Sternbewegungen in ellipsoidisch geschichteten Sternhaufen. Von *J. Lense*.

Die Untersuchungen *v. Seeligers* über den Bau unseres Fixsternsystems veranlaßten mich, die Bewegungen der Sterne in einem solchen System zu studieren, um so mehr, als das betreffende Problem für die kugelförmigen Sternhaufen bereits gelöst ist¹⁾. Wir betrachten also eine Sternansammlung von ellipsoidischer Gestalt und der Eigenschaft, daß die Dichte zwischen zwei zum Begrenzungsellipsoid ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden oder, wie man sagt, in einem zum Begrenzungsellipsoid ähnlichen, unendlich dünnen elliptischen Homöoid konstant ist, dagegen von Homöoid zu Homöoid wechselt. Bedeuten a, b, c die Halbachsen des Begrenzungsellipsoids, so sind $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ die analogen Größen der Oberfläche eines solchen Homöoids, wenn λ die Werte von 0 bis 1 durchläuft. Die Dichte ϱ ist daher eine Funktion von λ .

Wir setzen eine so große Entfernung der einzelnen Sterne voneinander voraus, daß nur die Anziehung des Gesamthaufens auf die einzelnen Sterne zu berücksichtigen ist, also keine Zusammenstöße vorkommen. Die Koordinatenachsen sollen mit den Ellipsoidachsen zusammenfallen. Dann folgt aus der Potentialtheorie:

Alle Homöoide, die einen Stern mit den Koordinaten x, y, z einschließen, üben auf ihn keine Kraftwirkung aus, während jedes Homöoid, für das er ein äußerer Punkt ist, ihn mit einer Kraft anzieht, deren Komponenten

$$dX = -\frac{3}{2}k^2 V(\varrho/\Delta) [x/(a^2+u)] du$$

$$dY = -\frac{3}{2}k^2 V(\varrho/\Delta) [y/(b^2+u)] du$$

$$dZ = -\frac{3}{2}k^2 V(\varrho/\Delta) [z/(c^2+u)] du$$

sind. k^2 bedeutet die Gravitationskonstante, V das Volumen des gesamten Haufens, $\Delta = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$, und u ist die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2/(a^2+u) + y^2/(b^2+u) + z^2/(c^2+u) = \lambda^2.$$

Um die Anziehung des ganzen Haufens zu erhalten, haben wir die Ausdrücke für dX, dY, dZ nach u zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu integrieren, entsprechend dem durch den Punkt (x, y, z) gehenden Ellipsoid, für das $u = 0$, und dem Mittelpunkt, für den $\lambda = 0$ und $u = \infty$. Wir erhalten daher für die Gesamtanziehung die Kraftkomponenten

$$X = -\frac{3}{2}k^2 V x \int_0^\infty \varrho/[(a^2+u)\Delta] \cdot du$$

$$Y = -\frac{3}{2}k^2 V y \int_0^\infty \varrho/[(b^2+u)\Delta] \cdot du$$

$$Z = -\frac{3}{2}k^2 V z \int_0^\infty \varrho/[(c^2+u)\Delta] \cdot du$$

wo ϱ eine Funktion von λ ist und daher auch als Funktion von u angesehen werden kann.

Für einen Stern außerhalb des Haufens treten dieselben Ausdrücke auf, nur ist die untere Grenze 0 durch ν zu ersetzen, wo ν die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2/(a^2+\nu) + y^2/(b^2+\nu) + z^2/(c^2+\nu) = 1 \quad \text{ist.}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Sterns lauten $d^2x/dt^2 = X, d^2y/dt^2 = Y, d^2z/dt^2 = Z$. Im allgemeinen bestehen also neben dem Energieintegral keine Flächenintegrale. In dem speziellen Fall des Rotationsellipsoids $a = b$, den wir der Anwendung auf das Fixsternsystem halber untersuchen wollen, existiert wohl das Flächenintegral $x \cdot dy/dt - y \cdot dx/dt = \text{konst.}$, nicht aber die beiden andern.

Da fast alle systematischen Sternbewegungen, insbesondere die beiden Haupttriften parallel der Milchstraße erfolgen, wollen wir uns auf die Bewegungen in der Äquatorebene beschränken und daher z samt allen zeitlichen Ableitungen gleich 0 setzen. Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$d^2x/dt^2 = -\frac{3}{2}k^2 V x \int_0^\infty \varrho/[(a^2+u)^2 \sqrt{(c^2+u)}] \cdot du$$

$$d^2y/dt^2 = -\frac{3}{2}k^2 V y \int_0^\infty \varrho/[(a^2+u)^2 \sqrt{(c^2+u)}] \cdot du$$

folglich kann die Bewegung als durch eine Zentralkraft von der Größe

$$g(r) = \frac{3}{2}k^2 V r \int_0^\infty \varrho/[(a^2+u)^2 \sqrt{(c^2+u)}] \cdot du$$

hervorgerufen angesehen werden, wenn r die Entfernung des Sterns vom Mittelpunkt bedeutet. Dabei ist

$$\lambda = 1/\sqrt{(x^2+y^2)/(a^2+u)} = r/\sqrt{(a^2+u)}.$$

Anschließend an *v. Seeligers* Arbeiten setzen wir das Dichtengesetz $\varrho = \varrho_0 \lambda^m$ voraus, und zwar soll $m \leq 0$ sein, damit die Dichte nach außen hin abnehme, und $m \geq -2$. Dann wird die Größe

$$A = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(1+u)^{1/2}(4+m)(\epsilon^2+u)^{1/2}}} \cdot du \quad (\epsilon = c/a)$$

nicht unendlich groß. Es ergibt sich

$$\int_0^\infty \varrho/[(a^2+u)^2 \sqrt{(c^2+u)}] \cdot du = A a^{-(m+3)} \varrho_0 r^m$$

ferner $r^2 d\varphi/dt = c$ (Flächenintegral)

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} - \frac{3}{2}k^2 A V \varrho_0 (r^{m+2} - r_0^{m+2})} \quad (1)$$

v_0 und r_0 bedeuten Anfangsgeschwindigkeit und -entfernung und c die Flächengeschwindigkeit. Dabei soll $m = -2$ vorläufig ausgeschlossen sein.

¹⁾ E. Strömberg, Über Bewegungsformen in Globular Clusters, A. N. 203.17.

Interessant sind die beiden Fälle der geradlinigen und kreisförmigen Bewegung. Jene entsteht, wenn $c = 0$, und besteht in einer Art Pendelschwingung durch das Zentrum. Die Schwingungsdauer T , d. h. die Zeit, die der Stern braucht, wenn er aus der Anfangsentfernung r_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit durchs Zentrum schwingt und wieder zurück zu seiner Anfangslage gelangt, ergibt sich aus Gleichung (1) zu

$$T = \frac{4B \sqrt{(m+2)a^3}}{\sqrt{3k^2 AV Q_0}} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2 m}, \text{ wo } B = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{m+2}}}.$$

Die Geschwindigkeit im Zentrum beträgt in diesem Fall

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=0} = a \sqrt{\frac{3k^2 AV Q_0}{(m+2)a^3}} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{m+2}.$$

Soll die Bahn ein Kreis mit dem Radius r_0 sein, so muß r_0 eine Doppelwurzel der Gleichung

$$v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} - \frac{3k^2 AV Q_0}{(m+2)a^{m+3}} (r^{m+2} - r_0^{m+2}) = 0 \quad (2)$$

sein, d. h. es muß auch die erste Ableitung der linken Seite dieser Gleichung für $r = r_0$ verschwinden. Daraus folgt, da jetzt $c = r_0 v_0$ ist,

$$r_0^{m+2} = 2v_0^2 a^{m+3} / [3k^2 AV Q_0]$$

daher die Winkelgeschwindigkeit in der Kreisbahn

$$n = v_0/r_0 = \sqrt{3k^2 AV Q_0 r_0^m / (2a^{m+3})}$$

und die Umlaufzeit

$$U = 2\pi/n = [2\pi \sqrt{2a^3 / (3k^2 AV Q_0)}] \cdot (a/r_0)^{1/2 m}.$$

Es ergibt sich so die interessante Beziehung

$$T/U = (B/\pi) \sqrt{2m+4}$$

also speziell für $m = 0$, d. h. für konstante Dichte, $T = U$, wie es sein muß. In diesem Fall sind ja die Bahnkurven in der Äquatorebene im allgemeinen Ellipsen, die Bewegung in der Geraden ist harmonisch und bekanntlich synchron mit der entsprechenden Kreisbahn. Für $m = -1$ ist

$$T/U = 2 \sqrt{2/\pi}.$$

Der Fall $m = -2$ führt auf etwas andere Formeln, nämlich

$$dr/dt = \pm \sqrt{v_0^2 - (c^2/r^2) - (3k^2 AV Q_0/a) \cdot \log \text{nat}(r/r_0)}$$

$$T = 4 \sqrt{(\pi a) \cdot r_0 / (3k^2 AV Q_0)}$$

$$U = 2\pi \sqrt{(2a) \cdot r_0 / (3k^2 AV Q_0)}, \quad T/U = \sqrt{2/\pi}.$$

Untersuchen wir jetzt die Gleichung (2) genauer. Wir setzen ihre linke Seite gleich $f(r)$ und $3k^2 AV Q_0/a^{m+3} = \beta$, dann ist $f'(r) = 2c^2/r^3 - \beta r^{m+1}$, $f''(r) = -6c^2/r^4 - (m+1)\beta r^m$ und zwar gelten diese Formeln auch für $m = -2$. Bezeichnen wir den Winkel zwischen Radiusvektor und Geschwindigkeitsrichtung mit α , so ist $c = r v \sin \alpha$ daher $f(r_0) = v_0^2 \cos^2 \alpha_0$, also positiv, während $f(0)$ und $f(\infty)$ negativ sind. Folglich gibt es zwei Werte von r , $r_1 < r_0$ und $r_2 > r_0$, für die $f(r)$ verschwindet. Sind beide Wurzeln einfach, so erhalten wir eine schlingenförmige, geschlossene oder nicht geschlossene Bahn oder, wie man auch sagen kann, ein sich drehendes Oval zwischen dem Perizentrum r_1 und dem Apozentrum r_2 . Soll r eine mehrfache Wurzel sein, so muß $2c^2/r^3 - \beta r^{m+1} = 0$, also $r = (2c^2/\beta)^{1/(m+4)}$ sein. Dann ist aber $f''(r) = -2(m+4)c^2(1/2\beta/c^2)^{4/(m+4)}$, d. h. negativ. Infolgedessen ist dr/dt nur im Punkte r reell, nämlich 0, in jedem Punkt der unmittelbaren Umgebung von r

aber imaginär, d. h. die entsprechende Bahn ist eine stabile Kreisbahn mit dem Radius r . Dieser Fall kann folglich nur eintreten, wenn die beiden Wurzeln r_1 und r_2 mit r_0 zusammenfallen. Die möglichen Bahnformen in der Äquatorebene sind daher Gerade, Kreise und Ovale. Aus dem eben Erörterten folgt: Eine Stelle in der Entfernung r vom Mittelpunkt ist Perizentrum, Punkt einer Kreisbahn oder Apozentrum, je nachdem $f'(r) \gtrless 0$ oder wegen $\alpha = 90^\circ$

$$v \gtrless \sqrt{1/2 \beta r^{m+2}}.$$

Natürlich setzen wir immer solche Anfangsbedingungen voraus, daß die Bahn ganz innerhalb des Haufens verläuft.

Obwohl nach *v. Seeliger* die Flächen konstanter Dichte im Fixsternsystem keineswegs ähnliche Rotationsellipsoide sind, glaube ich doch den vorausgesetzten Sternhaufen in erster Annäherung für unser Sternsystem substituieren zu können und setze daher entsprechend den λ -Werten in *v. Seeligers* Abhandlung »Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne«, Sitz.-Ber. d. Münchener Akad. 1912, $m = -1/2$, $a = 1740$ Siriusweiten und $\varepsilon = 0.2$.

Nach einem Vorschlag *Klumaks* in seiner Dissertation »Die Spezialbewegungen der auf Parallaxe untersuchten Fixsterne«¹⁾ nahm ich für die Dichte in der Entfernung einer Siriusweite $2 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$ an. Mit diesen Zahlen erhielt ich folgende numerische Resultate:

$$1 \text{ Siriusweite} = 1.54 \cdot 10^{19} \text{ cm (Parallaxe} = 0.2)$$

$$a = 268 \cdot 10^{20} \text{ cm}$$

$$Q_0 = 4.79 \cdot 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$$

$$k^2 = 6.66 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$$

$$A = 2.31$$

$$B = 1.73$$

$$\text{Anzahl der Sekunden eines Jahres} = 3.15 \cdot 10^7$$

$$\text{Geschwindigkeit in einem Kreise von } 1 \text{ S.-W. Radius}$$

$$= 0.96 \text{ km/sec, Umlaufzeit} = 32 \text{ Mill. Jahre}$$

$$\text{Geschwindigkeit in einem Kreise von } 1740 \text{ S.-W. Radius}$$

$$= 259 \text{ km/sec, Umlaufzeit} = 207 \text{ Mill. Jahre}$$

$$T/U = 0.952$$

$$\text{Geschwindigkeit im Zentrum, wenn der Stern vom Rand ohne Anfangsgeschwindigkeit in einer Geraden durchs Zentrum schwingt} = 298 \text{ km/sec.}$$

Schwänge z. B. unsere Sonne in einer solchen Geraden mit der Geschwindigkeit 19.4 km/sec durchs Zentrum, so würde sie sich nur um 45.6 S.-W. vom Mittelpunkt entfernen. Bewege sie sich dagegen in einem Kreise mit der Geschwindigkeit 19.4 km/sec, so würde der Kreisradius 54.5 S.-W. betragen.

Eine Stelle in der Entfernung r ist Perizentrum, Punkt einer Kreisbahn oder Apozentrum, je nachdem dort die Geschwindigkeit $\gtrless 259 (r/a)^{3/4} \text{ km/sec}$ ist.

Die vorliegenden Rechnungsergebnisse zeigen, daß man unter den gemachten Voraussetzungen mit Hilfe der *v. Seeliger*-schen Zahlen zu ganz plausiblen Resultaten kommt, ohne selbstverständlich einen Beweis für die Notwendigkeit dieser Voraussetzungen zu geben, da ja solche ellipsoidische Haufen vor allem dynamisch auf ihre Stabilität untersucht werden müßten.

Wien, 1916 Nov. 30.

J. Lense.

¹⁾ A. N. 200.89.