i delle loro coordinate, sussiste l'identità

$$(4) \quad dW = \sum_1^n p_i dx_i + \sum_1^n p'_i dx'_i \quad ^1),$$

la quale mostra che le p_i, p'_i coincidono ordinatamente con $\frac{\partial W}{\partial x_i}, \frac{\partial W}{\partial x'_i}$.

3. *Piccoli intorno di variabilità per P e P' — Specificazioni del sistema di riferimento.* — Immaginiamo, ormai, che P rimanga nell'immediata prossimità di un assegnato punto O, e P' in prossimità di un altro punto O' distinto da O.

Siano $x_i^{(0)}$ e $x'_i{}^{(0)}$ le coordinate di O e di O', e si ponga

$$(5) \quad \begin{cases} x_i = x_i^{(0)} + \xi_i, \\ x'_i = x'_i{}^{(0)} + \xi'_i. \end{cases}$$

Si designi poi con G la geodetica passante per O, O', e si noti che (previa opportuna trasformazione delle coordinate generali x_i) è sempre lecito ritenere:

a) che, nei due punti O, O', i valori numerici dei coefficienti α_{ik} del quadrato dell'elemento lineare, e con essi i

¹⁾ Non si dimentichi la convenzione fatta circa i versi positivi in P e in P'. Di solito si presenta la (4) sotto la forma (emisimmetrica rispetto ai due punti P, P')

$$dW = \sum_1^n p'_i dx'_i - \sum_1^n p_i dx_i,$$

ma allora si intende che le p e le p' si riferiscano ad uno stesso senso di percorrenza (da P verso P').

loro reciproci $a^{(ik)}$, si riducono ad ε_{ik} (cioè zero per $i \neq k$, e 1 per $i = k$);

b) che le \dot{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) relative alla G sono nulle in O ed in O', avendosi ulteriormente [in causa della (3), che si riduce a $\sum_1^n \dot{x}_i^2 = 1$] $\dot{x}_n = 1$, o addirittura (fissando convenientemente i versi) $\dot{x}_n = 1$.

Dalle (2), e da a) e b) segue che i momenti della G in O ed O' valgono rispettivamente

$$(6) \quad \begin{cases} p_i = 0, & p'_i = 0 & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ p_n = 1, & p'_n = 1. \end{cases}$$

Avuto riguardo alle (4) e (5), lo sviluppo di W (P, P) nell'intorno di O, O' (fino al secondo ordine inclusivo) si presenta sotto la forma

$$(7) \quad W(P, P') = l + \xi_n + \xi'_n + \Xi_2 + \Xi'_2 + \sum_1^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k} \xi_i \xi'_k,$$

dove l sta per la distanza geodetica W (O, O'), e Ξ_2, Ξ'_2 designano forme quadratiche degli argomenti ξ e ξ' rispettivamente: ben si intende che i coefficienti $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k}$ della forma bilineare vanno (come le altre derivate di W) riferiti alla coppia O, O'.

Per derivazione rispetto a x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (o, ciò che è lo stesso, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$), si ha, in base alla (7) (e a meno di termini d'ordine superiore al primo),

$$(8) \quad p_i = \Xi_1 + \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k} \xi'_k \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

e, in modo analogo,

$$(9) \quad p'_i = \Xi'_1 + \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial x_k} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

con ovvio significato di Ξ_1, Ξ'_1 (forme lineari, delle ξ la prima, delle ξ' la seconda).

Dacchè, in O e in O' , $a^{(ik)} = \varepsilon_{ik}$, la (3') porge $\sum_1^n p_i^2 = 1$, $\sum_1^n p_i'^2 = 1$. Perciò, a meno di termini di second'ordine, p_n e p_n' seguitano ad avere il valore 1 (che ad essi spetta, sulla G , in O e, rispettivamente, in O').

4. *Pennello elementare di centro O — Ampiezza angolare misurata in prossimità di O' , e all'origine.* — Per le geodetiche (prossime a G) spiccate da O , le ξ vanno poste eguali a zero. La $W(O, P')$ limitata ai termini di primo ordine, si riduce a

$$l + \xi'_n,$$

e, nello stesso ordine di approssimazione, l'ipersfera geodetica di centro O

$$W(O, P) = l$$

si confonde coll'iperpiano passante per O'

$$\xi'_n = 0.$$

Sia $d\omega$ un campo elementare di questo iperpiano circostante ad O' , e si consideri il pennello di geodetiche che proiettano $d\omega$ da O .

L'ampiezza angolare di questo pennello misurato alla distanza l , vale manifestamente

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}}.$$

In partenza (intendo dire nel vertice O), queste geodetiche hanno dei momenti p_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), definiti dalle (8), in cui si sieno poste le ξ e la ξ'_n eguali a zero: ossia

$$p_i = \sum_1^{n-1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k} \xi'_k \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

mentre, sempre a meno di termini del secondo ordine (nelle ξ), $p_n = 1$.

D'altra parte, a norma delle (2), ed a), le p_i coincidono in O colle x_i . Ne consegue che, sopra una generica geodetica del pennello, alla distanza elementare λ da O , le coordinate x_i si trovano incrementate di $p_i\lambda$. Si ha così, confrontando colle (5),

$$(10) \quad \xi_i = \lambda \sum_1^{n-1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k} \xi'_k ,$$

$$(11) \quad \xi_n = \lambda .$$

Quest'ultima mostra che l'ipersfera di centro O e raggio λ si confonde, nell'intorno considerato, coll'iperpiano $\xi_n = \lambda$. La (10) stabilisce così una corrispondenza omografica fra i due iperpiani $\xi'_n = 0$ e $\xi_n = \lambda$, corrispondendosi le intersezioni con una medesima geodetica del pennello. Fra due elementi omologhi $d\omega$ e $d\omega_\lambda$ di questi due iperpiani, passa, a norma delle (10), la relazione

$$(12) \quad d\omega_\lambda = \lambda^{n-1} |\Delta| d\omega ,$$

rappresentando Δ il determinante dei coefficienti $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k}$ (certo diverso da zero entro il campo di regolarità, cui si suppone di riferirsi).

Angolo solido all'origine del nostro pennello (proiettante $d\omega$ da O) è manifestamente il rapporto

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}} ,$$

che si confonde, nell'adottato ordine di approssimazione, con

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{d\omega_l}{l^{n-1}} .$$

5. *Ingrandimento in O' — Teorema di reciprocità.* —

Ingrandimento in O' del nostro pennello di centro O sarà da dirsi il rapporto $J(O, O')$ delle due ampiezze angolari $d\Omega_l$ e $d\Omega$, ossia

$$J(O, O') = \frac{d\Omega_l}{d\Omega} = \frac{d\omega}{l^{n-1}} : \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}} .$$

La (12) ce ne fornisce l'espressione

$$J(O, O') = \frac{1}{l^{n-1} |\Delta|}.$$

Se si nota che $W(O, O')$ è, per sua definizione, simmetrica rispetto ai due punti da cui dipende, e che simmetriche sono altresì le particolarizzazioni di coordinate $a)$ e $b)$, di cui ci siamo valsi per semplificare le formule, senz'altro risulta che il determinante Δ rimane invariato, al pari di $l = W(O, O')$, quando si scambino O ed O' . Di qui la relazione

$$J(O, O') = J(O', O),$$

che esprime, si può dire, la reversibilità dei pennelli geodetici rispetto all'ingrandimento angolare.

6. *Applicazione ottica ai mezzi anisotropi.* — In un punto generico P di un mezzo birifrangente, siano (per la specie di raggi che si dovranno considerare) n_1, n_2, n_3 gli indici di rifrazione nelle direzioni degli assi ottici x, y, z . In base al principio di Fermat, i raggi luminosi entro un mezzo siffatto coincidono colle geodetiche del

$$(13) \quad ds^2 = n_1^2 dx^2 + n_2^2 dy^2 + n_3^2 dz^2.$$

Sia S la varietà a tre dimensioni caratterizzata metricamente da un tale ds^2 , e S^* lo spazio ordinario, sede del fenomeno ottico. Queste due varietà, definite entrambe metricamente, sono poste in corrispondenza biunivoca dalla varietà analitica (x, y, z) .

Detta ds^* la distanza elementare euclidea fra due punti vicinissimi (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$, e

$$\alpha = \frac{dx}{ds^*}, \quad \beta = \frac{dy}{ds^*}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds^*}$$

i coseni direttori dell'arco che li congiunge, dalla (13) si ha

$$(14) \quad \frac{ds}{ds^*} = \sqrt{n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2},$$

il radicale andando preso in valore assoluto.

Consideriamo ancora un intorno a tre dimensioni di (x, y, z) , e i relativi elementi di volume dS e dS^* , nella metrica (13) e nell'ordinaria. Avremo

$$(15) \quad \frac{dS}{dS^*} = n_1 n_2 n_3.$$

Consideriamo infine l'elemento superficiale normale alla direzione (α, β, γ) , cui compete la misura euclidea $d\sigma^* = \frac{dS^*}{ds^*}$,

Sarà $d\sigma = \frac{dS}{ds}$ la sua misura nella metrica (13), con che le (14) e (15) danno

$$(16) \quad \frac{d\sigma}{d\sigma^*} = \frac{n_1 n_2 n_3}{\sqrt{n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2}}.$$

Mediante queste formule possiamo riportare allo spazio euclideo del mezzo ambiente le ampiezze angolari $d\Omega$ e $d\Omega_i$, definite al n. 4, con referenza ad un generico ds^2 e alle sue geodetiche [nel caso attuale il ds^2 (13) a tre dimensioni, e i raggi luminosi].

Occupiamoci dapprima dell'angolo solido all'origine

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^2}.$$

La misura di quest'angolo, nello spazio fisico, è, con manifesto significato dei simboli,

$$d\Omega^* = \frac{d\omega_\lambda^*}{\lambda^{*2}}.$$

Per divisione, si ha

$$\frac{d\Omega}{d\Omega^*} = \frac{d\omega_\lambda}{d\omega_\lambda^*} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right)^2,$$

donde, tenendo presente che λ, λ^* vanno trattate come misura di uno stesso arco elementare, e applicando le (14) e (16),

$$(17) \quad d\Omega = d\Omega^* \frac{n_1 n_2 n_3}{(n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2)^{1/2}},$$

Va da se che, in quest'ultima formula, i valori di n_1, n_2, n_3 si riferiscono al punto O; quelli di α, β, γ pure ad O e alla direzione del raggio che va a passare per O'.

In prossimità di O', abbiamo, nella varietà S, un'ampiezza angolare misurata da

$$d\Omega_t = \frac{d\omega}{l^2}.$$

L'ampiezza euclidea dello stesso pennello vale

$$d\Omega_t^* = \frac{d\omega^*}{\overline{OO'}^2},$$

designandosi manifestamente con $\overline{OO'}$ la distanza dei due punti in senso ordinario. La (16) dà

$$(18) \quad d\Omega_t = d\Omega_t^* \frac{\overline{OO'}^2}{l^2} \frac{n'_1 n'_2 n'_3}{\sqrt{n'^2_1 \alpha'^2 + n'^2_2 \beta'^2 + n'^2_3 \gamma'^2}},$$

le quantità accentate riferendosi ad O' e alla direzione del raggio che va a passare per O.

Ciò posto, indichiamo con

$$J^*(O, O') = \frac{d\Omega_t^*}{d\Omega^*}$$

l'ingrandimento angolare (inteso nell'ordinario senso euclideo) che si verifica per il nostro pennello di raggi, nel passare dall'origine O fino in O'. Dalle (18) e (17) si ricava

$$\frac{l^2}{\overline{OO'}^2} J(O, O') = J^*(O, O') \frac{n'_1 n'_2 n'_3 (n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2)^{1/2}}{n_1 n_2 n_3 (n'^2_1 \alpha'^2 + n'^2_2 \beta'^2 + n'^2_3 \gamma'^2)^{1/2}}.$$

Il primo membro è funzione simmetrica dei punti O, O' . Lo è quindi anche il secondo. Esprimendo materialmente questa circostanza, si ricava l'estensione della formula di Straubel ai mezzi anisotropi.

Per $n_1 = n_2 = n_3 = n$, si ritrova naturalmente la relazione già data da questo autore. Colle nostre notazioni essa assume l'aspetto

$$J^*(O, O') n'^2 = J^*(O', O) n^2,$$

da cui apparisce che gli ingrandimenti angolari di due pennelli, diremo così, affacciati, stanno fra loro nel rapporto inverso dei quadrati degli indici di rifrazione nei rispettivi centri.
