Gehen wir daher zur Grenze $h = \infty$, d. h. wiederholen wir unsern Näherungsprozeß hinreichend oft, so erhalten wir, daß $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ ist:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_1^{2h} \psi_h(s) = c_1 q_1(s) \quad (31)$$

und daher:

$$\lambda_1^2 = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sum_s \sum_t p(s, t) \psi_h(s) \psi_h(t)}{\sum_s \sum_t k(s, t) \psi_h(s) \psi_h(t)} \quad (32)$$

Die zweite Eigenschwingung ergibt sich, indem unser Verfahren eingeleitet wird durch ein System, dessen Entwicklung nach den Eigenfunktionen die erste Eigenfunktion nicht mehr enthält. Das kann immer dadurch erreicht werden, daß wir von einem willkürlichen $\psi_0(s)$ ein Glied $c_1 q_1(s)$ abziehen, dessen Koeffizient

$$c_1 = \frac{\sum_s \sum_t p(s, t) \psi_0(s) q_1(t)}{\sum_s \sum_t p(s, t) q_1(s) q_1(t)}$$

ist. Auf demselben Wege erhält man auch die höheren Eigenschwingungen.

Schlußbemerkung. Im Interesse der einfachen Darstellung haben wir uns auf ebene und statisch bestimmte Fachwerke beschränkt. Die beigefügten Tafeln bringen hierzu als Beispiel die Berechnung der ersten Eigenschwingung eines einfachen Fachwerkes; man ersieht aus ihnen die außerordentlich rasche Konvergenz unseres Verfahrens, das in unserm Beispiel bereits in der dritten Näherung für die praktische Anwendung vollständig genügende Genauigkeit liefert. Die Brauchbarkeit unseres Verfahrens ist jedoch durchaus nicht auf derartige einfache Fachwerke beschränkt. Es läßt sich im Gegenteil sogar zeigen, daß seine Konvergenz um so besser wird, je größer die Ausdehnung des Fachwerkes in einer Richtung ist.

Die Erweiterung unseres Verfahrens auf statisch unbestimmte und räumliche Fachwerke und seine Anwendung zur Darstellung der erzwungenen Schwingungen in einem Fachwerke werden den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden. 2

Über ein Problem der Stromleitung.

Von L. LICHTENSTEIN in Berlin.

In den folgenden Zeilen wird auf ein Problem der Stromleitung hingewiesen, das mathematisch nicht ganz ohne Interesse ist und das auch vom Standpunkt der Anwendungen einige Beachtung verdient.

Ein Pol einer Gleichspannungsquelle, etwa eines Gleichstromgenerators, sei an einen langen, horizontal ausgespannten Leiter angeschlossen, der andere Pol sei geerdet. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Leiter, der die Gestalt eines langgestreckten Zylinders haben soll, von der Erde vollkommen isoliert ist. Er ist alsdann Sitz einer elektrischen Ladung; eine entgegengesetzt gleiche Ladung sitzt auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe. Die Verteilung dieser Ladung hängt von den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der dem Leiter zunächst liegenden Erdschichten ab; sie wird insbesondere von etwaigen Metallmassen in der Nähe der Erdoberfläche merklich beeinflusst.

Liegt statt einer Gleichstromquelle ein Wechselstromerzeuger vor, so sind die auf dem Leiter einerseits, auf bzw. in der Nähe der Erdoberfläche andererseits verteilten Ladungen nunmehr Funktionen der Zeit. Offenbar müssen jetzt der Erde Ladungen periodisch zugeführt, bzw. von dieser abgeführt werden. In der Erde bildet sich eine Strömung aus; diese Erdströmung ist zu bestimmen. In der Praxis wird man natürlich nicht absichtlich einen Pol eines Wechselstromgenerators an Erde, den andern an einen Freileitungsdraht legen. Die Verhältnisse liegen indessen, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, ähnlich, wenn ein Draht einer Wechselstrom- oder Drehstromfreileitungsanlage einen einseitigen (und einpunktigen) Erdschluß hat.

1. Problemstellung. Ansatz für das Potential. Wir nehmen an, daß der Boden in der Umgebung der Freileitung von ausgedehnten Metallmassen (Rohrleitungen, Gleisanlagen usw.) frei ist, und vereinfachen das Problem, indem wir für die Erde einen homogenen, leitenden Halbraum substituieren. Die wesentlichen Züge des wirklichen Vor-

ganges bleiben dabei erhalten, während das Problem der mathematischen Behandlung zugänglicher wird. Wir beginnen mit der Bestimmung der elektrischen Verteilung bei Gleichspannung, der Uebergang zur Wechselspannung wird sich später mühelos vollziehen. Für den langgestreckten Leiter führen wir zunächst ein Stück einer mit homogener Ladung belegten Geraden ein.

Wir beziehen die Lage der Punkte im Raume auf ein kartesisches Koordinatensystem, dessen $x-y$ -Ebene mit der Grenzebene des leitenden Halbraumes zusammenfällt. Die mit Elektrizität belegte geradlinige Strecke AB möge die z -Achse schneiden. Wir nehmen sie um h von der $x-y$ -Ebene entfernt und der x -Achse parallel, mithin horizontal, an (Abb. 1). Ihre Länge sei $2l$, die Koordinaten der Endpunkte seien $A(-l, 0, h)$, $B(l, 0, h)$. Die Ladung für die Längeneinheit sei q , alle Größen im elektrostatischen Maßsystem (cgs) ausgedrückt.

Abb. 1

Es sei $A'B'$ das Spiegelbild von AB in bezug auf die Ebene $z = 0$. Denken wir uns $A'B'$ mit einer gleichmäßig verteilten elektrischen Ladung von der Dichte $-q$ bedeckt und betrachten wir das elektrische Feld der beiden Geraden AB und $A'B'$. Sei in der üblichen Bezeichnungsweise $\mathcal{E}$ die Feldintensität. Bekanntlich sind die Niveaulächen einer homogenen, geladenen Strecke gestreckte Rotationsellipsoide und die Endpunkte der geladenen Geraden sind Brennpunkte ihrer Meridianellipsen. Die in der Umgebung der Rotationsachse verlaufenden Niveaulächen werden sich bei hinreichend großem l nur wenig von Kreiszylindern mit abgerundeten Basiskanten unterscheiden. Das gleiche gilt, auch wenn es sich, wie in unserm Falle, um das Feld zweier mit gleichmäßig verteilter Ladung belegten Geraden handelt. Sei S eine Niveauläche in der Nachbarschaft von AB . Aus Gründen der Symmetrie ist auch die Ebene $z = 0$ eine Niveauläche; sie heiße S_0 . Sei jetzt T der von S_0 und S begrenzte Raum, ν die nach außen gerichtete Normale an S_0 oder S .

Nach bekannten Sätzen ist in T das Feld $\mathcal{E}$ zugleich dasjenige Feld, das sich ergibt, wenn man auf S_0 und S eine elektrische Massenverteilung von der Dichte $\delta = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_\nu$ annimmt. Sei (ξ, η, ζ) ein Punkt außerhalb von AB und $A'B'$ ($\eta \neq h$, $\eta \neq -h$). Das Feld leitet sich von einem Potential ab,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q \int_{-l}^l \frac{dx}{r} - q \int_{-l}^l \frac{dx}{r'}, \quad r^2 = (\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2, \quad r'^2 = (\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2 \quad (1).$$

In bekannter Weise ist nun

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{dx}{r} &= \int_{-l}^l \frac{d(x - \xi)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2}} = [\log(x - \xi + \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2})]_{-l}^l \\ &= \log \frac{l - \xi + \sqrt{(\xi - l)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2}}{-l + \xi + \sqrt{(\xi + l)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2}}, \\ \int_{-l}^l \frac{dx}{r'} &= \log \frac{l - \xi + \sqrt{(\xi - l)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2}}{-l + \xi + \sqrt{(\xi + l)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2),$$

demnach

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q \log \frac{(-l + \xi) + \sqrt{(l + \xi)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2}}{(l - \xi) + \sqrt{(l - \xi)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2}} \cdot \frac{(l - \xi + \sqrt{(l - \xi)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2})}{(-l + \xi) + \sqrt{(l + \xi)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2}} \quad (3)$$

Augenscheinlich ist in der Tat die Ebene $\zeta = 0$ eine Niveauläche.

Sei ϱ der Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) von der Geraden AB ,

$$\varrho^2 = \eta^2 + (\zeta - h)^2,$$

ϱ' entsprechend der Abstand von $A'B'$,

$$\varrho'^2 = \eta^2 + (\zeta + h)^2.$$

Für Gl. (3) kann man einfacher setzen:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q \log \frac{(-a + \xi) + \sqrt{(a + \xi)^2 + \varrho^2}}{(a - \xi) + \sqrt{(a - \xi)^2 + \varrho^2}} \frac{(a - \xi) + \sqrt{(a - \xi)^2 + \varrho^2}}{(-a + \xi) + \sqrt{(a + \xi)^2 + \varrho^2}} \quad (4).$$

Für diejenigen Punkte in der Umgebung von A, B , die von A und B um ein Vielfaches von $2h$ entfernt sind, läßt sich $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ in eine rasch konvergierende Reihe entwickeln. Sei

$$\left| \frac{\varrho}{l - \xi} \right|, \left| \frac{\varrho'}{l - \xi} \right|, \left| \frac{\varrho}{l + \xi} \right|, \left| \frac{\varrho'}{l + \xi} \right| < 1 \quad (5).$$

Wenn wir uns auf die Betrachtung der Punkte beschränken, die zwischen den Ebenen $\xi = -l$ und $\xi = l$ liegen, für die demnach

$$l - \xi > 0, \quad l + \xi > 0 \quad (6)$$

ist, so gilt

$$l - \xi + \sqrt{(l - \xi)^2 + \varrho'^2} = (l - \xi) \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho'^2}{(l - \xi)^2} + \dots \right), \quad (7),$$

mithin

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \zeta) &= q \log \frac{(a + \xi) \left(-1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho'^2}{(a + \xi)^2} - \frac{1}{8} \frac{\varrho'^4}{(a + \xi)^4} + \dots \right) (a - \xi) \left(2 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(a - \xi)^2} - \frac{1}{8} \frac{\varrho^4}{(a - \xi)^4} + \dots \right)}{(a - \xi) \left(2 + \frac{1}{2} \frac{\varrho'^2}{(a - \xi)^2} - \frac{1}{8} \frac{\varrho'^4}{(a - \xi)^4} + \dots \right) (a + \xi) \left(-1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(a + \xi)^2} - \frac{1}{8} \frac{\varrho^4}{(a + \xi)^4} + \dots \right)} \\ &= q \left[-\frac{1}{4} \frac{\varrho'^2}{(a - \xi)^2} + \frac{3}{32} \frac{\varrho'^4}{(a - \xi)^4} - \dots + \frac{1}{4} \frac{\varrho^2}{(a - \xi)^2} - \frac{3}{32} \frac{\varrho^4}{(a - \xi)^4} + \dots \right] \\ &+ q \log \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} \left(\frac{1 - \frac{1}{4} \frac{\varrho'^2}{(a + \xi)^2} + \dots}{1 - \frac{1}{4} \frac{\varrho^2}{(a + \xi)^2} + \dots} \right) = 2q \log \frac{\varrho'}{\varrho} + q \left(-\frac{1}{4} \frac{\varrho'^2}{(a + \xi)^2} - \frac{\varrho'^2}{4(a - \xi)^2} + \frac{1}{4} \frac{\varrho^2}{(a + \xi)^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \frac{\varrho^2}{(a - \xi)^2} + \dots \right) = 2q \log \frac{\varrho'}{\varrho} + q \frac{(\varrho'^2 - \varrho^2)}{4} \left(\frac{1}{(a + \xi)^2} + \frac{1}{(a - \xi)^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8).$$

Die nicht mehr hingeschriebenen Glieder sind von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf $\frac{\varrho}{l + \xi}, \frac{\varrho'}{l + \xi}, \frac{\varrho}{l - \xi}, \frac{\varrho'}{l - \xi}$.

Der Quotient $\frac{h}{l}$ ist in der Regel ein kleiner Bruch. Legt man der Betrachtung eine in $h = 6$ m Höhe über dem Erdboden ausgespannte Leitung zugrunde und nimmt man $l = 6$ km, mithin die Gesamtlänge der Leitung gleich 12 km an, so wird

$$\frac{h}{l} = 0,001, \quad \frac{\varrho'}{l} \text{ wenig verschieden von } 0,002. \quad (9).$$

Es sei

$$\frac{\varrho'}{l - \xi} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\varrho'}{l + \xi} \leq \frac{1}{2}, \quad (10),$$

demnach

$$l - \xi \geq 36 \text{ m}, \quad l + \xi \geq 36 \text{ m}.$$

Das bedeutet, wie man leicht sieht, daß man sich auf die Betrachtung der zwischen den Ebenen $\xi = -l + 36$, $\xi = l - 36$ enthaltenen Punkte beschränkt. Ihre Entfernung von den Endpunkten A und B der Freileitung ist mindestens gleich 36 m. Setzt man ferner $\varrho = 0,6$ cm, was einem Runddraht von etwa 113 mm² entsprechen würde, so findet man angenähert

$$2 \log \frac{\varrho'}{\varrho} = 2 \log \frac{1200}{0,6} = 15,2 \dots, \quad \frac{\varrho'^2}{4(a - \xi)^2} \leq \frac{1}{36} \quad (11).$$

Das zweite Glied der Entwicklung (8) macht noch nicht 0,2 vH des ersten Gliedes aus. Bis nahe an die Endpunkte der Freileitung ist das Feld in der Umgebung des Drahtes praktisch gleich demjenigen zweier unbegrenzter Geraden $\zeta = h$, $\zeta = -h$, die entsprechend die Ladung q und $-q$ für die Längeneinheit tragen. Die Niveaulinien

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{q}{C},$$

unter C eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden, unterscheiden sich nur sehr wenig von geraden Kreiszylindern, deren Achsen die Richtung der x -Achse haben und

in der Nähe von AB verlaufen. Das trifft, wie wir soeben gesehen haben, bereits mit großer Annäherung zu, wenn man $C = \frac{1}{15,2}$ annimmt.

2. Ladungsverteilung auf der Erdoberfläche. Wir denken uns jetzt die Niveaufläche S ($\varphi = \frac{q}{C}$) und die x - y -Ebene S_0 metallisch leitend. Auf den beiden Flächen hat man alsdann, wie bereits erwähnt, eine elektrische Massenverteilung von der Dichte $= -\frac{1}{4\pi} \mathcal{E}$, anzunehmen. Die Verteilung der Elektrizität auf S interessiert uns nicht. Aus allgemeinen Sätzen weiß man, daß die Gesamtladung auf S derjenigen der Geraden AB gleich sein muß. Sie beträgt demnach $2ql$. Eine entgegengesetzt gleiche Ladung ist auf der Erdoberfläche S_0 verteilt. Die Kapazität des Kondensators, der aus dem im wesentlichen zylindrischen Leiter S und der Erde gebildet wird, ist augenscheinlich gleich

$$\frac{2qlC}{q} = 2lC \quad (12).$$

Die Kapazität für die Längeneinheit ist dementsprechend C .

Der Leiter S ist, wie gesagt, von einem geraden Kreiszylinder nur wenig verschieden. Sei r_0 der Halbmesser eines Kreises, der der Schnittfläche von S mit der Ebene $x=0$ inhaltsgleich ist. Bis auf einen Betrag von der Ordnung $\frac{r_0}{h}$ ist $\frac{\rho'}{\rho}$ auf S für $x=0$ gleich $\frac{2h}{r_0}$,

$$\log \frac{\rho'}{\rho} = \log \frac{2h}{r_0} + \left(\left(\frac{r_0}{h} \right) \right) \quad (13).$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\log \frac{2h}{r_0} = 7,6 \dots \frac{r_0}{h} = \frac{0,6}{600} = 0,001.$$

Mit einem praktisch völlig belanglosen Fehler kann man demnach $\frac{\rho'}{\rho}$ durch $\frac{2h}{r}$ ersetzen. Man erhält so

$$\frac{1}{C} = 2 \log \frac{2h}{r} + \dots \quad (14),$$

und als die Kapazität für die Längeneinheit angenähert den bekannten Ausdruck

$$\frac{1}{2 \log \frac{2h}{r}} \quad (15).$$

Ist die Gleichspannung des Drahtes gegen Erde E , so findet man nunmehr für die Ladung für die Längeneinheit der Leitung mit hinreichender Annäherung den Wert

$$q = EC = \frac{E}{2 \log \frac{2h}{r}} \quad (16).$$

Nun die Verteilung der Ladung auf der Erdoberfläche. Hier ist

$$\delta = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_v = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right]_{\zeta=0} \quad (17),$$

demnach wegen Gl. (4) nach einer leichten Umrechnung

$$\delta = -\frac{qh}{2\pi} \left[\frac{1}{-(l+\xi) + \sqrt{(\xi+l)^2 + \eta^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi+l)^2 + \eta^2 + h^2}} - \frac{1}{(l-\xi) + \sqrt{(\xi-l)^2 + \eta^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi-l)^2 + \eta^2 + h^2}} \right] \quad (18).$$

Werden jetzt unter ρ und ρ' die Abstände eines Punktes $\xi, \eta, 0$ auf S von den beiden geladenen Geraden verstanden, so gilt

$$\rho^2 = \rho'^2 = \eta^2 + h^2 \quad (19),$$

demnach

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{qh}{2\pi} \left[\frac{1}{-(l+\xi) + \sqrt{(l+\xi)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+\xi)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{l-\xi + \sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} \right] \\ &= -\frac{qh}{2\pi \rho^2} \left[1 + \frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2 + \rho^2}} - 1 + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} \right] = -\frac{qh}{2\pi \rho^2} [\cos \chi_1 + \cos \chi_2] \quad (20); \end{aligned}$$

unter χ_1 und χ_2 die von den Geraden AP und PB mit der positiven Richtung der x -Achse eingeschlossenen Winkel verstanden.

Wird wieder

$$\left| \frac{\rho}{l+\xi} \right|, \left| \frac{\rho}{l-\xi} \right| < 1 \quad (21)$$

vorausgesetzt, so erhält man, wenn man sich auf die Betrachtung der Punkte beschränkt, die zwischen den Ebenen $\xi = -l$ und $\xi = l$ liegen, für die also

$$l - \xi > 0, \quad l + \xi > 0 \quad (21)$$

ist, in bekannter Weise durch Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi+l)^2 + \rho^2}} = \frac{1}{l+\xi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{(l+\xi)^2} + \dots \right) \quad (22)$$

demnach

$$\frac{l+\xi}{\rho^2 \sqrt{(\xi+l)^2 + \rho^2}} = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{2(l+\xi)^2} + \dots \right) \quad (23)$$

und in ähnlicher Weise

$$\frac{l-\xi}{\rho^2 \sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{2(l-\xi)^2} + \dots \right) \quad (24)$$

Aus Gl. (20), (16), (23) und (24) folgt

$$\delta = -\frac{ECh}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \left(2 - \frac{\rho^2}{2(l+\xi)^2} - \frac{\rho^2}{2(l-\xi)^2} + \dots \right) \quad (25)$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf $\frac{\rho}{l-\xi}$ und $\frac{\rho}{l+\xi}$ sind. Sind $\left| \frac{\rho}{l+\xi} \right|$ und $\left| \frac{\rho}{l-\xi} \right|$ so klein, daß man sich auf das erste Glied beschränken kann, so findet man

$$\delta = -\frac{ECh}{\pi} \frac{1}{\rho^2} \quad (26)$$

Dies ist die bekannte Formel zur Bestimmung der elektrischen Verteilung, die auf der Erdoberfläche von einer unendlich langen, homogen geladenen Geraden influenziert wird. Der Fehler, den man begeht, wenn man sich auf die Betrachtung des ersten Gliedes beschränkt, beträgt für

$$\frac{\rho}{l+\xi}, \frac{\rho}{l-\xi} < \frac{1}{7}$$

etwa 1 vH. Dies gilt z. B. gewiß in dem Rechteck

$$-5 \text{ km} \leq \xi \leq 5 \text{ km},$$

$$-140 \text{ m} \leq \eta \leq 140 \text{ m}.$$

In der Nähe der Endpunkte A und B der Freileitung erhält man eine andere übersichtliche Darstellung der Flächendichte δ . In der Nähe von B ($l - \xi$ kleine Zahl) ist z. B.

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{ECh}{2\pi\rho^2} \left\{ \left(2 - \frac{\rho^2}{2(l+\xi)^2} + \dots \right) + 1 + \cos \chi_2 \right\} \\ &= -\frac{ECh}{2\pi\rho^2} \left\{ 1 + \cos \chi_2 - \frac{\rho^2}{2(l+\xi)^2} + \dots \right\} \quad (27). \end{aligned}$$

3. Fall eines Wechselstromes. Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Leitung unter Gleichspannung steht. Es möge sich nunmehr im Gegensatz hierzu um Wechselspannung handeln. Der Einfachheit halber nehmen wir ihre Spannungskurve sinusförmig an und setzen demgemäß

$$E = E_0 \sin \omega t \quad (\omega = 2\pi N, N = \text{Frequenz}) \quad (28).$$

Dann wird auch die Ladung in dem Punkt $(\xi, \eta, 0)$ auf der Erdoberfläche Funktion der Zeit sein,

$$\delta = -\frac{ChE_0}{2\pi\rho^2} \left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2 + \rho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} \right] \sin \omega t \quad (29).$$

Die Erde wird von einer Strömung durchflossen. Die einzelnen Stromfäden gehen von dem geerdeten Pol der Wechselstrommaschine aus und münden an der Erdoberfläche. Die Normalkomponente A_n des Strömungsvektors A hat, wie man leicht sieht, den Wert

$$A_n = -\frac{d\delta}{dt} = \frac{ChE_0\omega}{2\pi\rho^2} \left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2 + \rho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2 + \rho^2}} \right] \cos \omega t \quad (30).$$

Die Erdelektrode möge im Koordinatenursprung liegen und zunächst punktförmig sein. Da die gesamte, auf der Erdoberfläche verteilte Ladung den Wert $-2 l C E_0 \sin \omega t$ hat, so ist der Gesamtstrom augenscheinlich gleich

$$\frac{d}{dt} (-2 l C E_0 \sin \omega t) = -2 l C \omega E_0 \cos \omega t \quad (31)$$

Im Koordinatenursprung haben wir demnach eine einfache Quelle von der Ergiebigkeit $-2 l C \omega E_0 \cos \omega t$ anzunehmen. (32)

Nimmt man den Erdkörper als homogen leitend an, so läuft die Bestimmung der Strömung auf die Lösung der folgenden Randwertaufgabe hinaus:

Es ist diejenige in dem Halbraume $\mathfrak{R}$ ($Z < 0$) reguläre Potentialfunktion (Strömungspotential) $\Psi(X, Y, Z) \cos \omega t$ zu bestimmen, die auf S der Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\frac{C h E_0 \omega}{2 \pi \varrho^3} \left[\frac{l + \xi}{\sqrt{(l + \xi)^2 + \varrho^2}} + \frac{l - \xi}{\sqrt{(l - \xi)^2 + \varrho^2}} \right] \quad (33)$$

genügt, sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie

$$-\frac{2 l C \omega E_0}{2 \pi R} + \text{stetige Funktion} \quad (R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2) \quad (34)$$

verhält und im Unendlichen verschwindet¹⁾. Das Verhalten in der Umgebung des Koordinatenursprunges entspringt der Forderung, daß der Gesamtstrom

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial R} df \quad (35)$$

(S_ϵ Halbkugel vom Radius ϵ um den Koordinatenursprung) den Wert (31) hat.

Aus bekannten Sätzen folgt, daß es nicht mehr als eine Lösung des Problems geben kann.

Faßt man den Koordinatenursprung als eine Stromquelle von der Ergiebigkeit (32), den Punkt $(\xi, \eta, 0)$ als eine Elementarquelle von der Ergiebigkeit (31) auf, so findet man die Lösung ohne weiteres in der Form

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y, Z) = & -\frac{2 l C \omega E_0}{2 \pi (X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \\ & + \frac{C h E_0 \omega}{2 \pi \cdot 2 \pi} \int \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{l + \xi}{\sqrt{(l + \xi)^2 + \varrho^2}} + \frac{l - \xi}{\sqrt{(l - \xi)^2 + \varrho^2}} \right] \frac{d \xi d \eta}{[(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + Z^2]^{3/2}} \quad (36) \end{aligned}$$

Die Integration ist über die ganze Ebene $\zeta = 0$ erstreckt zu denken. Die weitere Behandlung und Diskussion der Beziehung (36), insbesondere der Nachweis, daß ψ tatsächlich die gesuchte Lösung darstellt, bleibt einer Fortsetzung dieses Aufsatzes vorbehalten. 24

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Probleme der Flugzeugstatik.

Von J. RATZERSDORFER in Wien.

Zwischen der Festigkeitsberechnung einer Flugzeugzelle und der des Tragwerks einer Brücke oder Dachkonstruktion besteht kein grundsätzlicher Unterschied; es sind immer die gleichen Verfahren der Statik starrer und elastischer Körper, mit denen man die Lösung aller Festigkeitsaufgaben erzielt. Das Bestreben, zur Gewichtsersparnis (und gelegentlich auch zur Verringerung des Luftwiderstandes) die Flugzeugteile in möglichst kleinen Dimensionen zu halten, hat jedoch dazu geführt, die Berechnung vielfach mit einer größeren Annäherung an die Wirklichkeit vorzunehmen, als es sonst im Bauwesen üblich

¹⁾ Da im Unendlichen keine Stromsenke liegt, so ist $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{\partial \psi}{\partial R} df = 0$ (S_R Halbkugel um den