Über Transformationen des ebenen Kreisringes.

Von

B. VON KERÉKJÁRTÓ in Ujpest (Ungarn).

§ 1.

Von den eindeutigen stetigen Transformationen eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten ebenen Kreisringes in sich gelten die folgenden Sätze:

Bei einer eindeutigen stetigen Transformation eines Kreisringes in sich

1. *mit invarianter Indikatrix und invarianten Grenzkreisen gibt es im allgemeinen keinen Fixpunkt;*

2. *mit invarianter Indikatrix und vertauschten Grenzkreisen gibt es wenigstens zwei Fixpunkte;*

3. *mit umgekehrter Indikatrix und invarianten Grenzkreisen gibt es wenigstens vier Fixpunkte;*

4. *mit umgekehrter Indikatrix und vertauschten Grenzkreisen gibt es im allgemeinen keinen Fixpunkt.*

Für Satz 1. liefert eine Drehung des Kreisringes um den Mittelpunkt der konzentrischen Kreise ein Beispiel. Es gibt aber in diesem Falle auch dann noch nicht notwendig einen Fixpunkt, wenn die beiden Grenzkreise Drehungen in entgegengesetzten Richtungen erleiden, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei

$$1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

der gegebene Kreisring und es sei eine Abbildung desselben definiert durch

$$\left. \begin{aligned} r' &= r + \frac{r-1}{2} \quad \text{für } 1 \leq r \leq 2 \\ r' &= r + \frac{3-r}{2} \quad \text{für } 2 \leq r \leq 3 \end{aligned} \right\}, \quad \varphi' = \varphi + (2-r) \frac{\pi}{2};$$

diese Abbildung hat offenbar keinen Fixpunkt, da $r' = r$ nur für $r = 1$ und $r = 3$, $\varphi' = \varphi$ aber nur für $r = 2$, beide zugleich also niemals zu treffen.

Satz 2. wird im folgenden Paragraphen in einer allgemeineren Form bewiesen werden.

Satz 3. ist eine Folge des Satzes, daß es bei einer eindeutigen stetigen Abbildung einer Kreislinie in sich mit umgekehrter Indikatrix

genau zwei Fixpunkte gibt. Weil nämlich beide Grenzkreise des Kreisringes invariant sind und ihre Indikatrizten sich umkehren, so gibt es auf jedem Grenzkreise genau zwei und deshalb im (abgeschlossenen) Kreisringe wenigstens vier Fixpunkte.

Für Satz 4. gebe ich das folgende Beispiel. Es sei

$$1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

der Kreisring und es seien die Polarkoordinaten (r', φ') des Bildpunktes von (r, φ) durch folgende Formeln definiert:

$$r' = 4 - r, \quad \varphi' = \varphi + \pi.$$

Alsdann haben wir eine den Voraussetzungen genügende Transformation ohne Fixpunkt.

§ 2.

Theorem. *Eine eindeutige stetige Abbildung eines von endlichvielen geschlossenen Jordanschen Kurven begrenzten abgeschlossenen Kugelbereiches auf einen Teilbereich desselben mit invarianten Indikatrix, bei welcher die Grenzkurven des ursprünglichen und des Bildbereiches paarweise äquivalent sind, die aber keine Grenzkurve in eine äquivalente überführt, läßt wenigstens zwei Punkte invariant.*

Hierbei sollen zwei einander nicht kreuzende Kurven *äquivalent* genannt werden, wenn in ihrem Zwischengebiete keine Grenzkurve liegt.

Wir zeigen zunächst, daß die Abbildung wenigstens einen Fixpunkt hat. Erweitert man sie nämlich mittels einer an sie anschließenden Abbildung des Innern jeder einzelnen Grenzkurve auf das Innere der betreffenden Bildkurve, so erhält man eine eindeutige stetige Transformation der Kugel in sich mit invarianten Indikatrix, die nach einem Satze Brouwers*) wenigstens einen Fixpunkt hat. Da aber jede einzelne Grenzkurve in eine einer andern äquivalente übergeht, so ist das Innere jeder einzelnen Grenzkurve von seinem Bilde getrennt, mithin liegt der nachgewiesene Fixpunkt notwendig im ursprünglichen Bereiche.

Daß die Abbildung wenigstens zwei Fixpunkte hat, läßt sich mit Hilfe des *Translationssatzes* von Brouwer**) beweisen.

Der *Translationssatz* lautet: *Jede eindeutige stetige, den Umlaufssinn nicht ändernde Transformation der Cartesischen Ebene in sich, welche keinen Punkt invariant läßt, ist über die ganze Ebene eine Translation.*

Darunter ist zu verstehen, daß zu jedem beliebigen Punkte der Ebene sich ein diesen Punkt enthaltendes *Translationsfeld* angeben läßt, d. h. ein

*) Vgl. § 2 des vorigen Aufsatzes.

**) Math. Ann. Bd. 72, S. 87.

ganz außerhalb seines Bildgebietes liegendes Gebiet, das von zwei einander nicht treffenden einfachen offenen Linien, deren eine das Bild der anderen ist, begrenzt wird.

Ich ziehe aus dem Translationssatze folgendes Korollar:

Wenn eine eindeutige stetige, den Umlaufssinn nicht ändernde Transformation der Cartesischen Ebene in sich keinen Fixpunkt hat, so kann auch keine Potenz dieser Transformation einen Fixpunkt haben.

Der direkte Beweis dieses Satzes ist in den Sätzen 1. und 7. der Brouwerschen Arbeit*) enthalten.

Um diesen Satz auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, setze man voraus, daß die gegebene und somit auch die erweiterte Transformation nur einen einzigen Fixpunkt hätte. Man wähle den diesem Fixpunkte diametral gegenüberliegenden Punkt als Berührungspunkt und den Fixpunkt als Projektionszentrum einer stereographischen Projektion der Kugelfläche auf die berührende Ebene. Die durch diese Projektion transformierte Abbildung der Kugel in sich ist eine eindeutige stetige Transformation der Ebene in sich mit invarianter Indikatrix, die keinen Punkt invariant läßt. Man bezeichne mit $C_1, C_2, \dots, C_n$ bzw. $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ die Grenzkurven bzw. die Bilder der Grenzkurven des mit dem gegebenen Bereiche korrespondierenden Bereiches. Man wähle eine Folge dieser Kurven in der Weise, daß das Bild C'_1 von C_1 mit C_α , das Bild C'_α von C_α mit C_β usw., endlich das Bild C'_μ von C_μ mit C_1 äquivalent sei; i bedeute die Anzahl der Indizes $1, \alpha, \beta, \dots, \mu$. Das Bild C'_1 von C_1 enthält C_α in seinem Innern; das Bild C''_1 von C'_1 enthält C_β in seinem Innern usw., das Bild $C^{(i)}_1$ von $C^{(i-1)}_1$ enthält also C_1 in seinem Innern; mithin wird das Innere von C_1 bei der i^{ten} Potenz der gegebenen Transformation auf einen es enthaltenden Bereich abgebildet, wobei nach einem Brouwerschen Satze**) wenigstens ein Punkt invariant ist. Dieser Widerspruch gegen das erwähnte Korollar des Translationssatzes beweist unser Theorem, von dem Satz 2. des vorigen Paragraphen einen besonderen Fall darstellt.

Ujpest, 24. Dezember 1918.

*) l. c.

**) Vgl. § 3 des vorigen Aufsatzes.