**2. Hamiltonsches Prinzip
der elektromagnetischen Grundgleichungen
im Innern ponderabler Materie;
von Walter Dällenbach.**

Die in einer früheren Arbeit¹⁾ durch Mittelwertbildung aus den Gleichungen im leeren Raume gewonnenen, allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie sollen aus einem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet werden in derselben Weise, wie das durch Weyl²⁾ für das Vakuum geschehen ist.

Der einfacheren Benennung wegen beschränke ich mich auf ein Koordinatensystem, in dem die spezielle Relativitätstheorie gilt. Der Übergang zu den allgemein kovarianten Gleichungen ist hier bloß formaler Natur und an den Resultaten leicht vorzunehmen.

Für die *Hamiltonsche Funktion* machen wir den naheliegenden Ansatz³⁾

$$(1) \quad H = \varphi_a J^a + \frac{1}{2} \int_0^F \{f^{a\beta} + m^{a\beta}\} df_{a\beta} + K.$$

Dann bedeuten im Sinne der Elektronentheorie $J^a = \overline{g_0 u^a}$ den „wahren Strom“ und φ_a den Mittelwert des elektromagnetischen Viererpotentials. Im Integranden des zweiten Terms sind $f^{a\beta}$ und $m^{a\beta}$ die laufenden Werte der Zustandsgrößen

1) W. Dällenbach, Die allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie vom Standpunkte der Elektronentheorie. Ann. d. Phys. 58. p. 523. 1919 Ihre Kenntnis setze ich in der Folge voraus.

2) H. Weyl, Zur Gravitationstheorie. Ann. d. Phys. 54. p. 117. 1918, insbesondere § 1.

3) In der Bezeichnung im Anschluß an A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. 49. p. 769. 1916 lasse ich die Summenzeichen weg.

„makroskopisches Feld“ $F^{\alpha\beta}$ und „Polarisation“ $M^{\alpha\beta}$. Das Feld leitet sich in bekannter Weise

$$(2) \quad H_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}$$

vom Potential ab, woraus als mathematische Identität das Induktionsgesetz

$$(3) \quad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0$$

folgt. Die Polarisation ergibt sich nach Formel (II d) der zitierten Abhandlung¹⁾ als ein Konfigurationsintegral über Lagen und Geschwindigkeiten der Mikroladungen der Moleküle, die die Materie konstituieren.

$$(4) \quad M^{\alpha\beta} = \frac{e_0}{2} (u^\alpha x^\beta - u^\beta x^\alpha).$$

Das Integral $\int_0^x$ im Ausdrucke für H ist zu erstrecken vom Polarisationszustande Null bis zu den tatsächlich vorhandenen Werten der Zustandsgrößen, und zwar *auf dem Wege, den die Materie wirklich durchlaufen hat*. Damit umspannen wir auch Körper, die Hysteresis zeigen; denn, was wir allein noch voraussetzen, ist, daß einem zeitlichen Verlaufe des Feldes $F_{\alpha\beta}$ ein ganz bestimmter zeitlicher Verlauf der Polarisation $M^{\alpha\beta}$ zugeordnet sei.

K endlich bezeichne die von den elektromagnetischen Zustandsgrößen *unabhängige* Weltichte der Wirkung.

Für jede an den Grenzen des Weltgebietes G verschwindende Variation soll $\int_G H dt$ stationär sein.

1. Erteilen wir insbesondere dem Viererpotential φ_α die am Rande verschwindende Variation $\delta\varphi_\alpha$, so erhalten wir die noch fehlenden *Maxwell-Lorentz'schen Feldgleichungen*. Der wahre Strom J^α wird dabei unverändert festgehalten, dagegen erleide die Polarisation $M^{\alpha\beta}$ in jedem Weltpunkte den Zuwachs, der kraft der Materialgleichungen dem Feldzuwachs

$$(5) \quad \delta H_{\alpha\beta} = \frac{\partial \delta \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \delta \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}$$

entspricht. Es ist dann

1) W. Dällenbach, l. c. p. 532.

$$\delta \int_G H dt = \int_G \left\{ J^a \delta \varphi_a + \frac{1}{2} (F^{a\beta} + M^{a\beta}) \delta F_{a\beta} \right\} dt = 0$$

oder wegen (5) nach partieller Umformung

$$= \int_G \left\{ J^a - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (F^{a\beta} + M^{a\beta}) \right\} \delta \varphi_a dt = 0,$$

so daß

$$(6) \quad \frac{\partial (F^{a\beta} + M^{a\beta})}{\partial x_\beta} = J^a.$$

2. Es erfahre die Substanz bei festgehaltenem Felde die über das Gebiet G beliebige, am Rande verschwindende, physikalisch kleine Weltverschiebung mit den Komponenten ξ^* . Sie liefert uns die *ponderomotorische Kraftdichte*. Es ist

$$(7) \quad \delta \int_G H dt = \delta \int_G \varphi_a J^a dt + \delta \int_G dt \int \frac{1}{2} m^{a\beta} df_{a\beta} + \int \kappa_* \xi^* dt = 0.$$

Die aus der Wirkungsichte K entspringende Kraftdichte κ_* wird der elektromagnetischen Gleichgewicht halten.

Zur Variation des ersten Terms ist zu bemerken, daß J^a selbst ein Mittelwert

$$J^a = \overline{\varrho_0 u^a} = \frac{1}{\int dt} \int_g \varrho_0 u^a dt$$

oder wegen

$$\varrho_0 u^a dt = de ds u^a = de dx_a$$

wird

$$J^a = \frac{1}{\int dt} \int_g de dx_a.$$

g ist ein physikalisch kleines Weltgebiet, und das Integral im Zähler ist zu erstrecken über die innerhalb g verlaufenden Weltlinienstücke all der Mikroladungen, die zum wahren Strome beitragen. Wird g von der Verschiebung ξ^* mitgenommen, so ist

$$\begin{aligned} \delta \{ J^a dt \} &= \delta \left\{ \frac{dt}{\int dt} \right\} \int_g de dx_a + \frac{dt}{\int dt} \int_g de \delta \{ dx_a \} \\ &= \text{null} + J^a \frac{\partial \xi^a}{\partial x_\beta} dt, \end{aligned}$$

falls wir $\frac{\partial \xi^a}{\partial x_\beta}$ in erster Annäherung über g konstant setzen.

Somit wird

$$\delta \int_G \varphi_a J^a dt = \int_G \left\{ \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\beta} J^a \xi^\beta + \varphi_a J^\beta \frac{\partial \xi^a}{\partial x_\beta} \right\} dt ,$$

oder nach partieller Umformung des zweiten Gliedes, Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial J^\beta}{\partial x_\beta} = 0$$

der Elektrizität und anderer Benennung der Indizes

$$= \int_G - F_{\alpha a} J^a \xi^\alpha dt .$$

Bezeichnet δa die Variation einer Größe a in ein und demselben Weltpunkte, δa dagegen die Änderung, die a erfährt, wenn wir mit der Verschiebung ξ^* mitgehen, so gilt

$$\delta a = \delta^* a + \frac{\partial a}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha .$$

Es ist somit das zweite Glied in Gleichung (7)

$$= \int_G dt \left[\delta \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} \xi^\alpha \right] .$$

Die Operation δ , die sich auf *ein und dasselbe* Stückchen Substanz bezieht, ist derart durchzuführen, daß die *Materialgesetze*, die den zeitlichen Verlauf der Polarisierung in Funktion des zeitlichen Verlaufes des Feldes bestimmen *durch die Variation nirgends verletzt werden*, d. h. wohl ist der *Mittelwert* der Weltverschiebung — es sei dieser ξ^* selbst — eine beliebige, stetige usw., am Rande verschwindende Funktion der Koordinaten, dagegen sei die *mikroskopische Schwankung* von ξ^* (Abweichung vom Mittelwert), die die Verzerrung des einzelnen Moleküls bedingt, derart gewählt, daß dabei die Polarisierung $M^{\alpha\beta}$ [Gl. (4)] des betrachteten Materiestückchens gerade um so viel wächst, als kraft der Materialgesetze der Zunahme

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha$$

des Feldes entspricht, die durch die Translation der Materie um ξ^* verursacht wird. Es ist also

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha .$$

Damit wird endgültig:

$$\delta \int_G H dt = \int_G \left[-F_{\alpha\alpha} J^\alpha + \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} + \kappa_\kappa \right] \delta x^\kappa dt = 0.$$

Die Kraftdichte K_κ ergibt sich also zu

$$\kappa_\kappa = F_{\alpha\alpha} J^\alpha - \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\}$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit Formel (11) der zitierten Abhandlung¹⁾ und läßt sich, wie dort gezeigt wurde, vom Impulsenergiesensor

$$T_\kappa^\beta = F_{\alpha\alpha} (F^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}) + \delta_\kappa^\beta \frac{1}{2} \int_0^F (f^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta}$$

ableiten.

Zürich, November 1918.

1) W. Dällenbach, l. c. p. 542.

(Eingegangen 26. November 1918.)