**15. Über Emission und Absorption
schichtenweise stetig inhomogener Körper;
von W. Voigt.**

1. Diejenigen Körper, welche uns die interessantesten Emissions- und Absorptionseffekte liefern, also gefärbte Flammen und elektrische Entladungen, sind *inhomogen*, und die bezüglichlichen, bei ihnen stattfindenden Vorgänge sind daher keineswegs nach qualitativer und quantitativer Seite *einfach* verständlich. Die geringsten Schwierigkeiten in dieser Hinsicht dürften Körper bieten, die man aus planparallelen in sich homogenen Elementarschichten aufgebaut betrachten kann, derart, daß die optischen Eigenschaften normal zu den Schichten *stetig* und zwar *so langsam* variieren, daß von allen Reflexionen abgesehen werden kann. Nach einer von mir hierüber angestellten Untersuchung¹⁾ dürfte das letztere in allen interessierenden Fällen merklich erfüllt sein.

Bei Körpern von dieser Konstitution gelingt es u. U., ihre Gesamtemission aus den Emissionen der einzelnen homogenen Schichten zu bezeichnen, wenn die letzteren bekannt sind. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die einzelnen Schichten bei unserem Problem nicht *in den leeren Raum* (oder ein anderes durchsichtiges Medium), sondern *in eine Umgebung von merklich der ihrigen gleicher Natur* emittieren. Die Bestimmung dieser elementaren (inneren) Emission ist das Grundproblem, das gelöst sein muß, bevor an das eigentlich gestellte der Emission und Absorption eines inhomogenen Körpers gegangen werden kann.

Ich habe die bezüglichlichen allgemeinen Formeln in einer früheren Arbeit²⁾ für den Fall der Emission *normal zur Schicht*

1) W. Voigt, Physik. Zeitschr. 13. p. 848. 1912.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1911. p. 71; mit einem Nachtrag von H. A. Lorentz.

abgeleitet, und zwei meiner Schüler¹⁾ haben zur Erklärung bestimmter Beobachtungen spezielle Fälle der Konstitution der inhomogenen Schicht durchgerechnet. Hier will ich mich mit der analogen Aufgabe für den allgemeinen Fall *schiefer* Emission beschäftigen. Derselbe kann in ziemlicher Annäherung durch eine *lamellare* (gefärbte) Flamme bei schiefer Strahlungsrichtung realisiert werden; in minderguter, aber doch für manche Konsequenzen genügender, tritt er auch bei *runden* Flammen ein, nämlich hier für Strahlen, die nicht durch die Flammenachse gehen. Das Problem hat aber, wie sich zeigen wird, neben der praktischen auch eine gewisse prinzipielle Bedeutung. —

Bei den früheren, wie bei den jetzigen Betrachtungen wird das Emissionsvermögen einer Elementarschicht aus ihrem Absorptionsvermögen mit Hilfe des Kirchhoffschen Satzes abgeleitet. Dieser Satz ist bei reiner Temperaturstrahlung für Systeme homogener Körper als streng bewiesen anzusehen und darf sonach hier angewendet werden, soweit man die Elementarschicht als homogen betrachten, ihr nämlich diejenigen optischen Parameter beilegen darf, die einem homogenen Körper gleicher Konstitution zugehören würden. Letzteres ist bei den praktisch wichtigen Fällen in Annäherung immer erfüllt; es ist aber von Interesse zu betonen, daß bei sehr starkem lokalen Wechsel der Konstitution — nämlich dann, wenn dieser Wechsel auf Strecken von einer Wellenlänge merklich ist, — ein solches Verfahren unzulässig ist. Hier wird Lichtgeschwindigkeit und Absorption von dem bez. Änderungsgesetz und auch von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes abhängig. Der Kirchhoffsche Beweis seines Satzes ist m. E. bei inhomogenen Medien wesentlich daran gebunden, daß man jeder Stelle derselben für jede Farbe eine bestimmte Lichtgeschwindigkeit und Absorption zuordnen kann. Er versagt also, wenn dies nicht stattfindet, und ist im Grunde bei inhomogenen Medien stets nur ein angenäherter. Es hätte Interesse, Fälle aufzusuchen, wo die Prämissen so weit unerfüllt sind, daß die Beobachtung eventuelle Abweichungen von dem Satz nachzuweisen gestatten würde.

1) Hj. Brotherus, Diss. Helsingfors 1911; Ann. d. Phys. 38. p. 397. 1912; W. Wiechern, Diss. Göttingen 1912 (im Druck).

Das Absorptionsvermögen wird für die Elementarschichten durch die Betrachtung einfallender ebener homogener Wellen berechnet. Das mit Hilfe des Kirchhoffschen Satzes daraus bestimmte Emissionsvermögen bezieht sich somit zunächst gleichfalls auf solche; in der Tat werden an den Stellen der Entwicklung, wo die Emission zum Zwecke gewisser Folgerungen *direkt* untersucht wird, *ebene* Wellen aus den Schichten austretend angenommen. Aber nach Lage der Umstände darf man wohl die auf Grund solcher Annahmen gewonnenen Resultate als allgemein gültig ansehen. Eine wirkliche Inkohärenz der Schwingungen der einzelnen emittierenden Elemente (Elektronen) kann nicht stattfinden, denn eine solche würde jede Emission ausschließen. Es muß vielmehr — worauf auch andere Erwägungen führen — in einer ausgedehnten Lichtquelle eine gegenseitige Beeinflussung der emittierenden Elemente stattfinden, derart, daß ein von Volumenelement zu Volumenelement stetig wechselnder Emissionszustand entsteht, den man dann in ein System von ebenen Wellen von allen möglichen Orientierungen auflösen kann.

2. Die Betrachtungen knüpfen vielfach bequem an die Poyntingsche Energieströmung an, die mit $J(U, V, W)$ bezeichnet werden mag. Da der Emissionszustand der Elementarschichten zeitlich regellos wechselt, so können die Emissionen in den verschiedenen ebenen Wellen als voneinander unabhängig gelten, kann also einer jeden eine eigene (innere) Energieströmung J_i zugeordnet werden, die sich in die Umgebung hieraus fortpflanzt. Das einem J_i in der Umgebung der Schicht zugehörige J_a könnte dann eine Definition des Emissionsvermögens der Schicht in der Richtung von J_a bieten. Letzteres wäre hierbei *auf die Querschnittseinheit normal zu J_a* bezogen. Die Komponente von J_a normal zur Schicht, somit also W_a , falls die Schicht normal zur Z -Achse liegt, würde hingegen *das Emissionsvermögen der Einheit der Fläche der Schicht in der Richtung von J_a* darstellen.

Wenn eine Energieströmung nacheinander parallele homogene Schichten verschiedener Konstitution durchsetzt, und man in einer dieser Schichten (0) einen Stromfaden vom Querschnitt q_0 abgrenzt, so entsprechen ihm in den anderen Schichten (h) Querschnitte q_h , die von q_0 verschieden sind.

Bezeichnen ψ_0, ψ_h die Winkel der Stromrichtungen gegen die Normale auf den Schichten, so ist

$$\frac{q_0}{\cos \psi_0} = \frac{q_h}{\cos \psi_h}.$$

Hiernach sind die J in den verschiedenen Schichten nicht die einander im vorstehenden Sinne entsprechenden; denn einem $q_0 = 1$ entsprechen nicht die $q_h = 1$. Dagegen entsprechen einander die Komponenten W_0 und W_h , und dies legt nahe, *letztere* auch zu Definitionen der Emissionsvermögen zu benutzen. Wir wollen daher, wenn die Komponente W_a nur auf der Emission einer Schicht beruht,

$$W_a = E,$$

d. h. gleich dem Emissionsvermögen der Schicht in der Richtung von J_a setzen. Ist die Schicht absolut schwarz, eine schwarze Ebene, so wird

$$W_a = e$$

zu schreiben sein. Emittiert die schwarze Ebene in den leeren Raum, dann ist nach Kirchhoff e von der Richtung der Emission abhängig nach dem Gesetz

$$e = e_n \cos \varphi,$$

unter e_n die Emission in normaler Richtung, unter φ den Winkel gegen die Normale verstanden. In der Tat muß in diesem Falle J_a von der Richtung unabhängig sein, und W_a ist gleich $J_a \cos \varphi$. Ob gleiches auch gilt, wenn die Emission in einen absorbierenden Körper hineingeschießt, wird unten untersucht werden.

Im weiteren werden wir uns zunächst mit der Absorption und Emission einer einzelnen homogenen Schicht beschäftigen und erst danach zu der Untersuchung des Verhaltens eines geschichteten Körpers übergehen.

3. Wir schreiben die Grundformeln unter Annahme periodischer Schwingungen in gewohnter Weise

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, & \dot{\mathfrak{H}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

Dabei ist ε die komplexe (dynamische) Dielektrizitätskonstante,

$\mathfrak{E}(X, Y, Z)$ und $\mathfrak{H}(A, B, C)$ sind die elektrischen und magnetischen Feldstärken.

Für *homogene* ebene Wellen, die, wenn die Fortschreitung parallel $+z$ stattfindet, durch Lösungen vom Typ

$$(2) \quad e^{i\nu \left(t - \frac{z}{v}\right)}, \quad \frac{1}{v} = \frac{1 - i\kappa}{\omega}$$

gegeben werden, ist dann

$$(3) \quad \epsilon = \frac{c^2}{v^2} = n^2 = n^2(1 - \kappa^2 - 2i\kappa)^2;$$

v^2 bezeichnet die komplexe, ω die reelle (Haupt-)Geschwindigkeit, n den komplexen, n den reellen (Haupt-)Brechungsindex, κ den (Haupt-)Absorptionsindex.

Uns werden außer diesen homogenen Wellen, bei denen die Ebenen konstanter Phase und konstanter Amplitude einander parallel sind, noch solche *inhomogene* Wellen beschäftigen, bei denen die Ebenen konstanter Phase normal zur XZ -Ebene stehen, diejenigen konstanter Amplitude noch spezieller normal zur Z -Achse sind. Dieselben werden gegeben durch Lösungen von dem Typ

$$(4) \quad e^{i\nu \left(t - \frac{x a_1 + z c_1}{v_1}\right)}, \quad \frac{a_1}{v_1} = \frac{n_1 \alpha_1}{c}, \quad \frac{c_1}{v_1} = \frac{n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1)}{c},$$

wobei $a_1, 0, c_1$ die komplexen Richtungskosinus der Welle, $\alpha_1, 0, \gamma_1$ ($\alpha_1 = \sin \varphi_1, \gamma_1 = \cos \varphi_1$) die reellen Richtungskosinus der Normalen auf den Phasenebenen bezeichnen. n_1 und κ_1 sind (neue) Brechungs- und Absorptionsindizes. Es gilt dann

$$(5) \quad \epsilon = \frac{c^2}{v_1^2} = n_1^2 = n_1^2(1 - \kappa_1^2 - 2i\kappa_1\gamma_1),$$

somit also

$$(6) \quad v_1 = v, \quad n_1 = n, \quad n a_1 = n_1 \alpha_1, \quad n c_1 = n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1),$$

$$n^2(1 - \kappa^2) = n_1^2(1 - \kappa_1^2), \quad n^2\kappa = n_1^2\kappa_1\gamma_1,$$

woraus beiläufig

$$n^2(\gamma_1(1 - \kappa^2) + 2\kappa\kappa_1) = n_1^2(1 + \kappa_1^2)\gamma_1.$$

Die letzten beiden Gleichungen (6) gestatten für jede „Fortpflanzungsrichtung“ $\alpha_1, 0, \gamma_1$ die zugehörigen n_1, κ_1 durch die Hauptwerte n, κ auszudrücken.

4. Die Komponenten der Energieströmung U , W in der XZ -Ebene bei inhomogenen Wellen der vorausgesetzten Art sind gegeben durch

$$(7) \quad U = \frac{c}{4\pi} (CY - BZ), \quad W = \frac{c}{4\pi} (BX - AY).$$

Für die Ausrechnung sind dabei nur die reellen Teile $||_r$ der komplexen Ansätze für A, B, C, X, Y, Z zu benutzen. A, C, Y einerseits, X, Z, B andererseits sind dabei gekoppelt, die beiden Tripel aber voneinander unabhängig. Es gilt nämlich nach (1)

$$(8) \quad \begin{cases} A = -n c_1 Y, & n X = +c_1 B, \\ B = -n(\alpha_1 Z - c_1 X), & n Y = +\alpha_1 C - c_1 A, \\ C = +n \alpha_1 Y, & n Z = -\alpha_1 B, \\ 0 = \alpha_1 X + c_1 Z. & 0 = \alpha_1 A + c_1 C. \end{cases}$$

Für die durch Y charakterisierte Welle (s) wird somit

$$(9) \quad U_s = \frac{c}{4\pi} CY, \quad W_s = -\frac{c}{4\pi} AY.$$

Setzen wir

$$Y = Y_1 + i Y_2, \quad |Y|_r = Y_1,$$

so ist wegen

$$A = -n_1(\gamma_1 - i\kappa_1)Y, \quad C = n_1 \alpha_1 Y,$$

$$(10) \quad |A|_r = -n_1(\gamma_1 Y_1 + \kappa_1 Y_2), \quad |C|_r = n_1 \alpha_1 Y_1,$$

also

$$(11) \quad U_s = \frac{c}{4\pi} n_1 \alpha_1 Y_1^2, \quad W_s = -\frac{c}{4\pi} n_1(\gamma_1 Y_1 + \kappa_1 Y_2) Y_1.$$

Beobachtbar ist nur der zeitliche Mittelwert $\bar{U}$ und $\bar{W}$ von U und W , d. h., da dieser Mittelwert von $Y_1 Y_2$ verschwindet, und derjenige von Y_1^2 und Y_2^2 übereinstimmt,

$$(12) \quad \bar{U}_s = \frac{c}{4\pi} n_1 \alpha_1 \bar{Y}_1^2, \quad \bar{W}_s = -\frac{c}{4\pi} n_1 \gamma_1 \bar{Y}_1^2.$$

Für die betrachtete Komponente fällt also die Energieströmung in die Normale der Phasenebene, d. h. die sogenannte Wellennormale.

Für die durch X und Z charakterisierte Welle (p) ist

$$(13) \quad U_p = \frac{-c}{4\pi} BZ, \quad W_p = \frac{c}{4\pi} BX;$$

dabei kann nach (1³) gesetzt werden

$$(14) \quad X = c_1 P, \quad Z = -a_1 P,$$

und es bestimmt nun P die elektrische Schwingung in der XZ -Ebene. Aus (8²) folgt dann

$$(15) \quad B = n P.$$

Wir setzen nun

$$P = P_1 + i P_2$$

und haben dann

$$(16) \quad |B|_r = n(P_1 + \kappa P_2),$$

$$X = \frac{n c_1}{n} P = \frac{n_1 (\gamma_1 - i \kappa_1)}{n(1 - i \kappa)} (P_1 + i P_2),$$

$$(17) \quad |X|_r = \frac{n_1}{n(1 + \kappa^2)} ((\gamma_1 + \kappa \kappa_1) P_1 - (\kappa \gamma_1 - \kappa_1) P_2),$$

$$Z = -\frac{n a_1}{n} P = -\frac{n_1 \alpha_1}{n(1 - i \kappa)} (P_1 + i P_2),$$

$$(18) \quad |Z|_r = -\frac{n_1 \alpha_1}{n(1 + \kappa^2)} (P_1 - \kappa P_2).$$

Somit ergibt sich für die mittleren Strömungen

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{U}_p = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1 \alpha_1}{1 + \kappa^2} (\bar{P}_1^2 - \kappa^2 \bar{P}_2^2), \\ \bar{W}_p = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1}{1 + \kappa^2} ((\gamma_1 + \kappa \kappa_1) \bar{P}_1^2 - \kappa (\kappa \gamma_1 - \kappa_1) \bar{P}_2^2), \end{cases}$$

und, da $\bar{P}_1^2 = \bar{P}_2^2$, auch

$$(20) \quad \begin{cases} \bar{U}_p = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1 \alpha_1}{1 + \kappa^2} (1 - \kappa^2) \bar{P}_1^2, \\ \bar{W}_p = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1}{1 + \kappa^2} (\gamma_1 (1 - \kappa^2) + 2 \kappa \kappa_1) \bar{P}_1^2, \end{cases}$$

oder wegen der letzten Formel (6) auch

$$\bar{W}_p = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1^2 \gamma_1 (1 + \kappa_1^2)}{n^2 (1 + \kappa^2)} \bar{P}_1^2.$$

Hieraus ergibt sich (was noch nicht bemerkt zu sein scheint), daß die mittlere Energieströmung, die auf der elektrischen P -Komponente beruht, *nicht* in die sogenannte Wellennormale fällt. Das isotrope absorbierende Medium hat also für inhomogene Wellen des vorausgesetzten Typs bzw. der

zugehörigen Strahlen eine Art von Doppelbrechung. Dieselbe ist unmerklich, wenn

$$\frac{2 \kappa \kappa_1}{1 - \kappa^2}$$

neben γ_1 vernachlässigt werden kann. Dabei ist nach (6)

$$(21) \quad \frac{2 \kappa \kappa_1}{\gamma_1 (1 - \kappa^2)} = \sqrt{1 + \left(\frac{2 \kappa}{\gamma_1 (1 - \kappa^2)} \right)^2} - 1;$$

damit der Ausdruck links klein sei, muß gleiches von

$$\frac{2 \kappa}{\gamma_1 (1 - \kappa^2)}$$

gelten, es muß also κ klein neben γ_1 sein. Der fragliche Quotient wird sonach in dieser ersten Annäherung zu

$$\frac{2 \kappa \kappa_1}{\gamma_1} = \frac{2 \kappa^2}{\gamma_1^2},$$

woraus auch beiläufig

$$(22) \quad \kappa_1 = \frac{\kappa}{\gamma_1}.$$

Die Doppelbrechung ist unmerklich, wenn dasselbe von $2\kappa^2/\gamma_1^2$ neben Eins gilt.

5. Inhomogene ebene Wellen der oben vorausgesetzten Art entstehen bekanntlich, wenn das absorbierende Medium durch eine Ebene normal zur Z -Achse begrenzt ist, und dort im leeren Raum (oder in einem anderen durchsichtigen Medium) eine homogene ebene Welle mit der Normalen in der XZ -Ebene einfällt. Werden die Richtungskosinus der letzteren mit α , 0 , γ ($\alpha = \sin \varphi$, $\gamma = \cos \varphi$) bezeichnet, so ist dann

$$\frac{a_1}{v_1} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha}{c},$$

d. h.

$$(23) \quad n \alpha_1 = n_1 \alpha_1 = \alpha,$$

woraus folgt

$$(24) \quad n c_1 = n_1 (\gamma_1 - i \kappa_1) = \sqrt{n^2 - \alpha^2}.$$

Da n_1 selbst von der Richtung der gebrochenen Wellennormalen abhängt, so bestimmt die Formel $n_1 \alpha_1 = \alpha$ die gebrochene Welle völlig erst nach Einsetzen dieser Abhängigkeit. Man erhält letztere, indem man in die Beziehung (6¹) $n^2(1 - \kappa^2) = n_1^2(1 - \kappa_1^2)$ den in (21) enthaltenen Ausdruck für κ_1

einsetzt. Nun ist bis auf zweite Ordnung bzw. $\kappa/1$ gefunden $\kappa_1 = \kappa/\gamma_1$, somit ist bis auf vierte Ordnung

$$(25) \quad n_1^2 = \frac{n^2(1 - \kappa^2)}{1 - (\kappa/\gamma_1)^2} = n^2(1 + (\kappa\alpha_1/\gamma_1)^2).$$

Bei der p. 1388 oben diskutierten ersten Annäherung wäre in-
dessen einfach zu setzen

$$(26) \quad n_1 = n. \quad -$$

Wir müssen schließlich noch die Ausdrücke für die komplexen Schwächungskoeffizienten r und b der reflektierten und der eindringenden Welle aufstellen für den Fall des Einfalles oder des Austrittes einer homogenen Welle.

Für den *Eintritt* erhält man, wenn es sich um die elektrische Schwingung *normal* zur Einfallsebene handelt,

$$(27) \quad r_s = \frac{\gamma - n c_1}{\gamma + n c_1}, \quad b_s = \frac{2\gamma}{\gamma + n c_1},$$

wenn es sich um die *parallele* handelt,

$$(28) \quad r_p = \frac{n\gamma - c_1}{n\gamma + c_1}, \quad b_p = \frac{2\gamma}{n\gamma + c_1}.$$

Für den *Austritt* gilt analog

$$(29) \quad r'_s = \frac{n c_1 - \gamma}{n c_1 + \gamma}, \quad b'_s = \frac{2 n c_1}{n c_1 + \gamma}.$$

$$(30) \quad r'_p = \frac{c_1 - n\gamma}{c_1 + n\gamma}, \quad b'_p = \frac{2 n c_1}{n\gamma + c_1}.$$

6. Wir bezeichnen das Emissions- und das Absorptionsvermögen einer homogenen dünnen Schicht eines absorbierenden Mediums innerhalb des leeren Raumes mit E und A , setzen also nach p. 1384

$$(31) \quad \frac{E}{A} = e = e_n \gamma.$$

Dabei ist A durch die einfallende, reflektierte und hindurchgehende Intensität definiert gemäß

$$(32) \quad A = \frac{J_e - J_r - J_d}{J_e}.$$

A , E und e beziehen sich nach p. 1384 auf die Flächeneinheit der emittierenden Schicht.

Da diese Intensitäten sämtlich in demselben Medium gemessen werden, kann man sie durch die Quadrate der Ab-

solutwerte der bezüglichen komplexen elektrischen oder auch magnetischen Amplituden E , R , D ersetzen und schreiben

$$(33) \quad A = \frac{|E|^2 - |R|^2 - |D|^2}{|E|^2}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$(34) \quad \begin{cases} R = -\frac{E}{N} \left(p - \frac{1}{p} \right) \mathfrak{S} \sin q, & D = \frac{2E}{N}, \\ N = 2 \mathfrak{C} \cos q + \left(p + \frac{1}{p} \right) \mathfrak{S} \sin q, \end{cases}$$

wobei

$$q = \frac{i \nu c_1 l}{v} = i n c_1 L, \quad L = 2 \pi l / \lambda,$$

unter l die Schichtdicke verstanden; ferner für die Y -Schwingung (s)

$$(35) \quad p_s = n c_1 / \gamma,$$

für die B -Schwingung (p)

$$(36) \quad p_p = c_1 / n \gamma.$$

Bei unendlich kleiner Schichtdicke wird

$$\mathfrak{C} \cos q = 1, \quad \mathfrak{S} \sin q = q,$$

und zugleich R von erster Ordnung, so daß es bei der Berechnung von A ausfällt.

Aus

$$D = \frac{2E}{2 + \left(p + \frac{1}{p} \right) q} (=) E \left(1 - \frac{1}{2} q \left(p + \frac{1}{p} \right) \right)$$

folgt aber, falls q' , p' die zu q und p konjugierten Größen bezeichnen,

$$(37) \quad A = \frac{1}{2} \left(q \left(p + \frac{1}{p} \right) + q' \left(p' + \frac{1}{p'} \right) \right).$$

Nun ist unter Rücksicht auf

$$n = n(1 - i\kappa), \quad n c_1 = n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1)$$

$$q = i n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1) L,$$

$$p_s = n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1) / \gamma,$$

$$p_p = n_1 (\gamma_1 - i\kappa_1) / n^2 \gamma (1 - i\kappa)^2,$$

also ergibt sich

$$(38) \quad \begin{cases} A_s = \frac{2 n^2 \kappa L}{\gamma}, \\ A_p = \frac{2 n^2 \kappa L}{\gamma} \left(\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{n^4 (1 + \kappa^2)^2} \right). \end{cases}$$

Und hieraus folgt schließlich für die Emission von elektrischen Schwingungen senkrecht (s) und parallel (p) zur XZ -Ebene in der durch $(\alpha, 0, \gamma)$ gegebenen Richtung:

$$(39) \quad E_s = 2 n^2 \kappa L e_n, \quad E_p = 2 n^2 \kappa L e_n \left(\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{n^4 (1 + \kappa^2)^2} \right).$$

Für die Emission in der Richtung normal zur Schicht liefern beide Ausdrücke¹⁾

$$(40) \quad E_s = 2 n^2 \kappa L e_n.$$

Da E_s von E_p verschieden ist, emittiert die Schicht *teilweis polarisierte* Wellen. Kürzt man ab

$$n^4 (1 + \kappa^2)^2 = m,$$

so ist

$$E_p \geq E_s \text{ je nachdem } \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{m} \geq 1,$$

d. h.

$$(41) \quad 1 \geq m.$$

Läßt man κ^2 neben Eins fort, so gibt diese Ungleichung

$$1 \geq n;$$

da nun für Medien mit isolierten Absorptionsstreifen $n - 1$ beiderseits jedes Absorptionsmaximum ein verschiedenes Vorzeichen hat, so müßte auch die emittierte Strahlung beiderseits einen verschieden polarisierten Anteil enthalten. Eine Beobachtung unter den vorstehend vorausgesetzten Verhältnissen einer dünnen, beiderseits scharf begrenzten Schicht dürfte indessen unmöglich sein.

7. Im vorstehenden ist angenommen worden, daß die Schicht in den leeren Raum strahlt. Uns interessiert aber nach § 1 besonders der Fall einer Emission in einer Umgebung von mit der Schicht merklich gleichartiger Natur, da wir die Emission inhomogener Schichten aus derjenigen homogener Elementarschichten aufbauen wollen. Nun läßt sich

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1911. p. 73.

hier das (innere) Absorptionsvermögen A' für die Richtung $(\alpha_1, 0, \gamma_1)$ sogleich hinschreiben. Da nämlich die Reflexion jetzt ausfällt, ist das Absorptionsvermögen gegeben durch

$$A' = 1 - \left| e^{-\frac{i \nu l c_1}{v_1}} \right|^2 = 1 - e^{-2 n_1 \kappa_1 L},$$

d. h. bei unendlich kleinerem l durch

$$(42) \quad A' = 2 n_1 \kappa_1 L.$$

Dieser Ausdruck ist nicht von der Schwingungsrichtung, wohl aber von der Fortpflanzungsrichtung der Wellen abhängig, da Gleiches von $n_1 \kappa_1$ gilt. In der ersten Annäherung gibt sich

$$A' = \frac{2 n \kappa L}{\gamma}.$$

In der Richtung normal zur Schicht gilt streng

$$(43) \quad A_0' = 2 n \kappa L.$$

Für das (innere) Emissionsvermögen E' würde bei (vielleicht etwas hypothetischer) Übertragung des Kirchhoffschen Satzes auf den vorliegenden Fall aus (42) folgen

$$(44) \quad E_s' = 2 n_1 \kappa_1 L e_s', \quad E_p' = 2 n_1 \kappa_1 L e_p',$$

worin e_s' und e_p' die bez. Emissionsvermögen des schwarzen Körpers gegen das absorbierende Medium bezeichnen. Aber diese e' sind zunächst unbekannt. Um zu ihrer Bestimmung zu gelangen, müssen wir den Vorgang der Emission in den beiden vorstehend erörterten Fällen, wo die Schicht entweder vom leeren Raum oder vom gleichartigen Medium umgeben ist, etwas näher untersuchen.

Fig. 1.

Wir betrachten zunächst die Emission der elektrischen Y -Komponente, von der wir annehmen dürfen, daß sie aus dem Inneren

der Schicht nach beiden Seiten hin in gleicher Weise stattfindet (Fig. 1). Bezeichnen wir die im Innern emittierte Komponente mit Y_i , so tritt unter Berücksichtigung der Reflexionen und bei

Benutzung der Bezeichnungen (29) von der nach der Seite (1) gehenden Strahlung ebenda aus

$$Y_i b_s' (1 + r_s'^2 + r_s'^4 + \dots) = Y_i b_s' / (1 - r_s'^2),$$

von der nach der Seite (2) gehenden aber auf Seite (1)

$$Y_i b_s' r_s' (1 + r_s'^2 + r_s'^4 + \dots) = Y_s b_s' r_s' / (1 - r_s'^2).$$

Dabei ist wegen der unendlich geringen Dicke der Schicht die Verzögerung und Absorption innerhalb derselben ignoriert.

Die ganze austretende Schwingung ist hiernach

$$Y_a = Y_i \frac{b_s'}{1 - r_s'^2} = Y_i \frac{\pi c_1}{\gamma}.$$

Nun ist die Energieströmung $\parallel Z$ im Außenraum

$$W_a = \frac{c}{4\pi} |\overline{Y_a}|^2 = E_s,$$

die in der Schicht bzw. die aus ihr in eine gleichartige Umgebung austretende Energieströmung aber

$$W_i = \frac{c}{4\pi} n_1 \gamma_1 |\overline{Y_i}|^2 = E_s'.$$

Setzt man also $Y_i = Y_1 + i Y_2$, und demnach

$$Y_a = \frac{n_1 (\gamma_1 - i \alpha_1)}{\gamma} (Y_1 + i Y_2),$$

so wird

$$|Y_i|_r = Y_1, \quad |Y_a|_r = \frac{n_1}{\gamma} (\gamma_1 Y_1 + \alpha_1 Y_2),$$

und da $\overline{Y_1 Y_2} = 0$, $\overline{Y_1^2} = \overline{Y_2^2}$, auch

$$(45) \quad E_s = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1^2}{\gamma} (\gamma_1^2 + \alpha_1^2) \overline{Y_1^2}, \quad E_s' = \frac{c}{4\pi} n_1 \gamma_1 \overline{Y_1^2}.$$

Hieraus folgt:

$$(46) \quad E_s' = \frac{E_s \gamma \gamma_1}{n_1 (\gamma_1^2 + \alpha_1^2)}.$$

Dabei ist daran zu erinnern, daß E_s' und E_s sich nicht auf dieselbe Richtung innerhalb und außerhalb der Schicht beziehen, sondern auf zwei durch das Brechungsgesetz verknüpfte.

Bei Heranziehung der Ausdrücke (39¹) und (44¹) für E_s und E_s' erhält man zugleich für die Emission der schwarzen Ebene innerhalb des absorbierenden Körpers wegen $n^2 \kappa = n_1^2 \alpha_1 \gamma_1$:

$$(47) \quad e_s' = \frac{\gamma \gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \alpha_1^2} e_n.$$

8. Bezüglich der Emission der zur XZ -Ebene parallelen elektrischen Komponente liegen die Verhältnisse etwas komplizierter, weil in diesem Falle die Emission derselben Schwingung nach den beiden Seiten (1) und (2) der Schicht nicht in gleicher Weise stattfinden kann. Um die hier stattfindenden Vorgänge zu übersehen, beachten wir, daß in der Richtung (1) $(\alpha_1, 0, \gamma_1)$ sich nach (14) Schwingungen mit den Komponenten

$$X = c_1 P, \quad Z = -a_1 P$$

fortpflanzen, die dazu (komplex-) normalen

$$X' = a_1 P', \quad Z' = c_1 P'$$

aber nicht.

Eine geradlinige Schwingung in einer Richtung $(a, 0, c)$ mit den Komponenten

$$X^0 = a Q_i, \quad Z^0 = c Q_i,$$

die zu irgend einem Moment emittierend wirkt, gibt also eine nach $(\alpha_1, 0, \gamma_1)$ sich fortpflanzende Komponente P_i , bestimmt durch

$$a Q_i = c_1 P_i + a_1 P'_i,$$

$$c Q_i = -a_1 P_i + c_1 P'_i,$$

d. h.

$$(48) \quad P_i = Q_i (a c_1 - c a_1).$$

Nach der Richtung (2) $(\alpha_1, 0, -\gamma_1)$ dagegen pflanzt sich fort

$$X = -c_1 P, \quad Z = -a_1 P,$$

während unwirksam ist

$$X' = -a_1 P', \quad Z = c_1 P'.$$

Der wirksame Teil P folgt hier aus

$$a Q_i = -c_1 P_i - a_1 P'_i,$$

$$c Q_i = -a_1 P_i + c_1 P'_i$$

zu

$$(49) \quad P_i = -Q_i (a c_1 + c a_1).$$

Der erstere Teil gibt austretend bei zu § 7 analoger Berechnung

$$\frac{Q_i (a c_1 - c a_1) \mathfrak{d}_p'}{1 - \tau_p'^2},$$

der zweite Teil

$$\frac{-Q_i (a c_1 + c a_1) \mathfrak{d}_p' \tau_p'}{1 - \tau_p'^2}.$$

Die ganze austretende Schwingung wird also gegeben sein durch

$$(50) \quad P_a = Q_i b_p' \left(\frac{a c_1}{1 + r_p'} - \frac{c a_1}{1 - r_p'} \right),$$

d. h. bei Benutzung der Werte (30) durch

$$(51) \quad P_a = Q_i (n a \gamma - c a_1) \frac{c_1}{\gamma} = Q_i \left(a \gamma - \frac{c a}{n^2} \right) \frac{n c_1}{\gamma}.$$

Nun sei $Q_i = Q_1 + i Q_2$, also die nach der Richtung (1) emittierende Komponente

$$P_i = (a c_1 - c a_1) (Q_1 + i Q_2)$$

und

$$(52) \quad |P_i|_r = \frac{(a n_1 (\gamma_1 + \kappa \kappa_1) - c a) Q_1 + (a n_1 (\kappa_1 - \kappa \gamma_1) + c a \kappa) Q_2}{n (1 + \kappa^2)}.$$

Hieraus ergibt sich der Mittelwert $\overline{|P_i|_r^2}$ für alle Zeiten und alle Richtungen $(a, 0, c)$ der emittierenden Schwingung Q_i

$$(53) \quad \overline{|P_i|_r^2} = \frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2)}{2 n^2 (1 + \kappa^2)} \cdot \overline{Q_1^2}.$$

Analog wird bei $A = c a / n^2 (1 + \kappa^2)^2$

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} |P_a|_r &= \frac{n_1}{\gamma} \left\{ [(a \gamma - A (1 - \kappa^2)) \gamma_1 - 2 A \kappa \kappa_1] Q_1 \right. \\ &\quad \left. + [(a \gamma - A (1 - \kappa^2)) \kappa_1 + 2 A \kappa \gamma_1] Q_2 \right\}, \end{aligned} \right.$$

also

$$(55) \quad \overline{|P_a|_r^2} = \frac{n_1^2}{2 \gamma^2} \left(\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{n^4 (1 + \kappa^2)^2} \right) (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \overline{Q_1^2}.$$

Hieraus folgt dann

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{W}_a &= \frac{c}{4 \pi} \frac{n_1^2}{2 \gamma} \left(\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{n^4 (1 + \kappa^2)^2} \right) (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \overline{Q_1^2} = E_p, \\ \overline{W}_i &= \frac{c}{4 \pi} \frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2)^2}{2 n^4 (1 + \kappa^2)^2} \overline{Q_1^2} = E_p' \end{aligned} \right.$$

und

$$(57) \quad E_p' = \frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2)^2 \gamma \gamma_1}{n^4 (1 + \kappa^2)^2 (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \left(\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{n^4 (1 + \kappa^2)^2} \right)} E_p.$$

Verbindet man hiermit die Ausdrücke (39²) und (44²) für E_p und E_p' , so gelangt man nach einfacher Reduktion zu

$$(58) \quad e_p' = \left(\frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2) \gamma_1}{n^2 (1 + \kappa^2)} \right)^2 \frac{\gamma e_n}{\gamma_1^2 + \kappa_1^2} = \left(\frac{1 + \kappa_1^2}{1 - \kappa_1^2} \cdot \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \right)^2 \frac{\gamma \gamma_1^2 e_n}{\gamma_1^2 + \kappa_1^2}.$$

9. Wir wollen die vorstehend bezüglich e_s' und e_p' erhaltenen Resultate verifizieren, indem wir dabei eine Anordnung benutzen, die Hr. H. A. Lorentz¹⁾ in dem speziellen Falle einer zur schwarzen Ebene normalen Strahlung ähnlich angewendet hat. Es seien (1) und (2) (Fig. 2) zwei einander zugewendete schwarze Ebenen, und (1) sei mit einer so dünnen

Fig. 2.

Schicht des absorbierenden Mediums überzogen, daß von deren Emission und Absorption *abgesehen* werden kann. Im Gleichgewichtszustand muß (1) von (2) im ganzen ebensoviel Energie erhalten, wie (2) von (1). Wir werden zeigen, daß nach unseren Formeln die bez. Gleichheit stattfindet für die Strahlung jeder Richtung, jeder Farbe und sowohl für den parallel als für den normal zur Einfallsebene polarisierten Anteil. Damit ist dann die Gleichheit der Gesamtenergien erwiesen.

Wir können bei der Rechnung an die Formeln (12) und (20) für die W -Komponente der Energieströmung anknüpfen und dabei benutzen, daß, wenn $Q_1 + iQ_2$ eine komplexe Schwingungskomponente darstellt (wenn also $\overline{Q_1^2} = \overline{Q_2^2}$), dann der Mittelwert von

$$|(a + ib)(c + id)(Q_1 + iQ_2)|^2$$

gegeben ist durch

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)Q_1^2.$$

Emittiert die Ebene (1) in einer Richtung $(\alpha_1, 0, \gamma_1)$ die Komponente Y' , die Ebene (2) in der korrespondierenden Richtung $(\alpha, 0, \gamma)$ aber Y , dann verlangt der obige Gedankengang, daß nach den Beziehungen (27) und (29)

$$(59) \quad \gamma |\overline{b_s' Y'}|^2 = n_1 \gamma_1 |\overline{b_s Y}|^2.$$

Da nun b_s' sich nur durch den komplexen Faktor $n c_1 / \gamma$ von b_s unterscheidet, so ergibt sich aus (59) unmittelbar

$$(60) \quad n_1 (\gamma_1^2 + \alpha_1^2) \overline{Y_1'^2} = \gamma_1 \gamma \overline{Y_1^2}.$$

1) H. A. Lorentz, Gött. Nachr. p. 94. 1911.

Nun ist aber für die betrachtete Strahlung gleichzeitig nach der Definition von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{e}'$ und gemäß (12²)

$$\mathbf{e}_s' = \frac{c n_1 \gamma_1}{4\pi} \overline{Y_1'^2}, \quad \mathbf{e}_s = \gamma \mathbf{e}_n = \frac{c \gamma}{4\pi} \overline{Y_1^2},$$

somit findet sich

$$(61) \quad (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \mathbf{e}_s' = \gamma \gamma_1^2 \mathbf{e}_n.$$

Für die P -Komponenten ergeben sich die analogen Formeln

$$(62) \quad \begin{cases} \gamma |\overline{\mathbf{d}_p' P'}|^2 = \frac{n_1}{1 + \kappa^2} (\gamma_1 (1 - \kappa^2) + 2 \kappa \kappa_1) |\overline{\mathbf{d}_p P}|^2 \\ \quad = \frac{n_1^3 (1 + \kappa_1^2) \gamma_1}{n^2 (1 + \kappa^2)} |\overline{\mathbf{d}_p P}|^2 \end{cases}$$

und

$$(63) \quad \begin{cases} n_1 (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \overline{P_1'^2} = \frac{\gamma}{1 + \kappa^2} (\gamma_1 (1 - \kappa^2) + 2 \kappa \kappa_1) \overline{P_1^2} \\ \quad = \frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2) \gamma \gamma_1}{1 + \kappa^2} \overline{P_1^2}. \end{cases}$$

Ferner gilt nach der Bedeutung der P gemäß (20²)

$$\mathbf{e}_p' = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1}{1 + \kappa^2} (\gamma_1 (1 - \kappa^2) + 2 \kappa \kappa_1) \overline{P_1'^2} = \frac{c}{4\pi} \frac{n_1^3 (1 + \kappa_1^2) \gamma_1}{n^2 (1 + \kappa^2)} \overline{P_1'^2},$$

$$\mathbf{e}_p = \gamma \mathbf{e}_n = \frac{c \gamma}{4\pi} \overline{P_1^2},$$

und hieraus folgt

$$(64) \quad \begin{cases} (\gamma_1^2 + \kappa_1^2) \mathbf{e}_p' = \left(\frac{\gamma_1 (1 - \kappa^2) + 2 \kappa \kappa_1}{1 + \kappa^2} \right)^2 \gamma \mathbf{e}_n \\ \quad = \left(\frac{n_1^2 (1 + \kappa_1^2) \gamma_1}{n^2 (1 + \kappa^2)} \right)^2 \gamma \mathbf{e}_n. \end{cases}$$

Die Formeln (61) und (64) sind mit (47) und (59) identisch, womit denn die beabsichtigte Verifikation ausgeführt ist.

Die Werte $\mathbf{e}_s'$ und $\mathbf{e}_p'$ geben zu folgenden Bemerkungen Veranlassung.

Eine schwarze Ebene emittiert in ein angrenzendes absorbierendes Medium partiell polarisierte Strahlung, denn $\mathbf{e}_s'$ und $\mathbf{e}_p'$ sind im allgemeinen verschieden. Der polarisierte Anteil schwingt (elektrisch) normal zu der Normalebene durch die Austrittsrichtung und ist bei mäßiger Absorption sehr gering, so daß sein direkter Nachweis nicht möglich sein dürfte. Er verschwindet mit der Absorption; für durchsichtige Medien wird nämlich

$$(65) \quad \mathbf{e}_s' = \mathbf{e}_p' = \mathbf{e}'.$$

In dieser Formel liegt kein Widerspruch zu dem bekannten Kirchhoffschen Resultat über Emission schwarzer Körper in eine Umgebung von einem Brechungsindex $n > 1$, weil letzteres sich nicht auf ebene, sondern auf Kugelwellen bezieht und wesentlich beruht auf der Veränderung der Öffnung eines Strahlenkegels beim Hindurchtritt durch eine brechende Grenzfläche.

Für Emission in der Richtung normal zur schwarzen Ebene liefert (61) und (64) übereinstimmend¹⁾

$$(66) \quad e'_s = e'_p = e'_n = \frac{e_n}{1 + \kappa^2}.$$

Schließlich ergeben sich für die Emissionen der Flächeneinheit der unendlich dünnen Schicht in eine gleichartige Umgebung die Formen nach (44) und (61) bzw. (64)

$$(67) \quad E'_s = \frac{4 \pi n^2 \kappa \gamma \gamma_1 l e_n}{\lambda n_1 (\gamma_1^2 + \kappa_1^2)},$$

$$(68) \quad E'_p = \frac{4 \pi n_1^3 \kappa (1 + \kappa_1^2)^2 \gamma \gamma_1 l e_n}{\lambda n^2 (1 + \kappa^2)^2 (\gamma_1^2 + \kappa_1^2)}.$$

Diese Formeln sind als *streng* innerhalb der in § 1 festgelegten Grenzen zu betrachten; sie setzen nur voraus, daß der Schicht charakteristische Parameter n und κ beigelegt werden können. Sie geben zu ähnlichen Bemerkungen Veranlassung, wie die Ausdrücke (61) und (64) für e'_s und e'_p . Die Strahlung der Schicht ist partiell polarisiert, mit selbstverständlicher alleiniger Ausnahme des Falles der normalen Richtung, wo die beiden Formeln übergehen in

$$(69) \quad E' = \frac{4 \pi n \kappa l e_n}{\lambda (1 + \kappa^2)}.$$

10. Um nun die Emission und Absorption geschichteter stetiger Körper mit Hilfe der vorstehenden Ergebnisse zu berechnen, haben wir diese Körper in homogene Schichten zu zerlegen und auf letztere die obigen Resultate anzuwenden. Daß ein solches Verfahren nicht auf eine beliebig schnell variierende Konstitution anwendbar ist, findet sich in § 1 auseinanderzusetzen. In den Fällen, mit denen wir uns hier zunächst allein beschäftigen, wo von Reflexionen abgesehen werden

1) W. Voigt, Gött. Nachr. p. 75. 1911.

darf, ist dasselbe aber unbedenklich; denn hier muß die lokale Variation klein sein.

Bis zu welcher Annäherung bei inhomogenen Medien die Reflexionen vernachlässigt werden dürfen, ist übrigens nicht so leicht zu beurteilen. Ich habe an anderer Stelle¹⁾ eine Untersuchung darüber mitgeteilt, welche die Reflexion an einem nach einem bestimmten Gesetz stetig in den leeren Raum übergehenden Körper bis auf Glieder erster Ordnung inklusive bezüglich $(n-1)$ und κ neben Eins betrifft. Die reflektierte Intensität ergibt sich dann mit $(\lambda/8l)^4 [(n-1)^2 + \kappa^2]$ proportional, wobei l die Dicke der Schicht ist, innerhalb deren die Werte n und κ von 1 und 0 erreicht werden. Hiernach möchte man vermuten, daß stets, wenn die Änderung der Konstitution auf dem Bereich einer Wellenlänge unmerklich ist, die Reflexionen vernachlässigt werden können. Indessen liegen die Dinge anscheinend nicht so einfach; dies wird unten hervortreten.

Wir wollen jetzt aber annehmen, die Reflexionen dürften vernachlässigt werden.

Erstreckt sich der geschichtete Körper über $0 < z < D$, und gibt eine Schicht an der Stelle z die Emission dE' — wobei je nach der betrachteten Schwingung dE'_s oder dE'_p unter dE' zu verstehen ist —, so liefert diese Schicht, auf der $+z$ -Seite austretend, die Emission

$$d(E) = dE' e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \int_z^D n_1 \kappa_1 dz}.$$

Die Gesamtemission der Flächeneinheit der Schicht bestimmt sich hiernach, da die Emissionen der Elementarschichten als inkohärent gelten dürfen, zu

$$(70) \quad (E) = \int_0^D dE' e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \int_z^D n_1 \kappa_1 dz}.$$

Die Ausdrücke für dE' werden dabei erhalten, indem man in (67) und (68) l mit dz vertauscht.

1) W. Voigt, Physik. Zeitschr. 13. p. 848. 1912.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall der Strahlung *normal zur Schicht* und haben danach (69)

$$(71) \quad (E) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^D \frac{e_n n x dx}{1+x^2} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \int_z^D n x dz}.$$

Hr. Lorentz¹⁾ hat darauf aufmerksam gemacht, daß man die Formel (66) verifizieren kann, indem man diese Gleichung auf das Innere eines nach einer Seite unendlich ausgedehnten homogenen und homogen temperierten Körpers anwendet, in dem ja *jedenfalls* keine Reflexionen stattfinden. Denkt man den Körper nach der negativen Seite ∞ , nach der positiven beliebig ausgedehnt und berechnet obiges Integral für $-\infty < z < 0$, so gibt dasselbe die Emission des negativen Halbraumes in das übrige homogene Medium. Da dieser Halbraum weder reflektiert noch durchläßt, so muß er schwarze Strahlung liefern, und in der Tat gibt (71) in diesem Fall

$$(E) = \frac{e_n}{1+x^2} = e_n'$$

in Übereinstimmung mit (66).

Nun ist es aber sehr auffallend, daß sich nicht dasselbe Resultat ergibt, wenn man den Halbraum nach einem beliebigen Gesetze *beliebig langsam wechselnd konstituiert*, übrigens homogen temperiert annimmt. Man sollte erwarten, daß dann $(E) = e_n / (1+x_0^2)$ resultierte, wobei x_0 sich auf $z=0$ bezieht. Dies ist aber ersichtlich nicht der Fall.

Um diese eigentümliche Schwierigkeit²⁾ zu heben, bleibt m. E. nichts anderes übrig, als die Annahme, daß stetig und zwar beliebig langsam mit z variierende Körper in unendlich dicken Schichten schwarze Strahlung nur dann geben, wenn die in ihnen herrschenden x entweder konstant sind, oder aber allenthalben so klein, daß x^2 neben Eins vernachlässigt werden

1) H. A. Lorentz, Gött. Nachr. p. 94. 1911. Die obigen Bemerkungen lassen sich ebenso auch an die *allgemeine* Formel (70) betreffend der Gesetze (47) und (58) anknüpfen.

2) Hr. H. A. Lorentz macht l. c. p. 96 auf eine verwandte Schwierigkeit aufmerksam; obige Formulierung scheint mir noch drastischer.

kann. Ein physikalischer Grund hierfür ist mit voller Sicherheit noch nicht angebbar. Wendet man die Formeln des § 6 an, so würde hier, wo $J_a = 0$ ist, unabhängig von dem Wert (71) von (E) gelten

$$(E) = \left(1 - \frac{J_r}{J_s}\right) e_n' = \left(1 - \frac{J_r}{J_s}\right) \frac{e_n}{1 + \kappa_0^2}.$$

Eine Abweichung zwischen (E) und $e_n/(1 + \kappa_0^2)$ wäre also zunächst auf Reflexionen im Innern des inhomogenen Mediums zu deuten.¹⁾ Indessen ist hiermit nicht recht vereinbar, daß nicht eine Veränderlichkeit von n , sondern nur eine solche von κ den Widerspruch liefert. Auch kann ersichtlicherweise der Wert (71) je nach Umständen $(E) \geq e_n'$ geben, während die letzte Formel $(E) < e_n'$ verlangt. Es muß also entweder auch bei beliebig langsamer Veränderlichkeit von κ allein die Berücksichtigung der Reflexion jenes $(E) > e_n'$ in $(E) < e_n'$ korrigieren, oder es muß noch ein anderer Umstand vorliegen, etwa der, daß der Aufbau eines inhomogenen Mediums aus homogenen Elementarschichten eine Annäherung darstellt, die unter Umständen unzulässig wird.

Diese prinzipielle Schwierigkeit hat übrigens bisher kaum praktische Bedeutung, weil bei den uns interessierenden Fällen κ stets so klein ist, daß κ^2 neben Eins (und auch κ_1^2 neben γ_1^2) fortbleiben kann. *Wir wollen diese Verfügung nunmehr treffen.*

Infolge derselben vereinfachen sich die Ausdrücke beträchtlich. Man kann n_1 mit n , κ_1 mit κ/γ_1 vertauschen, es wird

$$dE' = dE_s' = dE_p' = \frac{4\pi n \kappa \gamma e_n dz}{\lambda \gamma_1}, \quad \text{wobei} \quad n \gamma_1 = \sqrt{n^2 - \alpha^2},$$

und

$$(72) \quad (E) = \frac{4\pi\gamma}{\lambda} \int_0^D \frac{n \kappa e_n dz}{\gamma_1} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \int_z^D \frac{n \kappa dz}{\gamma_1}}$$

Diese Formel betrachten wir als definitive. In ihr bezeichnet (E) die Emission der Flächeneinheit des geschichtet inhomogenen Körpers innerhalb des leeren Raumes in einer schiefen Richtung φ gegen die Normale ($\alpha = \sin \varphi$, $\gamma = \cos \varphi$). $(E)/\gamma$ würde die Emission innerhalb eines Strahlenbündels

1) Dieses nimmt Hr. Lorentz an l. c. p. 96.

vom Querschnitt Eins (d. h. J_a in § 1) darstellen. e_n ist die Emission der Flächeneinheit der schwarzen Ebene in normaler Richtung bei der Temperatur, die in der Ebene z herrscht; n und κ sind die Parameter des Körpers in der Ebene z .

Die Temperatur tritt in der Formel nicht explizit auf. Es ist z. B. irrelevant, ob die Veränderlichkeit von n und κ mit z auf der Temperatur oder der Konstitution beruht. Aber e_n ist Funktion der Temperatur allein und vertritt diese gewissermaßen in dem Ausdruck.

Die Schiefe der Emissionsrichtung gegen die Normale auf der Schicht macht sich nur in dem γ und γ_1 geltend, die bei normaler Emission gleich Eins werden. Bei wenig von Eins verschiedenem n sind auch γ und γ_1 nahe einander gleich. In diesem Falle übt die Schiefe der Emission ihre hauptsächlichste Wirkung im Exponenten, d. h. in dem Absorptions-, nicht in dem Emissionsglied.

11. Spezielle Anwendungen der Formel (72) setzen spezielle Verfügungen über den Zusammenhang von n , κ und e_n mit z voraus, die stets einigermaßen willkürlich sein werden. Übrigens führen auch die einfachsten, durch die man das Verhalten wirklicher Flammen aproximieren möchte, meist nicht zu vollständig integrablen Ausdrücken. Es stehen den Anwendungen also beträchtliche Schwierigkeiten entgegen.

Wir wollen zunächst e_n , d. h. also die Temperatur (wenigstens innerhalb der merklich emittierenden und absorbierenden Teile der Flamme) *konstant* annehmen. Diese Annahme führt in der Tat auf ein bemerkenswert einfaches Resultat; denn die Formel (72) gewinnt jetzt die Gestalt

$$(73) \quad (E) = \gamma e_n \cdot e^{-\int_0^D Z dz} \cdot \int_0^D Z dz e^{\int_0^z Z dz}, \quad Z = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{n^2 \kappa}{\sqrt{n^2 - \kappa^2}},$$

und dies ist ersichtlich

$$(74) \quad (E) = \gamma e_n \left(1 - e^{-\int_0^D Z dz} \right),$$

so daß jetzt die ganze Rechnung auf eine Quadratur zurückgeführt ist.

Es sei hervorgehoben, daß diese Formel für eine beliebig dicke inhomogene, aber gleich temperierte Schicht dem Gesetz $(E)/(A) = e$ entspricht, denn es ist $\gamma e_n = e$ und die Klammer, da von Reflexionen abgesehen wird, in der eingeführten Annäherung $= (A)$.

Man erkennt leicht, daß dieser Ausdruck für (E) die *Selbstumkehrung* einer Spektrallinie nicht zuläßt, denn für diejenige Farbe, für welche die Absorption am größten ist, ergibt sich bei ihm (näherungsweise) auch der Exponent im zweiten Klammernglied am kleinsten, somit die Emission am größten. *Die Veränderlichkeit der Temperatur innerhalb der Lichtquelle ist also die Vorbedingung für die Selbstumkehrung*, und es ist nicht ohne Interesse, wie dies Resultat sich hier durch die Theorie ergibt.

Leicht Selbstumkehrung werden danach in einer inhomogen temperierten Flamme solche Spektrallinien besitzen, die auch von den kühleren Teilen merklich absorbiert und emittiert werden. Denn wenn in diesen Teilen $n\kappa$ sehr klein ist, so wird in Annäherung die Formel (74) Gültigkeit besitzen.

Behält man die Veränderlichkeit von e_n bei und setzt

$$(75) \quad \int_0^z Z dz = \zeta, \quad Z dz = d\zeta, \quad \int_0^D Z dz = Z,$$

so liefert (72)

$$(76) \quad (E) = \gamma e^{-z} \int_0^z e_n e^{\zeta} d\zeta;$$

es liegt nahe, da ζ und e_n Funktionen von z sind, e_n als Funktion von ζ zu betrachten. Nimmt man e_n an den Grenzen der Flamme als verschwindend an, so ist der einfachste Ansatz dafür

$$(77) \quad e_n = k \zeta (Z - \zeta).$$

Ist die Flamme symmetrisch in bezug auf die Mitte, so ist für $z = \frac{1}{2} D$ auch $\zeta = \frac{1}{2} Z$ und, wenn man dort $e_n = e_0$ setzt, so ist

$$(78) \quad e_0 = \frac{1}{4} k Z^2.$$

ζ bzw. Z sind Funktionen der Wellenlänge, e aber ist im uns zunächst nur interessierenden Bereiche einer Spektrallinie

merklich konstant. Damit der gemachte Ansatz zulässig sei, muß somit ζ die Form A_3 haben, d. h. die Form eines Produktes einer Funktion der Wellenlänge λ allein in eine Funktion von z allein; sonst könnte der Faktor k nicht e_0 von λ frei machen.

Die Rechnung liefert jetzt

$$(79) \quad (E) = \frac{4\gamma e_0}{Z^2} [(Z-2) + (Z+2)e^{-Z}].$$

Für $Z < 1$ kann man die Exponentialgröße entwickeln und erhält dann

$$(80) \quad (E) = \frac{2}{3} \gamma e_0 Z (1 - \frac{1}{2} Z + \dots),$$

dabei ist

$$Z = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^D \frac{n^2 x dx}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}},$$

oder, wenn n innerhalb der Schicht wenig von Eins abweicht, in Annäherung

$$(81) \quad Z = \frac{4\pi}{\lambda \gamma} \int_0^D n x dz.$$

Der Ausdruck (80) für (E) läßt nun infolge des zweiten Gliedes in der Klammer in der Tat Selbstumkehrung zu, und zwar zeigt das Auftreten von γ in Z an, daß die Selbstumkehrung bei wachsendem Austrittswinkel *intensiver* wird, insofern ein wachsender Bruchteil der emittierten Strahlung in Wegfall kommt. Dasselbe drückt auch die allgemeine Formel (72) aus, insofern die Exponentialgröße dort eine ähnliche Rolle spielt, wie hier die Klammergröße.

Übrigens ist zu bemerken, daß die Annahme (77) über e_n nur eingefügt ist, um ein recht einfaches Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Formel zu konstruieren, und daß sie der Wirklichkeit wenig entsprechen dürfte; ζ hat wahrscheinlich *niemals* die Form A_3 , die nach der allgemeinen Theorie der Absorption nur entsteht, wenn die Dämpfungskonstante (ν' in meiner Bezeichnung) der Elektronenschwingungen in allen Teilen der Flamme denselben Wert hat.

12. Abschließend sei noch ein ganz spezielles Problem erörtert, das zwar etwas aus dem hier behandelten Gebiete

herausfällt, aber Interesse besitzt, weil es in Handbüchern mitunter auf elementarem Wege (mehr qualitativ) behandelt wird.¹⁾

Es möge die Schicht aus zwei Teilen $0 < z < D_1$ und $D_1 < z < D$ bestehen, die in sich *homogen und homogen temperiert* sind und nur durch relativ dünne Oberflächenschichten ineinander und in die Umgebung übergehen. Im ersten Teil mögen die Parameter e_1, n_1, κ_1 , im zweiten e_2, n_2, κ_2 gelten. Die dünnen Grenzschichten mögen bei der Rechnung außer Betracht bleiben dürfen.

Dann zerfällt das Integral

$$(E) = \gamma \int_0^D e_n Z dz e^{-\int_z^D Z dz}$$

in Teile nach dem Schema

$$(82) \quad (E) = \gamma \int_0^{D_1} e_1 Z_1 dz e^{-\int_z^{D_1} Z_1 dz - \int_{D_1}^D Z_2 dz} + \gamma \int_{D_1}^D e_2 Z_2 dz e^{-\int_z^D Z_2 dz}.$$

Hierin sind jetzt die e_h, Z_h Konstanten, und demgemäß gibt die Formel, wenn man noch $D - D_1 = D_2$ setzt, sehr einfach

$$(83) \quad (E) = \gamma e_1 e^{-Z_1 D_1} (1 - e^{-Z_1 D_1}) + \gamma e_2 (1 - e^{-Z_1 D_1}),$$

$$Z_h = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{n_h^2 \kappa_h}{\sqrt{n_h^2 - \alpha^2}}.$$

Wäre nur die Schicht (1) vorhanden, so würde sich ergeben

$$(E_1) = \gamma e_1 (1 - e^{-Z_1 D_1});$$

es wird also der Einfluß der Schicht (2) dargestellt durch

$$(84) \quad (E_1) - (E) = \gamma (1 - e^{-Z_1 D_1}) (e_1 (1 - e^{-Z_1 D_1}) - e_2).$$

Die Bedingung dafür, daß die zweite Schicht *schwächend* wirkt, ist nun

$$(E_1) - (E) > 0;$$

die Formel ergibt, daß hierzu nicht (wie man meinen möchte) *ausreicht* $e_2 < e_1$, sondern daß vielmehr

$$(85) \quad e_2 < e_1 (1 - e^{-Z_1 D_1})$$

¹⁾ Vgl. dazu übrigens auch H. Konen, Physik. Zeitschr. 11. p. 993. 1910.

sein muß. Die Formel $e_2 < e_1$ resultiert nur in dem Falle, daß $Z_1 D_1$ sehr groß ist, z. B. $D_1 = \infty$ ist, wo dann die Schicht (1) sich wie ein schwarzer Körper verhält, nämlich γe_1 emittiert.

Hier genügt also die niedrigere Temperatur von (2), um die Schwächung eintreten zu lassen. Der Betrag derselben ist dann

$$(86) \quad (E_1) - (E) = \gamma(1 - e^{-Z_2 D_2})(e_1 - e_2);$$

er verschwindet also in den Spektralbereichen, wo (2) unmerklich absorbiert bzw. emittiert, d. h. $Z_2 D_2$ merklich gleich Null ist, er tritt auf in Absorptions- bzw. Emissionsbereichen und gibt dann die gewöhnliche Umkehrung der Spektrallinien.

Ist $Z_1 D_1$ nicht unendlich, so emittiert die Schicht (1) selektiv, und es bleibt die allgemeine Formel (84) gültig. Hat (2) dieselben Emissionslinien wie (1), so tritt eine Selbstumkehrung derselben ein, wenn die Bedingung (85) erfüllt ist. Es ist bemerkenswert, daß dieselbe die spezielle Absorption bzw. Emission von (2) nicht enthält, sondern nur e_2 .

Ist e_1 nur wenig größer als e_2 , so wird die Bedingung (85) nur für die am stärksten von (1) absorbierten bzw. emittierten Farben erfüllt sein, d. h. eine Schwächung nur in der Mitte der von (1) emittierten Spektrallinien stattfinden. Das ist der gewöhnliche typische Fall, der z. B. bei dem bekannten Bunsenschen Zweiflammenapparat in Annäherung realisiert ist.

Da Z_1 mit wachsender Schiefe der Emissionsrichtung zunimmt, so kann der Fall eintreten, daß eine wie angenommen konstituierte Schicht, die bei senkrechter Emission keine Selbstumkehrung der Spektrallinien zeigt, eine solche in schiefer Richtung liefert.

Resultate.

Es sind allgemeine Formeln für die Emission eines isotropen und stetigen, in parallelen Ebenen homogenen Körpers für beliebige Strahlungsrichtung unter Berücksichtigung der inneren Absorptionen, aber bei Vernachlässigung der Reflexionen aufgestellt und auf einige spezielle Fälle angewendet worden. Die Formeln sind gewonnen durch Aufbau des inhomogenen Körpers aus homogen gedachten Elementarschichten, ein Verfahren, dessen Anwendbarkeit auf Körper beschränkt ist, deren

Konstitution nicht allzu schnell mit dem Orte wechselt, und deren Absorptionsparameter κ klein ist.

Im Laufe der Entwicklung sind folgende Einzelergebnisse hervorgetreten.

Eine schwarze Ebene sendet innerhalb eines absorbierenden Mediums in schiefer Richtung eine teilweise normal zur Ebene polarisierte Strahlung aus.

Eine dünne beiderseits scharf begrenzte Schicht emittiert innerhalb des leeren Raumes in schiefer Richtung eine Strahlung, die einen normal oder einen parallel zur Schicht polarisierten Anteil enthält, je nachdem $n^4(1 + \kappa^2)^2$ kleiner oder größer als Eins ist. Auch innerhalb einer gleichartigen Umgebung emittiert die Schicht teilweise polarisierte Strahlen, doch ist der polarisierte Anteil viel kleiner, als im vorigen Falle.

Selbstumkehrung einer Spektrallinie verlangt in der geschichteten Lichtquelle wechselnde Temperatur; wechselnde Konstitution, z. B. wechselnde Dichte, ist in dieser Hinsicht ohne Wirkung. Die Stärke der Selbstumkehrung variiert mit der Emissionsrichtung.

Göttingen, September 1912.

(Eingegangen 2. Oktober 1912.)