# Approximation algebraischer Zahlen.

Von

Carl Siegel in Göttingen.

## Einleitung.

1. Im Jahre 1851 zeigte Liouville (Liouville 1): Zu jeder algebraischen Zahl $\xi$ vom Grade $n \geqq 2$ gibt es ein positives $a_1 = a_1(\xi)$ derart, daß für alle Paare $x, y$ ganzer rationaler Zahlen mit $y > 0$ die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{a_1}{y^n} \tag{A}$$

gilt.

2. Diese fast triviale Abschätzung verbesserte Thue (Thue 3) 1908 zu folgender: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein positives $a_2 = a_2(\xi, \varepsilon)$, so daß (A) durch die schärfere Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{a_2}{y^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}} \tag{B}$$

ersetzt werden kann. Mit Hilfe hiervon bewies dann Thue seinen bekannten Satz: Bedeutet $U(x, y)$ eine homogene binäre Form mit rationalen Koeffizienten, die nicht Potenz einer linearen oder indefiniten quadratischen Form ist, so hat die Diophantische Gleichung $U(x, y) = k$ für jedes rationale $k \neq 0$ nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen $x, y$.

Bereits Thue wies auf eine naheliegende Erweiterung dieses Satzes hin, die dann von Maillet (Maillet 2) 1916 ausgeführt wurde. Ist nämlich $n$ der Grad von $U(x, y)$ und $V(x, y)$ irgendein zu $U(x, y)$ teilerfremdes Polynom, dessen Dimension $< \frac{n}{2} - 1$ ist, so bleibt der Satz von Thue richtig, wenn $k$ durch $V(x, y)$ ersetzt wird.

Thue zeigte ferner mit Hilfe seines Satzes, daß der größte Primteiler des Polynoms $f(x) = (ax + b)(cx + d)$, wo $a, b, c, d$ ganze rationale Zahlen mit $ad - bc \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ bedeuten, über alle Grenzen wächst, wenn $x$ die Reihe der natürlichen Zahlen wachsend durchläuft. Für spezielle

Werte der Koeffizienten (sowie für $f(x) = x^2 + 1$) war dies bereits durch **Størmer** bekannt (Størmer 1, 2). **Pólya** hat 1918 gezeigt (Pólya 2), daß diese Aussage bestehen bleibt, wenn $f(x)$ irgendeine quadratische Funktion von nichtverschwindender Diskriminante mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeutet.

3. Durch **Thues** Untersuchungen ist nahegelegt worden, den Exponenten $\frac{n}{2} + 1 + \varepsilon$ weiter zu verkleinern zu suchen. Welches diejenige Funktion von $n$ ist, die den kleinstmöglichen Wert des Exponenten angibt, ist unbekannt. Ich beweise aber in dieser Arbeit, welche ein Abdruck meiner Inaugural-Dissertation (Göttingen 1920) ist: Es gibt ein positives $a_3 = a_3(\xi)$, so daß die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{a_3}{y^{2\sqrt{n}}}$$

besteht; dies gilt sogar (mit $a_3 = a_3(\xi, \varepsilon)$), wenn $2\sqrt{n}$ durch den besseren Wert $\min\limits_{\lambda=1,\ldots n}\left(\frac{n}{\lambda+1} + \lambda\right) + \varepsilon$ ersetzt wird.

Im folgenden erscheint dies als spezieller Fall eines Satzes über die Stärke der Approximation einer algebraischen Zahl durch eine andere Ist nämlich ein algebraischer Zahlkörper $K$ gegeben, in bezug auf welchen $\xi$ vom Grade $d \geqq 2$ ist, bedeutet $\zeta$ eine primitive Zahl von $K$ und $l$ das Maximum der absolut genommenen teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten der irreduziblen Gleichung für $\zeta$, so gilt für ein gewisses $a_4 = a_4(\xi, K) > 0$

$$|\xi - \zeta| > \frac{a_4}{l^{2\sqrt{d}}}; \tag{C}$$

dies bleibt sogar richtig (mit $a_4 = a_4(\xi, K, \varepsilon)$), wenn $2\sqrt{d}$ durch $\min\limits_{\lambda=1,\ldots d}\left(\frac{d}{\lambda+1} + \lambda\right) + \varepsilon$ ersetzt wird.

Beschränkt man sich bei der Approximation von $\xi$ nicht auf Zahlen eines festen Körpers $K$, sondern läßt für $\zeta$ beliebige algebraische Zahlen eines festen Grades $h < n$ zu, so gilt Ungleichung (C), wenn darin $2\sqrt{d}$ durch $2h\sqrt{n}$ $\left(\text{resp. durch} \min\limits_{\lambda=1,\ldots n}\left(\frac{n}{\lambda+1} + \lambda\right)h + \varepsilon\right)$ ersetzt wird.

§ 1 enthält den Beweis dieser beiden Sätze.

§ 2 gibt einige Anwendungen derselben. Insbesondere (Satz 5) verallgemeinere ich den **Thue**schen Satz über Diophantische Gleichungen auf beliebige algebraische Zahlkörper. Satz 7 dehnt den **Thue-Pólya**schen Satz über die Primteiler quadratischer Funktionen auf beliebige Polynome in beliebigen Zahlkörpern aus. Satz 9 ist die entsprechende

Aussage über gebrochene rationale Funktionen. Satz 8 liefert eine arithmetische Eigenschaft der Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung gewisser gebrochener rationaler Funktionen.

## § 1.

Hilfssatz I. Es seien $\lambda_1, \dots \lambda_h$ irgend welche Zahlen. Es bedeute $A$ den größten der absolut genommenen Koeffizienten des Polynoms $\prod_{\nu=1}^{h}(z-\lambda_\nu)$. Dann ist

$$\prod_{\nu=1}^{h}(1+|\lambda_\nu|) \leqq 6^h A.$$

Beweis[1]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\lambda_1, \dots \lambda_\tau$ diejenigen von den $h$ Zahlen, deren absoluter Betrag $\leqq 2$ ist (wenn es solche gibt). Das Polynom $f(z) = \prod_{\nu=1}^{\tau}(z-\lambda_\nu)$ ist in einem Punkte $z_0$ des Einheitskreises absolut $\geqq 1$; bedeuten nämlich $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\tau$ die sämtlichen $\tau+1$-ten Einheitswurzeln, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\tau}\varepsilon_\nu f(\varepsilon_\nu) = \tau+1,$$

so daß $z_0$ sogar als $\tau+1$-te Einheitswurzel gewählt werden kann. Dann ist

$$(1) \qquad \prod_{\nu=1}^{\tau}(1+|\lambda_\nu|) \leqq (1+2)^\tau = 3^\tau \leqq 3^\tau \left|\prod_{\nu=1}^{\tau}(z_0-\lambda_\nu)\right|.$$

Ist $\tau < h$, so ist für $\nu = \tau+1, \dots h$[2]) wegen $|\lambda_\nu| > 2$

$$\frac{1+|\lambda_\nu|}{|z_0-\lambda_\nu|} \leqq \frac{1+|\lambda_\nu|}{|\lambda_\nu|-|z_0|} = \frac{|\lambda_\nu|+1}{|\lambda_\nu|-1} = 1+\frac{2}{|\lambda_\nu|-1} < 1+\frac{2}{2-1} = 3,$$

$$\prod_{\nu=\tau+1}^{h}(1+|\lambda_\nu|) < 3^{h-\tau}\left|\prod_{\nu=\tau+1}^{h}(z_0-\lambda_\nu)\right|.$$

Wegen (1) ergibt sich

$$\prod_{\nu=1}^{h}(1+|\lambda_\nu|) \leqq 3^h\left|\prod_{\nu=1}^{h}(z_0-\lambda_\nu)\right| \leqq 3^h A\,(|z_0|^h+\dots+1) = 3^h(h+1)A \leqq 6^h A\text{[3]}.$$

---

[1]) Herrn Ostrowski verdanke ich Vereinfachungen beim Beweis der Hilfssätze I und II.

[2]) bzw., wenn $\lambda_1, \dots \lambda_h$ sämtlich absolut $> 2$ sind, für $\nu = 1, \dots h$.

[3]) Für $h \geqq 1$ ist $1+h \leqq 1+\binom{h}{1}+\dots+\binom{h}{h} = (1+1)^h = 2^h$.

Hilfssatz II. Es sei

$$f(x) = a_0 x^h + \dots + a_h$$

ein Polynom mit beliebigen Koeffizienten $a_0, \dots a_h$, deren absolute Beträge das Maximum $a > 0$ haben. Ich setze für irgendein $\lambda$

$$g(x) = (x-\lambda) f(x) = c_0 x^{h+1} + \dots + c_{h+1}, \qquad \max(|c_0|, \dots |c_{h+1}|) = c.$$

Dann ist

$$\frac{a}{c} \leqq h + 1.$$

Beweis[1]. 1. Es sei $|\lambda| \leqq 1$. Dann sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_h$ von $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda}$ gleich

$$c_0, c_0 \lambda + c_1, \dots, c_0 \lambda^h + \dots + c_h,$$

also absolut $\leqq (h+1) c$.

2. Es sei $|\lambda| > 1$. Aus

$$(1 - \lambda y)(a_0 + \dots + a_h y^h) = c_0 + \dots + c_{h+1} y^{h+1},$$
$$\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)(a_h y^h + \dots + a_0) = -\frac{c_{h+1}}{\lambda} y^{h+1} - \dots - \frac{c_0}{\lambda}$$

folgt dann wegen $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$ nach 1.

$$a \leqq (h+1) \frac{c}{|\lambda|} < (h+1) c.$$

Hilfssatz III. Es sei

$$p(x) = k_0 x^h + \dots + k_h \qquad (k_0 > 0)$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das im Körper der rationalen Zahlen reduzibel ist:

$$p(x) = (k_0' x^{h'} + \dots + k_{h'}') q(x) \qquad (0 < h' < h, \ (k_0', \dots k_{h'}') = 1).$$

Setzt man

$$\max(|k_0|, \dots |k_h|) = k, \qquad \max(|k_0'|, \dots |k_{h'}'|) = k',$$

so gilt

$$\frac{k'}{k} \leqq \tau_1,$$

wo $\tau_1$ nur von $h$ abhängt.

Beweis. Ich setze

$$h'' = h - h', \quad q(x) = d(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{h''}), \quad f(x) = k_0' x^{h'} + \dots + k_{h'}',$$

dann ist $d$ ganz rational und $\neq 0$, also absolut $\geqq 1$. Ich füge zu $f(x)$ nacheinander die Faktoren $(x - \lambda_{h''}), \dots (x - \lambda_1)$ hinzu und benutze Hilfssatz II. Es wird

$$\frac{k'}{k} \leqq \frac{d\,k'}{k} \leqq (h'+1)(h'+2)\dots h \leqq h!,$$

so daß $\tau_1 = h!$ das Verlangte leistet.

Hilfssatz IV. Es seien $p_0(x), \dots p_\nu(x)$ Polynome mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper K, die in bezug auf diesen linear unabhängig sind. Dann verschwindet die Determinante

$$W(x) = |p_\lambda^{(\varkappa)}(x)| \qquad (\varkappa = 0, \dots \nu;\ \lambda = 0, \dots \nu)$$

nicht identisch[4]).

Beweis. Für $\nu = 0$ ist der Satz offenbar richtig. Es sei $\nu > 0$ und der Satz für $\nu - 1$ schon bewiesen. Dann ist die Determinante

$$(2) \qquad d_{\nu\nu}(x) = |p_\lambda^{(\varkappa)}(x)| \qquad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1;\ \lambda = 0, \dots \nu - 1)$$

nicht identisch 0. Daher gibt es ein Intervall $x_1 < x < x_2$, in welchem $d_{\nu\nu}(x) \neq 0$ ist. Bei dem folgenden Beweis darf $x$ auf dieses Intervall beschränkt werden.

Die $\nu$ linearen Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x)\, q_\lambda(x) = -p_\nu^{(\varkappa)}(x) \qquad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1)$$

werden wegen $d_{\nu\nu}(x) \neq 0$ durch ein System rationaler Funktionen $q_\lambda(x)$ mit Koeffizienten aus K erfüllt. Ich verstehe unter $d_{\varkappa\lambda}(x)$ für $\varkappa = 0, \dots \nu$; $\lambda = 0, \dots \nu$ die Unterdeterminante von $p_\lambda^{(\varkappa)}(x)$ in $W(x)$; dies ist für $\varkappa = \nu$, $\lambda = \nu$ in Einklang mit der Bezeichnung (2). Ich multipliziere nun die Gleichungen (3) mit $d_{\varkappa\nu}(x)$ für $\varkappa = 0, \dots \nu - 1$ und addiere sie; dann ergibt sich

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} q_\lambda(x) \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\lambda^{(\varkappa)}(x) = -\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\nu^{(\varkappa)}(x).$$

Nun ist $\sum_{\varkappa=0}^{\nu} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\lambda^{(\varkappa)}(x) = 0$ für $\lambda = 0, \dots \nu - 1$, $= W(x)$ für $\lambda = \nu$; und daher

$$-d_{\nu\nu}(x) \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\nu)}(x)\, q_\lambda(x) = d_{\nu\nu}(x)\, p_\nu^{(\nu)}(x) - W(x).$$

Wäre nun $W(x)$ identisch 0, so folgte hieraus wegen des Nichtverschwindens von $d_{\nu\nu}(x)$

$$(4) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\nu)}(x)\, q_\lambda(x) = -p_\nu^{(\nu)}(x);$$

---

[4]) Die Eigenschaften der Wronskischen Determinante sind in der Literatur vielfach entwickelt worden; da aber im folgenden die schärfere arithmetische Voraussetzung benutzt wird, führe ich der Vollständigkeit halber den Beweis an.

(3) würde also auch für $\varkappa = \nu$ gelten. Differentiiere ich die Gleichungen (3) für $\varkappa = 0, \dots \nu - 1$, so erhalte ich

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x) q_\lambda'(x) + \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa+1)}(x) q_\lambda(x) = -p_\nu^{(\varkappa+1)}(x) \quad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1),$$

oder mit Rücksicht auf (3) und (4)

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x) q_\lambda'(x) = 0 \qquad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist $d_{\nu\nu}(x) \neq 0$. Daher ist

$$q_\lambda'(x) = 0 \qquad (\lambda = 0, \dots \nu - 1),$$

also $q_\lambda(x)$ konstant, also als rationale Funktion mit Koeffizienten aus K eine Zahl aus K. Die Gleichung (3) würde also für $\varkappa = 0$ eine homogene lineare Relation zwischen $p_0(x), \dots p_\nu(x)$ mit konstanten Koeffizienten aus K darstellen, die nicht alle 0 sind. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist $\alpha$ eine algebraische Zahl $\neq 0$, so nenne ich den größten der absolut genommenen teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten in der irreduziblen Gleichung für $\alpha$ ihre *Höhe* $H(\alpha)$; dies ist also eine natürliche Zahl, welche durch $\alpha$ eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe dieser Bezeichnung spreche ich folgende Behauptung aus:

Hauptsatz (Satz 1). Es sei $\xi$ eine ganze algebraische Zahl $n$-ten Grades ($n \geqq 2$).

1. Es sei $K_0$ ein fester algebraischer Zahlkörper. $\xi$ genüge einer in $K_0$ irreduziblen Gleichung vom Grade $d \geqq 2$ mit Koeffizienten aus $K_0$. Es sei $s$ eine natürliche Zahl $< d$.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$(5) \qquad |\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{\frac{d}{s+1} + s + \Theta}}$$

nur endlich viele Lösungen in primitiven Zahlen $\eta$ aus $K_0$.

2. Es seien $h$ und $s$ zwei natürliche Zahlen, von denen $s < n$ ist.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$(6) \qquad |\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{h\left(\frac{n}{s+1} + s\right) + \Theta}}$$

nur endlich viele Lösungen in algebraischen Zahlen $\eta$ vom Grade $h$.

Dem Beweise schicke ich noch einige Hilfssätze voraus, von denen der erste auch an und für sich von Interesse ist.

Im folgenden bedeutet $\Omega$ den Körper der rationalen Zahlen. Ist $P$ irgendein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, so bedeute $\boxed{P}$ das Maximum der absoluten Beträge dieser Koeffizienten und ihrer in bezug auf $\Omega$ Konjugierten[5]).

Hilfssatz V. Es sei $\mathsf{P}$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n_0$. Es sei $\xi$ eine ganze algebraische Zahl $n$-ten Grades, die in bezug auf $\mathsf{P}$ vom Grade $d$ $(n \geqq d \geqq 2)$ ist, d. h. die einer in $\mathsf{P}$ irreduziblen Gleichung $d$-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathsf{P}$ genügt. Der Körper $\mathsf{P}(\xi)$ werde mit $K$ bezeichnet; sein Grad ist $d n_0 \geqq n$.

Es seien $r$ und $s$ zwei natürliche Zahlen, von denen $s \leqq d - 1$ ist. Es sei $0 < \vartheta < 1$. Ich setze

$$m = \left[\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - 1\right) r\right]; \tag{7}$$

$m$ ist also eine ganze rationale Zahl $\geqq 0$.

Behauptung. Es gibt

1. zwei von $\mathsf{P}$, $\xi$, $r$, $s$, $\vartheta$ abhängige Polynome $F(x, y)$ und $G(x, y)$ von den Graden[6]) $m$ in $x$, $s$ in $y$, und $m + r$ in $x$, $s - 1$ in $y$, mit ganzen Koeffizienten aus $K$,

2. ein ebenfalls von $\mathsf{P}$, $\xi$, $r$, $s$, $\vartheta$ abhängiges nicht identisch verschwindendes Polynom $R(x, y)$ vom Grade $m + r$ in $x$, $s$ in $y$, mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{P}$,

3. zwei nur von $\xi$, $\mathsf{P}$, $\vartheta$ und nicht von $r$, $s$ abhängige positive Zahlen $c_1$, $c_2$ mit folgenden Eigenschaften:

I. Es gilt die Identität

$$(x - \xi)^r F(x, y) + (y - \xi) G(x, y) = R(x, y); \tag{8}$$

II. es ist

$$\boxed{F} < c_1^r, \qquad \boxed{G} < c_1^r, \qquad \boxed{R} < c_1^r; \tag{9}$$

III. wird für jedes ganze $\varrho$ des Intervalls $0 \leqq \varrho \leqq r$

$$R_\varrho(x, y) = \frac{\partial^\varrho R(x, y)}{\varrho!\, \partial x^\varrho}\,{}^{7)}, \tag{10}$$

$$F_\varrho(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho - \lambda} (x - \xi)^\lambda \frac{\partial^\lambda F(x, y)}{\lambda!\, \partial x^\lambda}, \tag{11}$$

$$G_\varrho(x, y) = \frac{\partial^\varrho G(x, y)}{\varrho!\, \partial x^\varrho} \tag{12}$$

gesetzt, so ist

---

[5]) Ich benutze diese Bezeichnung auch, wenn $P$ eine Konstante ist.

[6]) Unter Grad ist bei Polynomen nie der genaue Grad gemeint.

[7]) 0-te Ableitung einer Funktion bedeutet natürlich diese Funktion selbst.

$$(13)\qquad (x-\xi)^{r-\varrho}F_\varrho(x,y)+(y-\xi)G_\varrho(x,y)=R_\varrho(x,y),$$

$$(14)\qquad \begin{cases} |F_\varrho(x,y)|<c_2^r(1+|x|)^m(1+|y|)^s, \\ |G_\varrho(x,y)|<c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s, \quad (x,y \text{ beliebig komplex}) \\ |R_\varrho(x,y)|<c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s; \end{cases}$$

und dieselben Abschätzungen gelten für die konjugierten Polynome[8]).

Beweis. Es sei $a$ eine natürliche Zahl. Ich betrachte diejenigen Polynome $P(x,y)$ vom Grade $m+r$ in $x$, $s$ in $y$, mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{P}$, welche der Bedingung $\overline{|P|}\leqq a$ genügen. Ihre offenbar endliche Anzahl sei $N$.

Es gibt eine Basis $\omega_1,\ldots\omega_{n_0}$ von $\mathsf{P}$, so daß

$$\max\left(\overline{|\omega_1|},\ldots\overline{|\omega_{n_0}|}\right)\leqq c_3$$

ist, wo $c_3$ (wie auch im folgenden $c_4,\ldots$) eine natürliche Zahl bedeutet, die nur von $\xi$, $\mathsf{P}$, $\vartheta$ abhängt.

$n_0$ ganze rationale Zahlen $a_1,\ldots a_{n_0}$ mögen den Bedingungen

$$|a_\nu|\leqq\frac{a}{c_3 n_0}\qquad(\nu=1,\ldots n_0)$$

genügen; dann gilt für $\alpha=\sum_{\nu=1}^{n_0}a_\nu\omega_\nu$ die Ungleichung $\overline{|\alpha|}\leqq a$.

Die Anzahl der Koeffizienten von $P(x,y)$ ist $(m+r+1)(s+1)$. Da für jedes ganze rationale $a_\nu$ $(\nu=1,\ldots n_0)$ zwischen $-\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right]$ und $+\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right]$ die Zahl $\alpha$ einen Koeffizienten eines zulässigen $P$ bildet, so ist

$$(15)\qquad N\geqq\left(2\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right]+1\right)^{n_0(m+r+1)(s+1)}>\left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0(m+r+1)(s+1)}$$

Ich setze nun

$$\frac{\partial^\lambda P(x,y)}{\lambda!\,\partial x^\lambda}=P_\lambda(x,y)\,^{7}),\qquad(\lambda=0,\ldots r-1).$$

Dann ist

$$\overline{|P_\lambda|}\leqq\binom{m+r}{\lambda}\overline{|P|},$$

oder, wegen

$$\binom{m+r}{\lambda}<\binom{m+r}{0}+\ldots+\binom{m+r}{\lambda}+\ldots+\binom{m+r}{m+r}=(1+1)^{m+r}=2^{m+r},$$

$$\overline{|P_\lambda|}\leqq 2^{m+r}\overline{|P|}\leqq 2^{m+r}a;$$

also, wenn $\overline{|\xi|}=b$ gesetzt wird,

$$\overline{|P_\lambda(\xi,\xi)|}\leqq 2^{m+r}a(1+b+\ldots+b^{m+r-\lambda})(1+b+\ldots+b^s)\leqq 2^{m+r}(1+b)^{m+r+s}c$$

[8]) d. h. die Polynome, deren Koeffizienten zu denen von $F_\varrho$, $G_\varrho$, $R_\varrho$ konjugiert sind.

Nach (7) ist

$$m + r < m + r + s \leqq \frac{d+\vartheta}{s+1} r + s < \frac{n+1}{2} r + n < c_5 r,$$

(16) $$\overline{|P_\lambda(\xi,\xi)|} < c_6^r a = t.$$

Es sei $\alpha$ eine der $r$ Zahlen $P_\lambda(\xi,\xi)$ $(\lambda = 0, \dots r-1)$. Von den zu $K$ konjugierten Körpern seien $K^{(1)}, \dots K^{(r_1)}$ reell und die Paare $K^{(r_1+\nu)}$, $K^{(r_1+r_2+\nu)}$ $(\nu = 1, \dots r_2;\ d n_0 = r_1 + 2 r_2$, wobei $r_1$' oder $r_2$ auch 0 sein kann) konjugiert komplex; dann ist zu jedem $\alpha$ durch die Gleichungen

$$\alpha_\nu = \alpha^{(\nu)} \text{ für } \nu = 1, \dots r_1;\quad \alpha_\nu + i\alpha_{r_2+\nu} = \alpha^{(\nu)} \text{ für } \nu = r_1 + 1, \dots r_1 + r_2$$

ein System von $d n_0$ reellen Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{d n_0}$ eindeutig bestimmt. Für jedes der $N$ Polynome $P(x,y)$ mit $\overline{|P|} \leqq a$ wird also durch die $r$ Zahlen $P_\lambda(\xi,\xi)$ ein Punkt eines $d n_0 r$-dimensionalen Raumes erzeugt, und jeder solche Punkt liegt wegen (16) in einem festen Würfel von der Kantenlänge $2t$. Zerlegt man bei jeder Koordinate die Strecke $-t$ bis $+t$ in $3t$ gleiche Teile, so zerfällt dieser Würfel in $(3t)^{d n_0 r}$ Teilwürfel von der Kantenlänge $\frac{2}{3}$.

Ist nun die Anzahl der Polynome $P(x,y)$

(17) $$N > (3t)^{d n_0 r},$$

also größer als die Anzahl der Teilwürfel, so liegt für mindestens zwei Polynome $P^*$ und $P^{**}$ der ihnen zugeordnete Punkt in oder auf demselben Teilwürfel. Es gelten daher die Ungleichungen

$$\overline{|P_\lambda^*(\xi,\xi) - P_\lambda^{**}(\xi,\xi)|} \leqq \sqrt{2}\,\frac{2}{3} < 1 \quad (\lambda = 0, \dots r-1).$$

Links steht eine ganze algebraische Zahl $P_\lambda^* - P_\lambda^{**}$; da ihre Norm $< 1$ ist, so ist sie 0. Die Entwicklung von $R = P^* - P^{**}$ nach Potenzen von $x - \xi$ und $y - \xi$ hat also die Form

(18) $$R(x,y) = (x-\xi)^r F(x,y) + (y-\xi) G(x,y),$$

wo die Koeffizienten von $F$ und $G$ ganze Zahlen aus $K$ sind, während die Koeffizienten von $R$ in P liegen und nebst ihren Konjugierten absolut $\leqq 2a$ sind.

Nach (15) und (16) ist für das Bestehen von (17) hinreichend

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0(m+r+1)(s+1)} > (3 c_6^r a)^{n_0 d r},$$

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{(m+r+1)(s+1)} > (3 c_6^r a)^{d r}.$$

Wegen (7) ist nun

$$(m+r+1)(s+1) = \left(\left[\frac{d+\vartheta}{s+1} r\right] + 1\right)(s+1) > (d+\vartheta) r,$$

so daß es genügt,

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{d+\vartheta} > (3\,c_8^r a)^d,$$

$$a = c_7^r$$

zu setzen.

(18) wird durch

$$F(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{s} (x-\xi)^{\varkappa} (y-\xi)^{\lambda} \left(\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+r} R(x,y)}{(\varkappa+r)!\,\lambda!\,\partial x^{\varkappa+r}\,\partial y^{\lambda}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi},$$

$$G(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{s-1} (x-\xi)^{\varkappa} (y-\xi)^{\lambda} \left(\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+1} R(x,y)}{\varkappa!\,(\lambda+1)!\,\partial x^{\varkappa}\,\partial y^{\lambda+1}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi}$$

erfüllt. Wegen

$$\overline{\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta} R(x,y)}{\alpha!\,\beta!\,\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\right|} \leqq \binom{m+r}{\alpha}\binom{s}{\beta}\overline{|R|} < 2^{m+r+s}\,2\,a < c_8^r,$$

$$\overline{\left|\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} R(x,y)}{\alpha!\,\beta!\,\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi}\right|} < c_8^r (1+b+\ldots+b^{m+r-\alpha})(1+b+\ldots+b^{s-\beta})$$

$$\leqq c_8^r (1+b)^{m+r+s} < c_9^r$$

(für $\alpha \leqq m+r$, $\beta \leqq s$) ist[9])

$$\overline{|F(x,y)|} < (1+2b)^m (1+2b)^s c_9^r < c_{10}^r,$$

$$\overline{|G(x,y)|} < (1+2b)^{r-1} (1+2b)^{s-1} c_9^r < c_{11}^r.$$

Setzt man $\max(3c_7, c_{10}, c_{11}) = c_1$, so sind die Teile I und II der Behauptung bewiesen.

Ich differentiiere (8) $\varrho$-mal nach $x$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{\varrho}{\lambda}\binom{r}{\varrho-\lambda}(\varrho-\lambda)!\,(x-\xi)^{r-\varrho+\lambda}\,\lambda!\,\frac{\partial^{\lambda} F(x,y)}{\lambda!\,\partial x^{\lambda}} + (y-\xi)\,\varrho!\,G_{\varrho}(x,y) = \varrho!\,R_{\varrho}(x,y$$

$$(x-\xi)^{r-\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho-\lambda}\binom{\varrho}{\lambda}\frac{\lambda!\,(\varrho-\lambda)!}{\varrho!}(x-\xi)^{\lambda}\,\frac{\partial^{\lambda} F(x,y)}{\lambda!\,\partial x^{\lambda}} + (y-\xi)\,G_{\varrho}(x,y) = R_{\varrho}(x,y$$

Wird die Relation

$$\binom{\varrho}{\lambda} = \frac{\varrho!}{\lambda!\,(\varrho-\lambda)!}$$

berücksichtigt, so entsteht (13).

Wegen (9) folgt aus (12) und (10)

$$\overline{|G_{\varrho}|} \leqq \binom{m+r}{\varrho}\overline{|G|} < 2^{m+r} c_1^r < c_{12}^r, \quad \overline{|R_{\varrho}|} < c_{12}^r,$$

---

[9]) Mit Rücksicht auf $b \geqq 1$.

und aus (11)

$$|\overline{F_\varrho}| \leqq \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho-\lambda}\left(1+\binom{\lambda}{1}b+\ldots+b^\lambda\right)\binom{m}{\lambda}c_1^r < 2^r c_1^r \sum_{\lambda=0}^{m}\binom{m}{\lambda}(1+b)^\lambda$$
$$= (2c_1)^r(2+b)^m < c_{13}^r.$$

Ich setze $c_2 = \max(c_{12}, c_{13})$; dann ist

$$|F_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s}|x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^m(1+|y|)^s,$$

$$|G_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m+r-\varrho}\sum_{\lambda=0}^{s-1}|x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s,$$

$$|R_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m+r-\varrho}\sum_{\lambda=0}^{s}|x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s,$$

womit auch Teil III der Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz VI. $\mathsf{P}, \xi, \vartheta, d, m, n, r, s$ haben die Bedeutung des vorigen Hilfssatzes V; außerdem mögen für $r$ und $\vartheta$ die Ungleichungen

$$r \geqq 2n^2, \tag{19}$$

$$\vartheta \leqq \frac{1}{2} \tag{20}$$

gelten. Für das in demselben Hilfssatz bestimmte Polynom $R(x,y)$ werde

$$R(x,y) = \sum_{\mu=0}^{s} f_\mu(x)\, y^\mu \tag{21}$$

gesetzt. Es bezeichne $s'+1$ die Anzahl in bezug auf $\mathsf{P}$ linear unabhängiger unter den $s+1$ Polynomen $f_0(x), \ldots f_s(x)$. $s'$ ist $\geqq 0$, da die Polynome nicht sämtlich identisch 0 sind; und es ist $s' \leqq s$. Es seien $\lambda_0, \ldots \lambda_{s'}$ so gewählt, daß $f_{\lambda_0}(x), \ldots f_{\lambda_{s'}}(x)$ in $\mathsf{P}$ linear unabhängig sind. Dann sind also $\lambda_0, \ldots \lambda_{s'}$ verschiedene Zahlen der Reihe 0 bis $s$. Gegeben sei eine feste von den zu $\xi$ in bezug auf $\mathsf{P}$ Konjugierten verschiedene Zahl $\eta$. Es werde die Determinante

$$|f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x)| = \Delta(x) \qquad (\alpha = 0, \ldots s';\ \beta = 0, \ldots s')$$

gesetzt.

Behauptung. Es gibt eine nicht negative ganze Zahl $\gamma \leqq \vartheta r + n(n-1)$, also nach (19) und (20) $\leqq \frac{1}{2}r + \frac{r}{2} - n = r - n$, derart, daß die Zahl

$$\Delta^{(\gamma)}(\eta) = \left(\frac{d^\gamma \Delta(x)}{dx^\gamma}\right)_{x=\eta}$$

nicht 0 ist.

Beweis. Drücke ich alle $f_\mu(x)$ $(\mu = 0, \ldots s)$ durch $f_{\lambda_0}(x), \ldots f_{\lambda_{s'}}(x)$ aus, so gehe (21) über in

(22) $$R(x,y) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}(x)\, U_\beta(y),$$

wo $U_\beta(y)$ ein Polynom $s$-ten Grades in $y$ mit Koeffizienten aus P bedeutet, das nicht identisch 0 ist. Nach Hilfssatz IV ist wegen der linearen Unabhängigkeit der $f_{\lambda_\beta}(x)$ das Polynom $\Delta(x)$ nicht identisch 0.

Aus (22) und (8) folgt für jedes $\alpha$ der Reihe $0, \ldots s'$

$$\sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x)\, U_\beta(\xi) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\{(x-\xi)^r F(x,\xi)\}.$$

Diese Gleichung multipliziere ich mit der Unterdeterminante $\Delta_\alpha(x)$ von $f_{\lambda_0}^{(\alpha)}(x)$ in $\Delta(x)$[10]) und summiere über $\alpha$ von 0 bis $s'$. Dann ergibt sich

(23) $$\Delta(x)\, U_0(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{s'} \Delta_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\{(x-\xi)^r F(x,\xi)\}.$$

Wegen (19) ist $\alpha \leqq s' \leqq s < n < r$; also $r - \alpha > 0$.

$U_0(y)$ ist vom Grade $s < d$, verschwindet also für $y = \xi$ nicht. Die Gleichung (23) lehrt nun, daß $\Delta(x)$ durch $(x-\xi)^{r-s'}$ teilbar ist. Es bedeute

$$\varphi(x) = x^d + \ldots = 0$$

die in P irreduzible Gleichung für $\xi$. $\Delta(x)$ ist in P rational; daher geht $\varphi(x)^{r-s'}$ in $\Delta(x)$ auf:

(24) $$\Delta(x)\, U_0(\xi) = \varphi(x)^{r-s'} D(x),$$

wo $D(x)$ nicht identisch 0 ist.

In der Zeile $\alpha$ von $\Delta(x)$ hat jedes Element den Grad $m + r - \alpha$. $\Delta(x)$ hat also den Grad

$$\sum_{\alpha=0}^{s'} (m + r - \alpha) = (s'+1)\left(m + r - \frac{s'}{2}\right) \leqq (s'+1)(m+r).$$

Den wahren Grad von $D(x)$ nenne ich $\delta$; dann ist nach (24)

$$\delta \leqq (s'+1)(m+r) - d(r-s').$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(\eta) \neq 0$. $\Delta(x)$ verschwindet also für $x = \eta$ höchstens von $\delta$-ter Ordnung. Ich kann daher ein $\gamma$ so wählen, daß $0 \leqq \gamma \leqq \delta$ und $\Delta^{(\gamma)}(\eta) \neq 0$ ist. Für dieses $\gamma$ gilt nach (7)

$$\gamma \leqq \delta \leqq (s'+1)(m+r) - d(r-s') \leqq (s+1)\frac{d+\vartheta}{s+1} r - dr + ds' \leqq \vartheta r + ds \leqq \vartheta r + n(n-1).$$

---

[10]) Ist $s' = 0$, so bedeute $\Delta_0(x)$ die Zahl 1.

Hilfssatz VII. $\mathsf{P}, \xi, \vartheta, m, n_0, r, s, c_1, R(x, y)$ haben die Bedeutung des Hilfssatzes V. Es sei $\zeta$ eine algebraische Zahl vom Grade $t \geqq 1$. Die in $\Omega$ irreduzible Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten, welcher sie genügt, sei

$$\chi(z) = l_0 z^t + \ldots + l_t = 0 \qquad (l_0 > 0).$$

Ich setze

$$H(\zeta) = \max(|l_0|, \ldots |l_t|) = l.$$

Dann gibt es ein positives $c_{14} = c_{14}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$ derart, daß für $l > c_{14}^r$ das Polynom $R(x, \zeta)$ nicht identisch 0 ist.

Beweis. 1. Es sei $t > n_0 s$.

$R(x, y)$ ist in $y$ vom Grade $s$. $R(x, \zeta)$ ist nicht identisch 0; denn sonst würde $\zeta$ in $\mathsf{P}$ einer Gleichung vom Grade $s < \frac{t}{n_0}$, also in $\Omega$ einer Gleichung vom Grade $n_0 s < t$ genügen. Dies gilt für jedes $l > 0$.

2. Es sei $t \leqq n_0 s$.

Sind $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(t)}$ zu $\zeta$ in bezug auf $\Omega$ konjugiert, so ist

$$l_0 \prod_{\nu=1}^{t} (y - \zeta^{(\nu)}) = l_0 y^t + \ldots + l_t.$$

Ich setze $\overline{|\zeta|} = \mathsf{Z}$. Der Koeffizient von $y^{t-\lambda}$ in $l_0(y + \mathsf{Z})^t$ ist nicht kleiner als $|l_\lambda|$:

$$l_0 \binom{t}{\lambda} \mathsf{Z}^\lambda \geqq |l_\lambda|.$$

Nun sei $\lambda$ insbesondere derjenige Index der Reihe 0 bis $t$, für welchen $|l_\lambda|$ seinen größten Wert $l$ annimmt; dann ist wegen $\binom{t}{\lambda} < 2^t$

$$l_0 2^t \mathsf{Z}^\lambda > l,$$

also, wenn $\max(1, \mathsf{Z}) = \mathsf{Z}'$ gesetzt wird,

$$(25) \qquad (2\mathsf{Z}')^t > \frac{l}{l_0}.$$

Ich nehme an: $R(x, \zeta)$ verschwindet identisch. Das Produkt der $n_0$ zu $R(x, y)$ konjugierten Polynome, die Norm $N(R(x, y))$, hat ganze rationale Koeffizienten und verschwindet für $y = \zeta$, ist daher durch $\chi(y)$ teilbar. Setzt man

$$N(R) = \sum_{\varkappa=0}^{n_0(m+r)} b_\varkappa(y) x^\varkappa,$$

so ist auch für jedes $\varkappa$ das Polynom $\chi(y)$ ein Teiler von $b_\varkappa(y)$. Es sei

$$b(y) = g_0 y^\sigma + \ldots + g_\sigma \qquad (g_0 \neq 0,\ 0 \leqq \sigma \leqq n_0 s)$$

ein nicht identisch verschwindendes von den Polynomen $b_\varkappa(y)$. Nach einem Satze von Gauß hat das Polynom $\frac{b(y)}{\chi(y)}$ ganze Koeffizienten; insbesondere ist $\frac{g_0}{l_0}$ ganz rational; also

$$l_0 \leqq |g_0|. \tag{26}$$

Die $n_0$ Konjugierten zu $R(x, y)$ haben je $(m+r+1)(s+1)$ Koeffizienten, deren jeder nach (9) absolut $< c_1^r$ ist. Jeder Koeffizient in ihrem Produkt ist daher absolut $< (m+r+1)^{n_0-1}(s+1)^{n_0-1} c_1^{n_0 r} < c_{15}^r$; also ist auch

$$\max(|g_0|, \dots |g_\sigma|) = g < c_{15}^r. \tag{27}$$

Wegen $t \leqq \sigma$ ist $\sigma \geqq 1$. Ist $|y| > \sigma \frac{g}{|g_0|}$, also $>1$, so gilt

$$|b(y)| \geqq |g_0 y^\sigma| - g(|y|^{\sigma-1} + \dots + 1) \geqq |g_0 y^{\sigma-1}| \left(|y| - \sigma \frac{g}{|g_0|}\right) > 0.$$

Daher folgt aus $b(\zeta) = 0$ wegen (26)

$$Z' \leqq \sigma \frac{g}{|g_0|} \leqq \sigma \frac{g}{l_0},$$

und wegen (25) und (27)

$$\frac{l}{l_0} < \left(2\sigma \frac{c_{15}^r}{l_0}\right)^t,$$

$$l_0^{t-1} l < (2\sigma c_{15}^r)^t \leqq (2 n_0 s c_{15}^r)^{n_0 s} < c_{14}^r.$$

Nun ist $l_0 \geqq 1$, also a fortiori

$$l < c_{14}^r.$$

Für $l > c_{14}^r$ kann daher $R(x, \zeta)$ nicht identisch verschwinden.

Hilfssatz VIII. $\mathsf{P}, \xi, \vartheta, m, n, r, s, c_2, R(x, y)$ haben die Bedeutung des Hilfssatzes V. $c_{14}$ sei die Konstante des vorigen Hilfssatzes VII. Für $r$ und $\vartheta$ seien die Ungleichungen (19) und (20) des Hilfssatzes VI erfüllt.

Es sei $\eta$ eine algebraische Zahl $t$-ten Grades ($t \geqq 1$), die von den zu $\xi$ in bezug auf $\Omega$ Konjugierten verschieden ist. Sie genüge der in $\Omega$ irreduziblen Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten

$$\psi(y) = k_0 y^t + \dots + k_t = 0 \qquad (k_0 > 0);$$

und es werde gesetzt

$$H(\eta) = \max(|k_0|, \dots |k_t|) = k.$$

Es sei $\zeta$ eine algebraische Zahl $t$-ten Grades. Sie genüge der in $\Omega$ irreduziblen Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten

$$\chi(z) = l_0 z^t + \dots + l_t = 0 \qquad (l_0 > 0).$$

Ihre Höhe erfülle die Bedingung

$$H(\zeta) = \max(|l_0|, \ldots |l_t|) = l > c_{14}^r.$$

Der Körper $\mathsf{P}(\eta, \zeta)$ sei vom Grade $t'$.

Behauptung. Es gibt ein $\varrho$ des Intervalls $0 \leqq \varrho < \vartheta r + n^2$, also nach (19) und (20) $< r$, und ein positives $c_{16} = c_{16}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$ derart, daß eine der Zahlen

$$E_1 = c_{16}^{t'r} (k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}} |\xi - \eta|^{r-\varrho}, \quad E_2 = c_{16}^{t'r} (k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}} |\xi - \zeta|$$

größer als 1 ist.

Beweis. Wegen $l > c_{14}^r$ ist nach Hilfssatz VII $R(x, \zeta)$ nicht identisch 0. Nun war

$$R(x, \zeta) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}(x)\, U_\beta(\zeta);$$

mindestens ein $U_\beta(\zeta)$ ist also $\neq 0$. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß dies für $\beta = 0$ zutrifft. Aus den $s' + 1$ Gleichungen

$$\alpha!\, R_\alpha(x, \zeta) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x)\, U_\beta(\zeta) \qquad (\alpha = 0, \ldots s')$$

folgt

$$\Delta(x)\, U_0(\zeta) = \sum_{\alpha=0}^{s'} \Delta_\alpha(x)\, \alpha!\, R_\alpha(x, \zeta). \tag{28}$$

Die Voraussetzung des Hilfssatzes VI ist für $\eta$ erfüllt. Für das dort bestimmte $\gamma \leqq \vartheta r + n(n-1)$ ist $\Delta^{(\gamma)}(\eta) \neq 0$. Nach (28) setzt sich $\Delta^{(\gamma)}(\eta)$ homogen und linear aus $R_\varkappa(\eta, \zeta)$ $(\varkappa = 0, \ldots \gamma + s')$ zusammen. Eine dieser Zahlen ist daher $\neq 0$; und für den zugehörigen Index $\varkappa = \varrho$ gilt

$$\varrho \leqq \gamma + s' < \vartheta r + n(n-1) + n = \vartheta r + n^2 \leqq r. \tag{29}$$

Die Konjugierten zu $\eta$ und $\zeta$ in bezug auf $\Omega$ seien $\eta^{(\varkappa)}$ und $\zeta^{(\lambda)}$ $(\varkappa = 1, \ldots t;\ \lambda = 1, \ldots t)$. $R_\varrho(x, y)$ ist ein Polynom vom Grade $m + r - \varrho$ in $x$, $s$ in $y$, mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{P}$. Die Norm der Zahl $R_\varrho(\eta, \zeta)$ in bezug auf $\Omega$, die ich kurz $N(\eta, \zeta)$ nenne, ist eine Summe von Potenzprodukten der $\eta^{(\varkappa)}$ und $\zeta^{(\lambda)}$ mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{P}$, und zwar tritt in einem solchen Produkt ein Faktor $\eta^{(\varkappa)}$ oder $\zeta^{(\lambda)}$ höchstens in der Potenz $\frac{t'}{t}(m + r - \varrho)$ oder $\frac{t'}{t} s$ auf.

Bedeuten $\eta_1, \eta_2, \ldots$ einige verschiedene der Zahlen $\eta^{(\varkappa)}$, so ist nach einem zahlentheoretischen Satze $k_0 \eta_1 \eta_2 \ldots$ eine ganze algebraische Zahl, dasselbe gilt von $l_0 \zeta_1 \zeta_2 \ldots$, wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ verschiedene Zahlen $\zeta^{(\lambda)}$ bedeuten. Folglich ist $k_0^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)} l_0^{\frac{t'}{t} s} |N(\eta, \zeta)|$ eine ganze algebraische Zahl.

Andererseits ist $|N(\eta, \zeta)|$ eine positive rationale Zahl. Daraus folgt

$$(30) \qquad (k_0^{m+r-\varrho} l_0^s)^{\frac{t'}{t}} |N(\eta, \zeta)| \geqq 1.$$

Die Konjugierten in bezug auf $\Omega$ von $R_\varrho(\eta, \zeta)$ seien $\{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \ldots t'$); insbesondere sei $\{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(1)} = R_\varrho(\eta, \zeta)$, sowie ferner $\eta^{(1)} = \eta$, $\zeta^{(1)} = \zeta$. Dann ist nach (30), wenn Gleichung (13) benutzt wird,

$$(31) \quad (k_0^{m+r-\varrho} l_0^s)^{\frac{t'}{t}} |(\eta - \xi)^{r-\varrho} F_\varrho(\eta, \zeta) + (\zeta - \xi) G_\varrho(\eta, \zeta)| \left|\prod_{\nu=2}^{t'} \{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(\nu)}\right| \geqq 1$$

Mit Rücksicht auf die Abschätzungen (14) ist nun wegen $\varrho < r$

$$|(\eta - \xi)^{r-\varrho} F_\varrho(\eta, \zeta) + (\zeta - \xi) G_\varrho(\eta, \zeta)|$$
$$< c_2^r (|\eta - \xi|^{r-\varrho} + |\zeta - \xi|)(1 + |\eta|)^{m+r-\varrho}(1 + |\zeta|)^s;$$

$$\left|\prod_{\nu=2}^{t'} \{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(\nu)}\right|$$
$$< c_2^{(t'-1)r} \{(1+|\eta|)^{m+r-\varrho}(1+|\zeta|)^s\}^{\frac{t'}{t}-1} \prod_{\nu=2}^{t} \{(1+|\eta^{(\nu)}|)^{m+r-\varrho}(1+|\zeta^{(\nu)}|)^s\}^{\frac{t'}{t}},$$

so daß (31) übergeht in

$$c_2^{t'r}(|\eta - \xi|^{r-\varrho} + |\zeta - \xi|)\left\{k_0 \prod_{\nu=1}^{t}(1 + |\eta^{(\nu)}|)\right\}^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)} \left\{l_0 \prod_{\nu=1}^{t}(1 + |\zeta^{(\nu)}|)\right\}^{\frac{t'}{t}s} > 1.$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz I

$$c_2^{t'r}(|\eta - \xi|^{r-\varrho} + |\zeta - \xi|)(6^t k)^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)} (6^t l)^{\frac{t'}{t}s} > 1;$$

folglich ist für ein gewisses positives $c_{16} = c_{16}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$

$$c_{16}^{t'r}(k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}} (|\eta - \xi|^{r-\varrho} + |\zeta - \xi|) > 2,$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich zum

Beweis des Hauptsatzes. 1. Es liege Teil 1 des Hauptsatzes vor. Dann bedeute der Körper $\mathsf{P}$ vom Grade $n_0$ des Hilfssatzes V den Körper $K_0$, dessen Grad $h$ sei; so daß $n_0 = h$ ist. Unter $h'$ verstehe ich die Zahl 1.

2. Es liege Teil 2 des Hauptsatzes vor. Dann bedeute der Körper $\mathsf{P}$ des Hilfssatzes V den Körper der rationalen Zahlen $\Omega$, so daß $n_0 = 1$, $d = n$ ist. Unter $h'$ verstehe ich die Zahl $h$.

Führe ich die Abkürzung

$$(32) \qquad \beta = h'\left(\frac{d}{s+1} + s\right) + \Theta$$

ein, so lassen sich die Ungleichungen (5) und (6) zu

$$(33) \qquad |\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{\beta}}$$

vereinigen. Im folgenden wird der Beweis für beide Teile des Hauptsatzes zugleich geführt; um zum ersten Teil zu gelangen, hat man also $h' = 1$ zu setzen, während man zum zweiten Teil durch die Annahme $h' = h$, $d = n$ kommt. Es genügt offenbar, $\Theta \leqq 1$ anzunehmen.

Ich setze

$$(34) \qquad \vartheta = \frac{\Theta}{4hn}.$$

$c_{16}^{\cdot}$ habe die zu diesem $\vartheta$ gehörige Bedeutung im Sinne des letzten Hilfssatzes VIII. Es sei

$$c_{16}^{hh'} = j.$$

Ich nehme an: Die Ungleichung (33) hat unendlich viele Lösungen. Dann wähle ich eine Lösung $\eta$ folgendermaßen: Es ist $\eta$ von den zu $\xi$ in bezug auf $\Omega$ Konjugierten verschieden und es gilt

$$(35) \qquad H(\eta) = k > \max\left(j^{\frac{4}{\Theta}}, c_{14}\right),$$

wo $c_{14}$ die Konstante des Hilfssatzes VII bedeutet. Eine zweite Lösung $\zeta$ von (33) bestimme ich hierauf derart, daß

$$(36) \qquad H(\zeta) = l > k^{\frac{8hn^3}{\Theta}+1}$$

ist. Ich setze

$$(37) \qquad r = \left[\frac{\log l}{\log k}\right];$$

dann sind, so behaupte ich, für $\eta$ und $\zeta$ alle Voraussetzungen des Hilfssatzes VIII erfüllt. Es ist nämlich wegen (34) $\vartheta < \frac{1}{2}$, also (20) erfüllt; wegen (36) und (37)

$$(38) \qquad r \geqq \left[\frac{8hn^3}{\Theta} + 1\right] > \frac{8hn^3}{\Theta} > 2n^2,$$

also (19) erfüllt; $\eta$ von den zu $\xi$ in bezug auf $\Omega$ Konjugierten verschieden; für $\zeta$ wegen (35) und (37) die Ungleichung $l > c_{14}^{r}$ erfüllt. Der Grad $t'$ des Körpers $\mathsf{P}(\eta, \zeta)$ von Hilfssatz VIII ist im vorliegenden Falle $\leqq hh'$; nach dem Hilfssatz ist also mindestens eine der Zahlen

$$(39) \quad \overline{E}_1 = j^r (k^{m+r-\varrho} l^s)^{h'} |\xi - \eta|^{r-\varrho}, \quad \overline{E}_2 = j^r (k^{m+r-\varrho} l^s)^{h'} |\xi - \zeta|$$

größer als 1.

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$\Theta - h' \frac{\vartheta}{s+1} - (\beta - h') \frac{\varrho}{r} - \frac{\log j}{\log k} = \varepsilon.$$

Dann ist nach (29), (34) und (38)

$$\frac{\varrho}{r} < \vartheta + \frac{n^2}{r} < \frac{\Theta}{4hn} + \frac{n^2}{\frac{8hn^3}{\Theta}} = \frac{3\Theta}{8hn};$$

ferner nach (32)

$$\beta - h' = h'\left(\frac{d}{s+1} + s - 1\right) + \Theta \leqq h\left(\frac{n}{s+1} + s - 1\right) + 1 \leqq h\left(\frac{n}{s+1} + s\right) \leqq hn\text{[11]}.$$

Wegen (34) und (35) ist

$$(40)\qquad \varepsilon > \Theta - h\frac{\frac{\Theta}{4hn}}{2} - \frac{3\Theta}{8hn}hn - \frac{\Theta}{4} = \Theta - \frac{\Theta}{8n} - \frac{3\Theta}{8} - \frac{\Theta}{4} > \frac{\Theta}{4} > 0.$$

Wegen $\log j \geqq 0$, $\varrho < r$ ist

$$(41)\qquad 0 < h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right) + \frac{\log j}{\log k} = \beta + h'\left(\frac{\vartheta}{s+1} - s\right) - \Theta - h'\frac{\varrho}{r}$$

$$+ \frac{\log j}{\log k} = \beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h's - \varepsilon,$$

also nach (40)

$$(42)\qquad r \leqq \frac{\log l}{\log k} < \frac{\log l}{\log k}\,\frac{\beta - h's}{\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h's - \varepsilon} = \frac{(\beta - h's)\log l}{\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)h'\log k + \log j}.$$

Die Beziehung (41) liefert

$$\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right) - \frac{\log j}{\log k} = h's + \varepsilon > 0,$$

also, nach (37), (38) und (40),

$$(43)\qquad r > \frac{\log l}{\log k} - 1 = \frac{\log l}{\log k}\,\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + \frac{\log l}{\log k}\,\frac{\frac{\Theta}{4}}{h's + \frac{\Theta}{4}} - 1$$

$$> \frac{\log l}{\log k}\,\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + \frac{8hn^3}{\Theta}\,\frac{\Theta}{4hn} - 1 = \frac{\log l}{\log k}\,\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + 2n^2 - 1 > \frac{\log l}{\log k}\,\frac{h's}{h's + \varepsilon}.$$

Aus (42) und (43) folgt

$$\frac{h's\log l}{\left\{\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)\right\}\log k - \log j} < r < \frac{(\beta - h's)\log l}{h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)\log k + \log j},$$

wo beide Nenner als positiv nachgewiesen waren. Wegen (7) ist daher

$$h's\log l < \{\beta(r - \varrho) - h'(m + r - \varrho)\}\log k - r\log j,$$

[11]) Die Funktion $f(u) = \frac{n}{u+1} + u\ (u > 0)$ ist außerhalb ihres Minimums bei $u = \sqrt{n} - 1$ monoton; dieses liegt im Intervall $0 \leqq u \leqq n - 1$. Für alle Punkte dieses Intervalls ist daher $f(u) \leqq f(0) = f(n-1) = n$.

$$h'(m+r-\varrho)\log k + r\log j < (\beta - h's)\log l;$$

$$j^r (k^{m+r-\varrho}\, l^s)^{h'} \frac{1}{k^{\beta(r-\varrho)}} < 1, \qquad j^r (k^{m+r-\varrho}\, l^s)^{h'} \frac{1}{l^\beta} < 1;$$

oder wegen (33) und (39)

$$\bar{E}_1 < 1, \qquad \bar{E}_2 < 1,$$

was ein Widerspruch ist.

Zusätze. 1. Wegen des $\Theta$ im Exponenten läßt der Hauptsatz auch folgende (völlig gleichbedeutende) Fassung zu: Für jedes $A > 0$ hat die Ungleichung

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{A}{H(\eta)^{\frac{d}{s+1}+s+\Theta}}, \tag{5a}$$

resp.

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{A}{H(\eta)^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}} \tag{6a}$$

nur endlich viele Lösungen.

2. Es gibt ein positives $A_0 = A_0(\xi, K_0, \Theta)$, resp. $A_0 = A_0(\xi, h, \Theta)$, so daß (5a), resp. (6a) für $A = A_0$ keine Lösung hat.

3. Der Hauptsatz gilt auch für gebrochene $\xi$. Es gibt nämlich dann eine nur von $\xi$ abhängige natürliche Zahl $c_{17}$, so daß $c_{17}\,\xi$ ganz ist. Andererseits ist offenbar $H(c_{17}\,\eta) \leqq c_{17}^h\, H(\eta)$. Zusatz 1, auf $|c_{17}\,\xi - c_{17}\,\eta|$ angewendet, liefert die Behauptung.

4. Der zweite Teil des Hauptsatzes läßt folgende Erweiterung zu: Es seien $h$ und $s$ zwei natürliche Zahlen, von denen $s < n$ ist. $\eta \neq 0$ sei Wurzel einer Gleichung $h$-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. $k\ (> 0)$ sei der größte dieser Koeffizienten, absolut genommen. $\eta$ ist also eine algebraische Zahl $\neq 0$ vom Grade $\leqq h$.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{1}{k^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}} \tag{44}$$

nur endlich viele Lösungen $\eta$.

Beweis. Bei festem $\eta$ kann (44) offenbar nur für endlich viele $k$ gelten. Nach Hilfssatz III ist ferner $H(\eta) < \tau_1\, k$, wo $\tau_1$ nur von $h$ abhängt. Hätte also (44) unendlich viele Lösungen, so gälte dasselbe von einer Ungleichung der Form (6a), was nicht sein kann.

Hilfssatz X. Durchläuft $x$ die natürlichen Zahlen, so hat die Funktion $y = \frac{d}{x+1} + x$ für $x = \left[\frac{\sqrt{4d+1}-1}{2}\right]$ ihren kleinsten Wert. Er liegt in dem Intervall $2\sqrt{d} - 1 \leqq y \leqq \sqrt{4d+1} - 1$.

Beweis. Lasse ich beliebige positive $x$ zu, so folgt aus

$$y' = -\frac{d}{(x+1)^2} + 1, \qquad y'' = \frac{2d}{(x+1)^3} > 0,$$

daß $y$ für $0 < x < \sqrt{d} - 1$ monoton fällt, für $\sqrt{d} - 1 < x$ monoton wächst und in $x = \sqrt{d} - 1$ das Minimum $2\sqrt{d} - 1$ annimmt.

Es sei

$$(48) \qquad x_1 > \sqrt{d} - 1, \qquad x_2 = \frac{d}{x_1 + 1} - 1.$$

In $x_1$ und $x_2$ hat $y$ denselben Wert. In keinem Punkte des Intervalls $x_2 < x \leqq x_1$ ist daher $y$ größer als in irgendeinem außerhalb desselben gelegenen $x > 0$. Ist nun

$$(49) \qquad x_1 - x_2 = 1,$$

so gibt es in diesem Intervall genau eine natürliche Zahl $s = [x_1]$. Für jedes natürliche $x \neq s$ gilt dann $y \geqq \frac{d}{s+1} + s$.

Aus (48) und (49) folgt

$$\frac{d}{x_1 + 1} = x_1, \qquad x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{4d+1} - 1), \qquad s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4d+1} - 1)\right].$$

Ferner ist

$$\frac{d}{s+1} + s \leqq \frac{d}{x_1 + 1} + x_1 = 2x_1 = \sqrt{4d+1} - 1,$$

so daß die Ungleichung

$$2\sqrt{d} - 1 \leqq \frac{d}{s+1} + s \leqq \sqrt{4d+1} - 1$$

gilt.

## § 2.

Satz 2. Es bedeute $\xi$ eine algebraische Zahl vom Grade $d \geqq 2$ in bezug auf den Körper $K_0$. Es sei $\omega_1, \ldots \omega_h$ eine feste Basis von $K_0$. Unter $x_1, \ldots x_h, x_1', \ldots x_h'$ verstehe ich $2h$ ganze rationale Unbestimmte, die nicht sämtlich 0 sind. Das Maximum ihrer absoluten Beträge sei $x$ $(> 0)$.

Dann hat die Ungleichung

$$(50) \qquad \left| \xi - \frac{x_1 \omega_1 + \ldots + x_h \omega_h}{x_1' \omega_1 + \ldots + x_h' \omega_h} \right| \leqq \frac{1}{x^{h\left(\frac{d}{s+1} + s\right) + \Theta}}$$

nur endlich viele Lösungen.

Beweis. $\eta = \frac{x_1 \omega_1 + \ldots + x_h \omega_h}{x_1' \omega_1 + \ldots + x_h' \omega_h}$ ist Wurzel der Gleichung

$$(51) \quad P(t) = \prod_{\nu=1}^{h} \left\{ (x_1' \omega_1^{(\nu)} + \ldots + x_h' \omega_h^{(\nu)}) t - (x_1 \omega_1^{(\nu)} + \ldots + x_h \omega_h^{(\nu)}) \right\} = 0,$$

wo das Produkt über alle Konjugierten erstreckt wird. $P(t)$ hat die Form

$$(52)\qquad P(t) = a(Q(t))^f \qquad (a \neq 0),$$

wo $Q$ ein irreduzibles ganzrationalzahliges Polynom, $a$ eine ganze rationale Zahl, $f$ eine natürliche Zahl $\leqq h$ bedeuten. Es sei $\omega$ die größte der $h^2$ Zahlen $|\omega_1^{(1)}|, \ldots |\omega_h^{(h)}|$ und $k_\lambda$ der Koeffizient von $t^{\frac{h}{f}-\lambda}$ in $Q(t)$; dann ist nach (51) und (52) für $\lambda = 0, \ldots \frac{h}{f}$

$$|k_\lambda| \leqq \binom{\frac{h}{f}}{\lambda}(h\omega)^{\frac{h}{f}} x^{\frac{h}{f}} \leqq \binom{h}{\lambda}(h\omega)^h x^{\frac{h}{f}},$$

also

$$k = \max(|k_0|, \ldots |k_{\frac{h}{f}}|) < \tau_3 x^{\frac{h}{f}},$$

wo $\tau_3 > 0$ nur von der gegebenen Basis abhängt. $\eta$ liegt in einem der endlich vielen verschiedenen Unterkörper von $K_0$ vom Grade $\frac{h}{f}$ und ist darin primitiv; in jedem derselben hat nach dem Hauptsatz die Ungleichung

$$|\xi - \eta| < \frac{1}{k^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}}$$

nur endlich viele Lösungen, wenn $d'$ den Grad von $\xi$ in bezug auf den Unterkörper und $s'$ die Zahl $[\frac{1}{2}(\sqrt{4d'+1}-1)]$ bedeuten; hierin ist $d' \leqq fd$. Dasselbe gilt a fortiori von

$$(53)\qquad |\xi - \eta| < \frac{1}{\left(\tau_3 x^{\frac{h}{f}}\right)^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}} = \frac{1}{x^{\frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)+\Theta}} \, \frac{x^{\frac{\Theta}{2}}}{\tau_3^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}}.$$

Nun ist für $f \geqq 2$ nach Hilfssatz X

$$h\left(\frac{d}{s+1}+s\right) \geqq \frac{h}{f} f(2\sqrt{d}-1) > \frac{h}{f}\left(2\sqrt{df}-\frac{1}{2}\right) > \frac{h}{f}(\sqrt{4df+1}-1)$$
$$\geqq \frac{h}{f}(\sqrt{4d'+1}-1) \geqq \frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right);$$

und die Ungleichung

$$h\left(\frac{d}{s+1}+s\right) \geqq \frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)$$

ist auch für $f = 1$ richtig. Daher gilt

$$(54)\qquad \frac{1}{x^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)}} \leqq \frac{1}{x^{\frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)}}.$$

Hätte nun (50) unendlich viele Lösungen, so wäre für diese mit endlich vielen Ausnahmen

$$x > \tau_3^{\frac{2}{\Theta}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}\right)};$$

dann lieferten aber (53) und (54) einen Widerspruch.

Satz 3. Es sei $\xi$ eine algebraische Zahl $n$-ten Grades.

Die Ungleichung

$$(55) \qquad 0 < |k_0\xi^h + k_1\xi^{h-1} + \dots + k_h| \leqq \frac{1}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\Theta}}$$

$$(\max(|k_0|, \dots |k_h|) = k > 0)$$

hat nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen $k_0, k_1, \dots, k_h$.

Beweis. Es genügt, $k_0 > 0$ anzunehmen.

Ich setze

$$x^h + \frac{k_1}{k_0}x^{h-1} + \dots + \frac{k_h}{k_0} = \prod_{\nu=1}^{h}(x - \eta^{(\nu)}).$$

Nach Zusatz 2 zum Hauptsatz gibt es ein positives $A_0 = A_0(\xi, h, \Theta)$, so daß für jedes algebraische $\eta \neq \xi$ vom Grade $\leqq h$

$$(56) \qquad |\xi - \eta| > \frac{A_0}{k^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2h}}}$$

gilt.

Von den $h$ Zahlen $|\eta^{(1)}|, \dots |\eta^{(h)}|$ sei $|\eta^{(1)}|$ die größte.

1. Es sei

$$\frac{k}{k_0} > (|\xi| + 2)^h.$$

Dann ist wegen

$$\frac{k}{k_0} = \max_{\nu=0,\dots h}\left|\sum_{i_1<i_2<\dots<i_\nu}\eta^{(i_1)}\eta^{(i_2)}\dots\eta^{(i_\nu)}\right| \leqq (1 + |\eta^{(1)}|)^h,$$

$$|\xi| + 2 < 1 + |\eta^{(1)}|,$$

$$|\xi - \eta^{(1)}| \geqq |\eta^{(1)}| - |\xi| > 1.$$

Nach (56) ist

$$\prod_{\nu=2}^{h}|\xi - \eta^{(\nu)}| > \frac{A_0^{h-1}}{k^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{(h-1)\Theta}{2h}}},$$

$$|k_0\xi^h + \dots + k_h| = k_0\prod_{\nu=1}^{h}|\xi - \eta^{(\nu)}| > \frac{k_0 A_0^{h-1}}{k^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}},$$

oder, wegen $k_0 \geqq 1$ und $h\left(\frac{n}{s+1}+s\right) > 1$

$$(57) \qquad |k_0 \xi^h + \ldots + k_h| > \frac{A_0^{h-1}}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\frac{\Theta}{2}}}.$$

2. Es sei

$$\frac{k}{k_0} \leqq (|\xi| + 2)^h.$$

Dann ist, wenn (56) für alle $\eta^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots h)$ benutzt wird,

$$(58) \qquad |k_0 \xi^h + \ldots + k_h| > \frac{k_0 A_0^h}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}} \geqq \frac{\left(\frac{A_0}{|\xi|+2}\right)^h}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\frac{\Theta}{2}}}.$$

Aus (57) und (58) folgt, daß für hinreichend großes $k$ (55) nicht mehr gelten kann.

Anmerkung. Satz 3 ist trivial, wenn $h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right) \geqq n$ ist. Ist nämlich $k_0 \xi^h + \ldots + k_h \neq 0$, so folgt aus $|N(k_0 \xi^h + \ldots + k_h)| \geqq 1$ die Existenz eines positiven $c = c(\xi, h)$, so daß

$$|k_0 \xi^h + \ldots + k_h| > \frac{c}{k^{n-1}}.$$

Wegen $\frac{n}{s+1} + s < 2\sqrt{n}$ ist die Ungleichung $h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right) < n$ für $h \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ sicher erfüllt.

Satz 3 besagt, etwas weniger scharf ausgedrückt: Für alle $k_0, \ldots k_h$, mit endlich vielen Ausnahmen, gilt

$$|k_0 \xi^h + \ldots + k_h| > \frac{1}{(k_0^2 + \ldots + k_h^2)^{h^2 \sqrt{n}}},$$

wenn die linke Seite $\neq 0$ ist.

Jetzt sei speziell $k_0 = g$ eine natürliche Zahl und $h = 2$, $n > 2$. Ich betrachte die lineare Funktion der beiden ganzen rationalen Veränderlichen $x, y$

$$L(x, y) = g\xi^2 + x\xi + y.$$

Es sei $g|\xi|^2 + |\xi| + 1 = B$. Ist $x = 0$, so ist für höchstens zwei Werte von $y$ die Funktion $|L(x, y)| < 1$; ist $x \neq 0$, so ist

$$|L(x, y)| \geqq |y| - (g|\xi|^2 + |x\xi| + 1) + 1 \geqq |y| - B|x| + 1;$$

aus $|L(x, y)| \leqq 1$ folgt dann $|y| \leqq B|x|$, also (wegen $B > 1$)

$$\max(|x|, |y|) \leqq B|x|.$$

Für alle Paare $x, y$ mit Ausnahme endlich vieler gilt nun

$$k = \max(g, |x|, |y|) > (|\xi| + 2)^2 g;$$

also nach dem ersten Teil des Beweises von Satz 3

$$|L(x, y)| > \frac{A_0 g}{\max(g, |x|, |y|)^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}} > \frac{A_0 g}{(B|x|)^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}}$$

für hinreichend großes $|x|$; also auch für großes $|x|$

$$|g\xi^2 + x\xi + y| > \frac{1}{|x|^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}.$$

Als weitere Anwendung von Satz 3 suche ich eine Abschätzung für $x \cos\frac{2\pi a}{b} + y \sin\frac{2\pi a}{b} + z$, wo $\frac{a}{b}$ ein fester reduzierter Bruch und $x, y, z$ drei ganze rationale Zahlen sind.

Man hat

$$\left(x \cos\frac{2\pi a}{b} + y \sin\frac{2\pi a}{b} + z\right)\left(x \cos\frac{2\pi a}{b} - y \sin\frac{2\pi a}{b} + z\right)$$
$$= (x^2 + y^2)\cos^2\frac{2\pi a}{b} + 2xz\cos\frac{2\pi a}{b} + z^2 - y^2.$$

Nun ist $\cos\frac{2\pi a}{b}$ eine algebraische Zahl vom Grade $\frac{1}{2}\varphi(b)$[15]) für $b > 2$; ferner ist

$$\max(|x^2+y^2|, |2xz|, |z^2-y^2|) \leqq x^2+y^2+x^2+z^2+z^2+y^2$$
$$= 2(x^2+y^2+z^2).$$

Wird $\varphi(b) > 4$ vorausgesetzt, was für alle $b > 12$ der Fall ist, so ist nach Satz 3 für großes $x^2 + y^2 + z^2$

$$\left|(x^2+y^2)\cos^2\frac{2\pi a}{b} + 2xz\cos\frac{2\pi a}{b} + z^2 - y^2\right| > \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{2^2\left(\frac{\varphi(b)}{2(s+1)}+s\right)-1+\Theta}},$$

also, wegen

$$\left|x \cos\frac{2\pi a}{b} - y \sin\frac{2\pi a}{b} + z\right| \leqq x^2+y^2+z^2 \text{ und } \frac{\varphi(b)}{2(s+1)} + s < \sqrt{2\varphi(b)},$$

$$\left|x \cos\frac{2\pi a}{b} + y \sin\frac{2\pi a}{b} + z\right| > \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{4\sqrt{2\varphi(b)}}}.$$

**Hilfssatz XI.** Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Konjugierten der algebraischen Zahl $\xi$. Ich setze

$$y_\varkappa = x_0\xi_\varkappa^h + \ldots + x_{h-1}\xi_\varkappa + x_h \qquad (\varkappa = 1, \ldots n),$$
$$\max(|x_0|, \ldots |x_h|) = x.$$

Es gibt ein positives $c_{18} = c_{18}(\xi)$, so daß von den $n$ Linearformen $y_\varkappa$ höchstens $h$ absolut $< \frac{x}{c_{18}}$ sind.

---

[15]) $\varphi$ bedeutet hier die Eulersche $\varphi$-Funktion.

Beweis. Der Hilfssatz ist trivial für $h \geqq n$; es sei also $h \leqq n-1$. Ich betrachte irgend $h+1$ von den Linearformen, etwa

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{h} \xi_\varkappa^{h-\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, \ldots h+1).$$

Wegen $|\xi_\varkappa^\lambda| \neq 0$ $(\varkappa = 1, \ldots h+1;\ \lambda = 0, \ldots h)$ lassen sich $x_0, \ldots x_h$ als lineare Funktionen von $y_1, \ldots y_{h+1}$ darstellen. Deren Koeffizienten hängen nur von $\xi_1, \ldots \xi_{h+1}$ ab und sind daher absolut $< c_{19} = c_{19}(\xi)$. Ich setze $\max(|y_1|, \ldots |y_{h+1}|) = y$; dann ist

$$x \leqq (h+1)\, c_{19}\, y, \qquad y \geqq \frac{x}{(h+1)\, c_{19}} \geqq \frac{x}{n\, c_{19}}.$$

Zu jeder Kombination von $h+1$ verschiedenen $y_\varkappa$ bestimme ich ein $c_{19}$; dann wähle ich $c_{18}$ derart, daß $c_{18} \geqq n\, c_{19}$ für jeden der endlich vielen Werte von $c_{19}$ gilt. Dieses $c_{18}$ leistet das Verlangte.

Satz 4. Es sei $\xi$ eine algebraische Zahl $n$-ten Grades. Es bedeute $\varphi(x_0, \ldots x_h)$ die zerlegbare Form

$$\prod_{\nu=1}^{n} y_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} (x_0 \xi_\nu^h + x_1 \xi_\nu^{h-1} + \ldots + x_h);$$

es sei $n > h^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$ und $\psi(x_0, \ldots x_h)$ irgendein Polynom in $x_0, \ldots x_h$ von der Dimension $\delta < n - h^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$.

Dann hat die Gleichung

$$(59) \qquad \varphi(x_0, \ldots x_h) = \psi(x_0, \ldots x_h)$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen $x_0, \ldots x_h$.

Beweis. Es genügt, $x_0 \neq 0$ anzunehmen. Es sei

$$0 < \max(|x_0|, \ldots |x_h|) = x,$$

und für unbestimmtes $u$

$$x_0 u^h + x_1 u^{h-1} + \ldots + x_h = x_0 \prod_{\nu=1}^{h} (u - \eta^{(\nu)}).$$

Es gibt eine Zahl $\tau_4 > 0$, die nur von den Koeffizienten von $\psi$ abhängt, so daß

$$(60) \qquad |\psi(x_0, \ldots x_h)| < \tau_4 x^\delta.$$

Nach Hilfssatz XI sind von den $n$ linearen Formen $y_\nu$ mindestens $n-h$ absolut $\geqq \frac{x}{c_{18}}$. Seien $y_1, \ldots y_\lambda$ sämtliche Linearformen, deren absolute Beträge $< \frac{x}{c_{18}}$ sind (falls es solche gibt), dann ist $\lambda \leqq h$ und

$$y_1 \ldots y_\lambda = x_0^\lambda \prod_{\mu=1}^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{h} (\xi_\mu - \eta^{(\nu)}).$$

Es gibt ein $c_{20} > 0$ derart, daß das Minimum unter den absoluten Beträgen der Differenzen der Zahlen $\xi_1, \ldots \xi_n$ größer als $\frac{1}{c_{20}}$ ist. Dann sind von den $\lambda h$ Faktoren des Doppelproduktes höchstens $h$ absolut $< \frac{1}{2c_{20}}$ (denn sonst würden für ein gewisses $\nu$ zwei Ungleichungen $|\xi_\mu - \eta^{(\nu)}| < \frac{1}{2c_{20}}$, $|\xi_{\mu'} - \eta^{(\nu)}| < \frac{1}{2c_{20}}$ mit $\mu \neq \mu'$ bestehen, was $|\xi_\mu - \xi_{\mu'}| < \frac{1}{c_{20}}$ zur Folge hätte).

Ist die Anzahl jener Faktoren $\leqq h-1$, so folgt nach dem Hauptsatze

$$|y_1 \ldots y_\lambda| > \frac{\left(\frac{1}{2c_{20}}\right)^{\lambda h}}{x^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}$$

für großes $x$; ist aber diese Anzahl $= h$, so gilt

$$\max(|\eta_1|, \ldots |\eta_h|) < \max(|\xi_1|, \ldots |\xi_n|) + \frac{1}{2c_{20}},$$

also

$$\frac{x}{|x_0|} < c_{21},$$

$$|y_1 \ldots y_\lambda| > \left(\frac{x}{c_{21}}\right)^\lambda \frac{\left(\frac{1}{2c_{20}}\right)^{\lambda h}}{x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}.$$

Auf jeden Fall ist daher für hinreichend großes $x$

$$|y_1 \ldots y_\lambda| > \frac{1}{c_{22}\, x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\lambda+\Theta}};$$

$$(61) \quad |\varphi(x_0, \ldots x_h)| \geqq \frac{1}{c_{22}\, x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\lambda+\Theta}} \left(\frac{x}{c_{18}}\right)^{n-\lambda} \geqq \frac{x^{n-h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\Theta}}{c_{23}}.$$

Für $\Theta$ wähle ich irgendeine positive Zahl $< n - h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right) - \delta$; dann ist nach (60) und (61) für hinreichend großes $x$

$$|\varphi(x_0, \ldots x_h)| > |\psi(x_0, \ldots x_h)|.$$

(59) hat also nur endlich viele Lösungen.

Anmerkung. Schon für kleine Werte von $h$ sind diejenigen $n$, auf welche Satz 4 angewendet werden kann, sehr hoch. Genauer will ich beweisen: Der kleinste Wert von $n$, für den $n > h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)$ wird, ist

$$n = 4h^4 - 2h^2 + 1.$$

Setzt man nämlich $n = 4h^4 - 2h^2 + n^*$, so ist für $n^* \geqq 0$ wegen $\frac{n}{s+1} + s \leqq \sqrt{4n+1} - 1$ (nach Hilfssatz X)

$$n-h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)\geqq 4h^4-2h^2+n^*-h^2\left(\sqrt{16h^4-8h^2+1+4n^*}-1\right)$$
$$\geqq 4h^4-2h^2+n^*-h^2\left(4h^2-1+\frac{2n^*}{4h^2-1}-1\right)$$
$$=n^*-\frac{2h^2n^*}{4h^2-1}=n^*\frac{2h^2-1}{4h^2-1}\geqq 0,$$

und hierin steht das Gleichheitszeichen nur für $n^*=0$.

Als kleinste Gradzahl, für die Satz 4 gilt, gehört also zu $h=1$ $n=3$, $h=2$ $n=57$, $h=3$ $n=307$ usw.

Satz 5. Es sei $U(x,y)$ eine homogene binäre Form $d$-ten Grades ohne mehrfache Linearfaktoren, deren Koeffizienten einem Körper $K_0$ vom Grade $h_0$ angehören.

1. $x$ und $y$ seien ganzzahlige Variable eines festen Oberkörpers $K^*$ von $K_0$, dessen Grad in bezug auf $\Omega$ mit $h$ bezeichnet werde. Es sei

$$d>h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)\qquad \left(s=\left[\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4d+1}-1\right)\right]\right).$$

Unter $V(x,y)$ verstehe ich irgendein Polynom der Dimension $\delta<d-h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)$ mit Koeffizienten aus $K_0$, welches zu $U(x,y)$ teilerfremd ist.

Behauptung. Die Diophantische Gleichung

$$U(x,y)=V(x,y) \tag{62}$$

hat nur endlich viele Lösungen.

2. $x$ und $y$ seien irgendwelche ganze algebraische Zahlen vom Grade $\leqq h$. Es sei

$$d>h^4\left(\frac{dh_0}{s'+1}+s'\right)\qquad \left(s'=\left[\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4dh_0+1}-1\right)\right]\right).$$

Unter $V(x,y)$ verstehe ich irgendein Polynom der Dimension $\delta<d-h^4\left(\frac{dh_0}{s'+1}+s'\right)$ mit Koeffizienten aus $K_0$, welches zu $U(x,y)$ teilerfremd ist.

Behauptung. (62) hat nur endlich viele Lösungen. Es gibt also auch nur endlich viele Zahlkörper des Grades $\leqq h$, in denen diese Gleichung Lösungen in primitiven Zahlen besitzt.

Beweis. Durch eine homogene lineare Transformation der Determinante 1 mit ganzen rationalen Koeffizienten läßt sich stets erreichen, daß in $U(x,y)$ die Koeffizienten von $x^d$ und $y^d$ nicht 0 sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann daher

$$U(x,y)=\alpha y^d\prod_{\nu=1}^{d}\left(\frac{x}{y}-\xi_\nu\right)\qquad (\alpha\neq 0,\ \xi_\nu\neq 0)$$

gesetzt werden. Nach Voraussetzung sind die $d$ Zahlen $\xi_1, \dots \xi_d$ voneinander verschieden; das Minimum ihrer Abstände sei $\frac{1}{\tau_5} > 0$. Von den $d$ Faktoren des Produktes sind dann mindestens $d-1$ absolut $\geqq \frac{1}{2\tau_5}$.

1. Seien $x = \eta$, $y = \zeta \neq 0$ ganze Zahlen aus $K^*$. Sind $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(h)}$, $\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(h)}$ ihre Konjugierten, so ist $\frac{\eta}{\zeta}$ Wurzel der Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{h} (\zeta^{(\nu)} t - \eta^{(\nu)}) = 0.$$

Deren Koeffizienten sind absolut $< (2\mathsf{Z})^h$, wo $\mathsf{Z}$ das Maximum der $2h$ Zahlen $|\eta^{(1)}|, \dots |\zeta^{(h)}|$ bedeutet. Wie beim Beweise von Satz 2 folgt

$$\left|\frac{\eta^{(\lambda)}}{\zeta^{(\lambda)}} - \xi_\nu\right| > \frac{1}{(2\mathsf{Z})^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)+\Theta}} \qquad (\lambda = 1, \dots h;\ \nu = 1, \dots d)$$

für hinreichend großes $\mathsf{Z}$ (wenn die linke Seite $\neq 0$ ist; da aber $U$ und $V$ keinen gemeinsamen Faktor haben, so ist dies für Lösungen von (62) mit genügend großem $\mathsf{Z}$ sicher der Fall). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\mathsf{Z} = |\zeta_1| = |\zeta|;$$

denn (62) bleibt richtig, wenn alle Größen durch ihre Konjugierten ersetzt werden, und nötigenfalls vertausche man $x$ mit $y$. Für großes $\mathsf{Z}$ ist also

$$|U(\eta, \zeta)| > |\alpha|\, \mathsf{Z}^d \left(\frac{1}{2\tau_5}\right)^{d-1} \cdot \frac{1}{(2\mathsf{Z})^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)+\Theta}}; \tag{63}$$

andererseits gilt für ein gewisses $\tau_6 > 0$, das nur von den Koeffizienten von $V(x, y)$ abhängt,

$$|V(\eta, \xi)| < \tau_6 \mathsf{Z}^\delta. \tag{64}$$

Wählt man ein positives $\Theta < d - h\left(\frac{d}{s+1} + s\right) - \delta$, so ist nach (63) und (64) für hinreichend großes $\mathsf{Z}$

$$|U(\eta, \zeta)| > |V(\eta, \zeta)|.$$

2. Seien $x = \eta$, $y = \zeta \neq 0$ ganze algebraische Zahlen vom Grade $\leqq h$ und $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(h_1)}$, $\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(h_2)}$ ihre Konjugierten ($h_1 \leqq h$, $h_2 \leqq h$). $\frac{\eta}{\zeta}$ ist Wurzel der Gleichung $h_1 h_2$-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$\prod_{\mu=1}^{h_1} \prod_{\nu=1}^{h_2} (\zeta^{(\nu)} t - \eta^{(\mu)}) = 0;$$

setzt man $\mathsf{Z} = \max(|\eta^{(1)}|, \dots |\zeta^{(h_2)}|)$, so sind ihre Koeffizienten absolut $< (2\mathsf{Z})^{h_1 h_2}$. Wie beim Beweis von Satz 2 liefert der Hauptsatz

$$\left|\frac{\eta^{(\mu)}}{\zeta^{(\nu)}} - \xi_\varkappa\right| > \frac{1}{(2\,Z)^{h_1 h_2 h_1 h_2\left(\frac{d\,h_0}{s'+1}+s'\right)+\Theta}} \qquad (\mu = 1, \ldots h_1;\ \nu = 1, \ldots h_2;\ \varkappa = 1, \ldots d)$$

für hinreichend großes $Z$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann wieder $Z = \zeta$ angenommen werden. Dann ist für großes $Z$

$$(65) \qquad |U(\eta, \zeta)| > |\alpha|\, Z^d \left(\frac{1}{2\,\tau_5}\right)^{d-1} \frac{1}{(2\,Z)^{h^4\left(\frac{d\,h_0}{s'+1}+s'\right)+\Theta}}.$$

Für positives $\Theta < d - h^4\left(\frac{d\,h_0}{s'+1} + s'\right) - \delta$ folgt aus (64) und (65) für hinreichend großes $Z$

$$|U(\eta, \zeta)| > |V(\eta, \zeta)|.$$

Anmerkung. Der kleinste Wert von $d$, für welchen $d > h\left(\frac{d}{s+1} + s\right)$ wird, ist

$$d = 4\,h^2 - 2\,h + 1,$$

also für $h = 1$ $d = 3$, $h = 2$ $d = 13$, $h = 3$ $d = 31$ usw.

Der kleinste Wert von $d$, für welchen $d > h^4\left(\frac{d\,h_0}{s'+1} + s'\right)$ wird, ist

$$d = 4\,h^8\,h_0 - 2\,h^4 + 1.$$

Zusätze. 1. Bei dem Beweise war nur benutzt worden, daß

$$V(\eta, \zeta) = o\left(Z^{d-h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)-\Theta}\right),$$

resp. $= o\left(Z^{d-h^4\left(\frac{d\,h_0}{s'+1}+s'\right)-\Theta}\right)$ ist. Es gilt also auch allgemeiner:

Die Relation

$$U(\eta, \zeta) = O(Z^\delta),$$

wo sich die Abschätzung auf eine Folge wachsender $Z \to \infty$ bezieht, kann nicht für alle Konjugierten der linken Seite richtig sein.

2. Es sei $\varphi(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $n \geqq 3$ mit rationalen Koeffizienten. Sind $p$ und $q$ zwei ganze rationale Zahlen und bedeutet $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, so wird ein Polynom $R(x)$ vom Grade $n-1$ durch

$$(66) \qquad (p - q\,x)\,P(x) \equiv R(x)\,(\mathrm{mod}\ \varphi(x))$$

eindeutig bestimmt.

Dann wächst für die Menge aller nicht durch $\varphi(x)$ teilbaren $P(x)$ von einem festen Grade $\nu$ gleichmäßig der absolut größte Koeffizient von $R(x)$ mit $|pq|$ über alle Grenzen.

Ist nämlich $\varphi(\xi) = 0$, so wird wegen (66)

$$N(p - q\,\xi)\,N(P(\xi)) = N(R(\xi));$$

also, da für ein nur von $\varphi(x)$ und von $\nu$ abhängiges $\tau_7 > 0$ $|N(P(\xi))| > \frac{1}{\tau_7}$ ist,

$$\left| q^n \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \tau_7 \, |N(R(\xi))|.$$

Nach Satz 5 wächst der Wert der linken Seite mit $|pq|$ über alle Grenzen; dasselbe gilt daher von $|N(R(\xi))|$, also auch von dem absolut größten Koeffizienten von $R(x)$.

Ist $h_0 = h = 1$, so läßt Satz 5 folgende Erweiterung zu:

Satz 6. Es seien $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ und $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ zwei rationale Funktionen in gekürzter Form mit rationalen Koeffizienten, von denen die erstere homogen ist. $P(x,y)$ habe lauter einfache Linearfaktoren und sei zu $M(x,y)$ teilerfremd. Zwischen den Dimensionen $n, n', \delta$ von $P, Q, M$ mögen die Ungleichungen

$$(67) \qquad n > 0, \quad 0 \leqq \delta < \frac{(n-n')\left(n - \frac{n}{s+1} - s\right)}{n} \qquad \left(s = \left[\frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}\right]\right)$$

bestehen. Dann besitzt die Diophantische Gleichung

$$(68) \qquad \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen $x, y$.

Beweis. Der Fall $n' = 0$ wird durch Satz 5 Zusatz 1 erledigt; sei also $n' > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $P, Q, M, N$ ganzzahlig.

Es gibt zwei homogene Polynome $A(x,y)$ und $B(x,y)$ von den Graden $n'-1$ und $n-1$ mit ganzen rationalen Koeffizienten und eine natürliche Zahl $\tau_8$, so daß identisch in $x$ und $y$

$$(69) \qquad A(x,y)\,P(x,y) + B(x,y)\,Q(x,y) = \tau_8\, y^{n+n'-1}.$$

Aus (68) und (69) folgt für die Lösungen $x, y$ von (68)

$$(70) \qquad P(AM + BN) = \tau_8\, y^{n+n'-1} M.$$

Es sei $t = (x, y)$; dann läßt sich setzen

$$x = tx', \quad y = ty', \quad (x', y') = 1.$$

Jedes der beiden Gleichungspaare $P = 0$, $M = 0$ und $M = 0$, $N = 0$ hat nach Voraussetzung nur endlich viele ganze rationale Lösungen $x, y$; es gibt also ein $\tau_9$, so daß für alle Lösungen von (68) mit $|x| > \tau_9$ die Ungleichungen

$$(71) \qquad P(x,y) \neq 0, \quad |N(x,y)| \geqq 1$$

gelten. Ich setze

$$\max(|x'|, |y'|) = \mu, \qquad \frac{n}{s+1} + s = \gamma,$$

dann ist

(72) $$|M(x, y)| < \tau_{10}(\mu t)^{\delta}, \qquad |Q(x, y)| < \tau_{11}(\mu t)^{n'};$$

und nach Satz 5 Zusatz 1 für $|x| > \tau_9$

(73) $$|P(x, y)| = t^n |P(x', y')| > \frac{1}{\tau_{12}} t^n \mu^{n-\gamma-\Theta},$$

wo $\tau_{12} > 0$ nur von $\Theta$ und den Koeffizienten von $P$ abhängt.

Nach (68), (71), (72), (73) ist also

$$\frac{1}{\tau_{12}} t^n \mu^{n-\gamma-\Theta} < \tau_{10}\tau_{11}(t\mu)^{n'+\delta},$$

oder, da wegen (67)

$$(n-n')(n-\gamma) - n\delta > 0, \qquad n - n' - \delta > 0$$

ist,

(74) $$t\mu < \tau_{13}\,\mu^{\frac{\gamma+\Theta}{n-n'-\delta}}.$$

Aus (70) folgt

$$P(x', y')\{A(x', y')M(x, y) + t^{n-n'}B(x', y')N(x, y)\}$$
$$= \tau_8\, y'^{\,n+n'-1} M(x, y).$$

Wegen $P \neq 0$ ist $M \neq 0$; der absolute Betrag der geschweiften Klammer ist $\geqq 1$. Setzt man

$$(P(x', y'), y') = t',$$

so ist

$$0 \equiv P(x', y') \equiv a_0 x'^n + y'(\ldots) \equiv a_0 x'^n \pmod{t'},$$

also wegen $(x', y') = 1$

$$t' \mid a_0.$$

Daher ist

$$P(x', y') \mid \tau_8\, a_0^{n+n'-1} M(x, y);$$

und nach (74) und (72)

$$|P(x', y')| < \tau_8 |a_0|^{n+n'-1} \tau_{10}(\mu t)^{\delta} < \tau_{14}\,\mu^{\frac{\delta(\gamma+\Theta)}{n-n'-\delta}}.$$

Also ist nach (73)

$$\mu^{n-\gamma-\Theta} < \tau_{12}\tau_{14}\,\mu^{\frac{\delta(\gamma+\Theta)}{n-n'-\delta}},$$

(75) $$\mu < (\tau_{12}\tau_{14})^{\frac{n-n'-\delta}{(n-\gamma-\Theta)(n-n')-\delta n}},$$

wenn $\Theta$ so klein gewählt wird, daß der Nenner des Exponenten $> 0$ ist, was nach (67) möglich ist. Aus (74) und (75) folgt die Beschränktheit von $|x|$ und $|y|$; die vorgelegte Gleichung hat also nur endlich viele Lösungen.

Anmerkung. Der Spezialfall $M = 1$, $N = 1$ findet sich in einer Arbeit von Thue[16]).

Satz 7. Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper $K$. $x$ durchlaufe die ganzen Zahlen dieses Körpers. Von den Normen der Primideale aus $K$, die für ein bestimmtes $x = \vartheta$ in $f(\vartheta)$ aufgehen, sei $N_\vartheta$ die größte[17]).

Behauptung. Besitzt $f(x)$ mindestens zwei verschiedene Nullstellen[18]), so liegt nur für endlich viele $\vartheta$ die positive Zahl $N_\vartheta$ unter einer beliebigen festen Schranke. Anders ausgedrückt: Von den Normen der Primidealteiler von $f(\vartheta)$ wächt die größte mit $\overline{|\vartheta|}$ über alle Grenzen.

Beweis. Sei $m (\geqq 2)$ der genaue Grad von $f(x)$ und

$$f(x) = cx^m + \ldots \qquad (c \neq 0 \text{ ganz}),$$

dann ist für die ganzzahlige Variable $y = cx$

$$c^{m-1} f(x) = y^m + \ldots = f^*(y);$$

es kann also ohne Einschränkung $c = 1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt eine Zerlegung

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\, g(x) \tag{76}$$

mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zu $K$ adjungiere ich $\lambda_1$ und $\lambda_2$; den so entstehenden Oberkörper von $K$ nenne ich $\bar{K}$; sein Relativgrad ist $\leqq m^2$. Bedeutet das Zeichen $N$ resp. $\bar{N}$ die in $K$ resp. $\bar{K}$ genommene Form, so ist für ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $K$

$$\bar{N}\mathfrak{a} \leqq N\mathfrak{a}^{m^2}, \qquad N\mathfrak{a} \geqq \sqrt[m^2]{\bar{N}\mathfrak{a}}.$$

Der Satz braucht also nur für $x$ in $\bar{K}$ (nebst $\bar{N}$ statt $N$) bewiesen zu werden; d. h. ich kann $K = \bar{K}$ voraussetzen. Ferner genügt es, die Behauptung für den Teiler $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ von $f(x)$ nachzuweisen. Ersetzt man endlich noch $x - \lambda_1$ durch $x$, $\lambda_2 - \lambda_1$ durch $\alpha$, so kann man $f(x)$ in der Form

$$f(x) = x(x - \alpha) \qquad (\alpha \neq 0 \text{ ganz}) \tag{77}$$

annehmen.

Es sei eine natürliche Zahl $M$ gegeben. Ich betrachte die Menge aller $\vartheta$ mit $N_\vartheta \leqq M$. Ist $M > 1$, so seien $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_l$ die verschiedenen Primidealteiler von $M!$. Dann geht nach der Definition von $N_\vartheta$ kein

---

[16]) Thue 7.

[17]) Ist $f(\vartheta)$ eine Einheit, so werde $N_\vartheta = 1$ gesetzt. Die endlich vielen Lösungen von $f(x) = 0$ können im folgenden ausgeschlossen werden.

[18]) Der Fall $f(x) = c(ax + b)^m$ bildet in der Tat eine Ausnahme (vgl. Pólya 2).

von $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_l$ verschiedenes Primideal in $f(\vartheta)$ auf; es gilt also, da wegen (77) $\vartheta \mid f(\vartheta)$,

$$(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{a_l}\,[19],$$

wo $a_1, \ldots a_l$ ganze rationale Zahlen $\geqq 0$ sind.

Es sei $h$ der Grad, $H$ die Klassenzahl von $K$ (im weitesten Sinn). Ich setze

$$4h^2 = n.$$

Für $\nu = 1, \ldots l$ sei $r_\nu$ der kleinste Rest $\geqq 0$ von $a_\nu$ modulo $(Hn)$, dann ist

$$(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{r_l} \mathfrak{a}^{Hn},$$

wo $\mathfrak{a}$ ein gewisses Ideal bedeutet. $\mathfrak{a}^H$ ist ein Hauptideal $(\mu)$, also ist auch $\mathfrak{p}_1^{r_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{r_l} = (\beta)$ ein Hauptideal. Es gibt also eine Einheit $\varepsilon$, so daß

$$\vartheta = \varepsilon \beta \mu^n.$$

Es sei $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten; dann gibt es eine Einheitswurzel $\varrho$, eine Einheit $\eta$ und $r$ Zahlen $s_\nu$ $(\nu = 1, \ldots r)$ der Reihe 0 bis $n-1$, so daß

$$\varepsilon = \varrho \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r} \eta^n\,[20].$$

Setzt man noch

$$\varrho \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r} \beta = \gamma_1, \qquad \eta\mu = \zeta_1,$$

so ist

$$\vartheta = \gamma_1 \zeta_1^n;$$

und $\gamma_1$ gehört einem endlichen Wertevorrat an; enthält nämlich $K$ genau $w$ Einheitswurzeln, so kommen für $\gamma_1$ höchstens $A = w\, n^r (Hn)^l$ Werte in Betracht; $A$ hängt nur von $K$ und $M$ ab.

Wegen $\vartheta - \alpha \mid f(\vartheta)$ ergibt sich ebenso für $\vartheta - \alpha$ ein Ausdruck der Form

$$\vartheta - \alpha = \gamma_2 \zeta_2^n$$

mit $A$ Möglichkeiten für $\gamma_2$. Daher ist

$$\gamma_1 \zeta_1^n - \gamma_2 \zeta_2^n = \alpha. \tag{78}$$

Hierin betrachte ich $\zeta_1$ und $\zeta_2$ als Unbekannte. Die Anzahl der verschiedenen Diophantischen Gleichungen (78) ist $\leqq A^2$; jede derselben hat wegen $n > 4h^2 - 2h$ nach Satz 5 und Anmerkung nur endlich viele Lösungen $\zeta_1, \zeta_2$.

Es gibt also nur endlich viele $\vartheta$ mit $N_\vartheta \leqq M$.

Zusätze. 1. $f(x)$ stellt nur endlich viele Einheiten dar.

---

[19]) Ist $\vartheta$ eine Einheit, so steht rechts natürlich $\mathfrak{o}$.

[20]) Im Falle $r = 0$ treten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r, \eta$ nicht auf; es ist dann $\varepsilon = \varrho$.

2. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_l$ gegebene Primideale und $\nu$ eine ganze Zahl aus $K$, deren sämtliche Primidealteiler unter diesen enthalten sind. Seien $K_1, \ldots K_r$ irgendwelche algebraische Zahlkörper. Ist dann $\overline{|\nu|} > M = M(K_1, \ldots K_r)$, so gehört keine Wurzel von $f(x) = \nu$ einem dieser Zahlkörper an.

3. Es seien $p_1, \ldots p_l$ rationale Primzahlen. Thue hat bewiesen[21]), daß für jedes natürliche $a$ nur endlich viele der Zahlen $p_1^{x_1} \ldots p_l^{x_l} \pm a$ ($x_\mu = 0, 1, 2, \ldots$ für $\mu = 1, \ldots l$) Primteiler haben, die sämtlich beschränkt sind. Ich werde zeigen, daß es unter diesen Zahlen auch nur endlich viele gibt, bei denen die in ungerader Potenz auftretenden Primteiler beschränkt sind.

Zum Beweise setze ich $f(x) = x^2 \mp a$; dann ist $\xi = \sqrt{\nu \pm a}$ eine Wurzel von $f(x) = \nu$. Durchläuft $\nu$ die Zahlen $p_1^{x_1} \ldots p_l^{x_l}$ und bedeutet $d$ den größten quadratfreien Faktor von $\nu \pm a$, so wächst nach Zusatz 2 die positive Zahl $d$ mit $\nu$ über alle Grenzen, desgleichen also auch der größte Primteiler von $d$. Dieser tritt aber in $\nu \pm a$ in ungerader Potenz auf.

4. Für $K = \Omega$ besagt Satz 7: Zu jedem $m > 0$ gibt es ein $g = g(m)$ derart, daß für alle natürlichen $n > g$ die Zahl $N_n > m$ ist. Dieses $g$ kann aber nicht gleichmäßig für alle Polynome $f(x)$ von einem festen Grade gewählt werden, wie das Beispiel $f_\lambda(x) = x(x + 2^\lambda)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ lehrt; denn hier ist für $n = 2^\lambda$ $f_\lambda(n) = 2^{2\lambda+1}$, also $N_n = 2$, während $n$ mit $\lambda$ über alle Grenzen wächst.

5. Satz 7 läßt folgende Erweiterung zu:

Es sei $K$ der Körper, welcher durch die Koeffizienten und Nullstellen von $f(x)$ erzeugt wird, und $H$ seine Klassenzahl, $h$ sein Grad. Es sei eine natürliche Zahl $t \geqq 4h^2 - 2h + 1$ gegeben. Dann ist nur für endlich viele ganze $x$ des Körpers $f(x)$ von der Form $\sigma y^{tH}$, wo $\sigma$ und $y$ ebenfalls ganze Zahlen des Körpers bedeuten und die Primidealteiler von $\sigma$ beschränkte Normen haben.

Beweis. Ist $f(x) = c \prod_{\nu=1}^{m} (x - \xi_\nu)$, worin ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c$ und $\xi_\nu$ $(\nu = 1, \ldots m)$ ganz sind, so können 2 verschiedene Linearfaktoren $x - \xi_\varkappa$ und $x - \xi_\lambda$ nur einen solchen gemeinsamen Idealteiler besitzen, der auch in der Diskriminante von $f(x)$ aufgeht. Kommt daher ein Primidealteiler von $y^{tH}$ in einem $x - \xi_\nu$ zu einer Potenz vor, deren Exponent nicht durch $tH$ teilbar ist, so ist seine Norm beschränkt. Wie beim Beweis von Satz 7 läßt sich setzen:

$$x - \xi_\varkappa = \gamma_1 \zeta_1^t, \quad x - \xi_\lambda = \gamma_2 \zeta_2^t,$$
$$\gamma_1 \zeta_1^t - \gamma_2 \zeta_2^t = \xi_\lambda - \xi_\varkappa,$$

[21]) Thue 3.

wo $\gamma_1$ und $\gamma_2$ einem endlichen Wertevorrat angehören. Satz 5 zeigt dann die Richtigkeit der Behauptung.

Insbesondere ist hierdurch bewiesen: Sind $a$, $m \geqq 2$, $n \geqq 3$ natürliche Zahlen, so hat die Diophantische Gleichung

$$\binom{x}{m} = a y^n$$

nur endlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen $x$, $y$[22]).

6. Es sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper des Grades $h = r_1 + 2r_2$. Von seinen Konjugierten seien $K^{(1)}, \dots K^{(r_1)}$ reell und die Paare $K^{(r_1+\nu)}$, $K^{(r_1+r_2+\nu)}$ $(\nu = 1, \dots r_2)$ konjugiert komplex. Jeder Zahl $\vartheta$ aus $K$ ordne ich folgendermaßen eindeutig einen Punkt $(\vartheta_1, \dots \vartheta_h)$ eines $h$-dimensionalen Raumes zu. Ich setze

$$\vartheta_\lambda = \vartheta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \dots r_1), \qquad \vartheta_{r_1+\mu} + i\,\vartheta_{r_1+r_2+\mu} = \vartheta^{(r_1+\mu)} \quad (\mu = 1, \dots r_2).$$

Durchläuft nun $\vartheta$ alle Einheiten des Körpers, so haben nur endlich viele der ihnen zugeordneten Punkte beschränkten Abstand.

Beweis. Sei $M > 0$ gegeben. Gelten für zwei Einheiten $\varepsilon$ und $\eta$ aus $K$ die $h$ simultanen Ungleichungen

$$|\varepsilon_\nu - \eta_\nu| < M \qquad (\nu = 1, \dots h),$$

so ist

$$|\varepsilon^{(\nu)} - \eta^{(\nu)}| < 2M \qquad (\nu = 1, \dots h).$$

Die Zahlen $\varepsilon - \eta$ gehören also einem endlichen Wertevorrat an; ist $\alpha \neq 0$ eine Zahl desselben, so folgt aus $\varepsilon - \eta = \alpha$

$$\varepsilon(\varepsilon - \alpha) = \varepsilon\eta = \text{Einheit},$$

was nach Satz 7 nur für endlich viele $\varepsilon$ möglich ist.

Satz 8. Es sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper $K$. Es seien $\alpha$ und $\xi$ zwei verschiedene Zahlen aus $K$, und $f(\alpha) \neq 0$. Ich entwickle die rationale Funktion $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n}$ $(n \geqq 3)$ nach Potenzen von $x - \xi$:

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu (x-\xi)^\nu \tag{79}$$

und schreibe die Koeffizienten $\gamma_\nu$ als gekürzte Idealbrüche $\frac{\mathfrak{m}_\nu}{\mathfrak{n}_\nu}$.

Behauptung. Von den Normen der Primidealteiler von $\mathfrak{m}_\nu$ wächst die größte mit $\nu$ über alle Grenzen. Eine Ausnahme bildet nur das Polynom

$$f(x) = \lambda \sum_{\varrho=0}^{n-1} \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^{n-\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu + \varrho - \varkappa)^{n-1} \right\} \left(\frac{x-\xi}{\alpha-\xi}\right)^\varrho + (x-\alpha)^n g(x), \tag{80}$$

[22]) Für $n = 2$ gilt dies noch nicht; z. B. hat die Gleichung $\binom{x}{2} = y^2$ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen.

wo $\lambda$ und $\mu$ Zahlen aus $K$ und $g(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $K$ bedeuten. (Für $n=1, 2$ gilt dies auch; es läßt sich dann jedes $f(x)$ in die Form (80) setzen.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\xi = 0$ und $f(x)$ vom genauen Grade $r < n$. Ich setze

$$f(x) = \beta_0 x^r + \ldots + \beta_r.$$

Dann ist nach (79)

$$(\beta_0 x^r + \ldots + \beta_r)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+n-1}{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu x^\nu,$$

$$\gamma_\nu = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \sum_{i=0}^{r}\beta_{r-i}\binom{\nu+n-1-i}{n-1}\frac{1}{\alpha^{\nu-i}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Für alle ganzen rationalen $y \geqq 0$ ist daher

$$(81) \qquad (-1)^n \alpha^{n+y}\gamma_y = \sum_{i=0}^{r}\binom{y+n-1-i}{n-1}\beta_{r-i}\alpha^i.$$

Es gibt eine nur von $\alpha$ und den $\beta$ abhängige Zahl $\delta \neq 0$ aus $K$, so daß $\beta_{r-i}\alpha^i\delta$ $(i = 0, \ldots r)$ ganz ist. Dann ist

$$(82) \qquad \delta(n-1)!\sum_{i=0}^{r}\beta_{r-i}\alpha^i\binom{y+n-1-i}{n-1}$$

ein Polynom $n-1$-ten Grades in $y$ mit ganzen Koeffizienten aus $K$, und zwar genau $n-1$-ten Grades, denn der Koeffizient von $y^{n-1}$ ist

$$\delta\sum_{i=0}^{r}\beta_{r-i}\alpha^i = \delta f(\alpha) \neq 0.$$

Ist dieses Polynom keine Potenz einer linearen Funktion, so wächst nach Satz 7 die Norm eines seiner Primidealteiler mit $y$ über alle Grenzen; dieses Primideal geht nach (81) in $\delta(n-1)!\,\alpha^{n+y}\gamma_y$, also für hinreichend großes $y$ im Zähler $\mathfrak{m}_y$ von $(\gamma_y)$ auf.

Ist aber (82) die $n-1$-te Potenz einer linearen Funktion, so gilt nach (81) für zwei gewisse Zahlen $\lambda$, $\mu$ aus $K$

$$\gamma_y = \frac{\lambda(y+\mu)^{n-1}}{\alpha^{n+y}} \qquad (y = 0, 1, \ldots),$$

also nach (79)

$$f(x) = (x-\alpha)^n \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}(\nu+\mu)^{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu$$

$$= \lambda\sum_{\varrho=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\varrho}(-1)^{n-\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(\mu+\varrho-\varkappa)^{n-1}.$$

Für $\varrho \geqq n$ ist aber

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varrho}(-1)^{n-\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(\mu+\varrho-\varkappa)^{n-1}$$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(\mu+\varrho-n+\varkappa)^{n-1}=\Delta^{n}(\mu+\varrho-n)^{n-1}=0;$$

also wird

$$f(x)=\lambda\sum_{\varrho=0}^{n-1}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{\varrho}(-1)^{n-\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(\mu+\varrho-\varkappa)^{n-1}\right\}\binom{x}{\alpha}^{\varrho}.$$

Ersetzt man $x$ durch $x-\xi$ und $\alpha$ durch $\alpha-\xi$ und fügt zu $f(x)$ ein beliebiges durch $(x-\alpha)^n$ teilbares Polynom hinzu, so erhält man das allgemeinste Polynom, das eine Ausnahme bildet, in der Form (80).

Satz 9. Es sei $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper $K$, deren Zähler und Nenner zueinander relativ prim und weder konstant noch Potenzen linearer Funktionen sind. $\xi$ durchlaufe die ganzen Zahlen von $K$. Man schreibe $f(\xi)$[23] als gekürzten Idealbruch

$$(f(\xi))=\frac{\mathfrak{m}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi};$$

dann sind nur für endlich viele $\xi$ die Normen der in $\mathfrak{m}_\xi$ aufgehenden Primideale sämtlich beschränkt. Dasselbe gilt für $\mathfrak{n}_\xi$.

Beweis. Es genügt, $P(x)$ und $Q(x)$ als ganzzahlig anzunehmen. Es gibt zwei Polynome $A(x)$ und $B(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus $K$ und eine natürliche Zahl $\tau_{15}$, so daß

$$A(x)P(x)+B(x)Q(x)=\tau_{15} \tag{83}$$

ist. Es gibt ein Ideal $\mathfrak{k}_\xi$, so daß

$$(P(\xi))=\mathfrak{k}_\xi\mathfrak{m}_\xi, \qquad (Q(\xi))=\mathfrak{k}_\xi\mathfrak{n}_\xi$$

ist. Aus (83) folgt dann $\mathfrak{k}_\xi\,|\,(\tau_{15})$; $\mathfrak{k}_\xi$ gehört also einem endlichen Vorrat von Idealen an. Satz 7, auf $P(x)$ und $Q(x)$ einzeln angewendet, liefert die Behauptung.

Zusätze. 1. Es seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ zwei teilerfremde homogene Polynome der Grade 3 und 2 mit einfachen Linearfaktoren und rationalen Koeffizienten. Dann ist

$$P(x, y)=Q(x, y)$$

---

[23]) Für $f(\xi)\neq 0$.

die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten. Auf dieser Kurve liegen nach Satz 6 nur endlich viele Punkte mit ganzen rationalen Koordinaten. Andererseits zeigt die Parameterdarstellung

$$x = \frac{Q(1,\lambda)}{P(1,\lambda)}, \qquad y = \frac{\lambda Q(1,\lambda)}{P(1,\lambda)} \qquad (y = \lambda x),$$

daß die Kurve unendlich viele Punkte mit gebrochenen rationalen Koordinaten enthält. Aus Satz 9 ergibt sich nun: Durchläuft $\frac{y}{x}$ die natürlichen Zahlen, so wachsen die größten Primteiler der Zähler von $x$ und $y$ über alle Grenzen; das gleiche gilt für die Nenner.

2. Es seien $A, B, C, \ldots$ mehrere paarweis vertauschbare Matrizen $n$-ten Grades mit linearen Elementarteilern. Ihre Elemente seien Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers $K(\omega)$. Die Gesamtheit aller rationalen Funktionen $\varphi(A, B, C, \ldots)$ mit Koeffizienten aus $K(\omega)$ bildet ein System von Matrizen, das ich mit $K(A, B, C, \ldots; \omega)$ bezeichne; hierbei ist vorauszusetzen, daß die im Nenner von $\varphi$ stehende Matrix von der Determinante $\neq 0$ ist. Eine Matrix nenne ich ganz, wenn ihre (charakteristischen) Wurzeln ganz sind. Es sei $f(x)$ eine feste rationale Funktion mit Koeffizienten aus $K(\omega)$, die nicht Potenz einer linearen Funktion ist. $X$ sei eine ganze Matrix aus $K(A, B, C, \ldots; \omega)$, und die Determinante der Matrix des Nenners von $f(X)$ sei $\neq 0$.

Behauptung. Nur für endlich viele $X$ ist $f(X)$ von der Form $P^p Q^q R^r \ldots$, wo $P, Q, R, \ldots$ mehrere feste paarweis vertauschbare Matrizen mit Koeffizienten aus $K(\omega)$ von den Determinanten $\neq 0$ und $p, q, r, \ldots$ irgendwelche ganze rationale Zahlen bedeuten.

Beweis. Es seien $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von $A$; $\beta_1, \ldots \beta_n$ die von $B$, usw. Nach einem Satze von Frobenius lassen sich dann diese Wurzeln einander so zuordnen, daß $\varphi(A, B, \ldots)$ die Wurzeln $\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots)$ $(i = 1, \ldots n)$ besitzt. $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ genügen einer Gleichung $n$-ten Grades mit Koeffizienten aus $K(\omega)$; dasselbe gilt von $\beta_1, \ldots \beta_n$, usw. Die Wurzeln von $X$, die ich $\varphi_i$ $(i = 1, \ldots n)$ nenne, liegen also in einem festen Oberkörper von $K(\omega)$. Aus $f(X) = P^p Q^q R^r \ldots$ folgt dann

$$f(\varphi_i) = \pi^p \varkappa^q \varrho^r \ldots,$$

wo $\pi, \varkappa, \varrho, \ldots$ gewisse Wurzeln von $P, Q, R, \ldots$ bedeuten. Ich wende Satz 9 auf den durch $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \pi, \varkappa, \ldots$ erzeugten Körper an; $\varphi_i$ gehört also einem endlichen Wertevorrat an. Dies gilt für $i = 1, \ldots n$.

Hat nun $X$ die Wurzeln $\varphi_i$, $X^*$ die Wurzeln $\varphi_i^*$, so folgt aus der Annahme $\varphi_i = \varphi_i^*$ $(i = 1, \ldots n)$, daß die Wurzeln der Matrix $X - X^*$ sämtlich 0 sind; wegen der linearen Elementarteiler ist also $X = X^*$.

Folglich gibt es nur endlich viele Lösungen von $f(X) = P^p Q^q R^r \ldots$.

Satz 10. Es sei $W(x,y)$ ein Polynom $n$-ten Grades mit ganzen algebraischen Koeffizienten, von dem sich kein homogener Faktor abspalten läßt. Die Koeffizienten von $x^n$ und $y^n$ seien hierin $\neq 0$.

Dann hat die Gleichung

$$W(x,y)=0 \tag{84}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen eines festen Körpers $K$, in welchen nur Primideale von beschränkter Norm aufgehen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Koeffizienten von $W(x,y)$ in $K$ enthalten. Die endlich vielen Lösungen jeder der beiden Gleichungen $W(x,0)=0$, $W(0,y)=0$ können beim Beweis ausgeschlossen werden.

Sei $x=\vartheta_1\neq 0$, $y=\vartheta_2\neq 0$ eine ganzzahlige Lösung von (84) aus $K$. Ist $\vartheta_1\vartheta_2$ eine Einheit, so setze ich $N_{\vartheta_1\vartheta_2}=1$; sonst bedeute $N_{\vartheta_1\vartheta_2}$ die größte unter den Normen der in $\vartheta_1\vartheta_2$ aufgehenden Primideale.

Es sei $M$ eine feste natürliche Zahl; dann betrachte ich die Gesamtheit aller Lösungen $\vartheta_1, \vartheta_2$ mit $N_{\vartheta_1\vartheta_2}\leqq M$. Ist $h$ der Grad von $K$, so setze ich

$$n^*=4n^3h^2. \tag{85}$$

Wie beim Beweise von Satz 7 ist

$$\vartheta_1=\gamma_1\zeta_1^{n^*}, \qquad \vartheta_2=\gamma_2\zeta_2^{n^*}, \tag{86}$$

wo $\gamma_1$ und $\gamma_2$ einem endlichen Wertevorrat angehören.

Nun sei

$$W(x,y)=W_0(x,y)+W_1(x,y),$$

wo $W_0$ homogen vom $n$-ten Grade und $W_1$ ein Polynom höchstens $n-1$-ter Dimension ist. $W_0$ und $W_1$ sind nach Voraussetzung teilerfremd. Abgesehen von endlich vielen Ausnahmen ist also für die Lösungen von (84) $W_0(\vartheta_1,\vartheta_2)\neq 0$. Nach (86) gilt

$$W_0(\gamma_1\zeta_1^{n^*}, \gamma_2\zeta_2^{n^*})=-W_1(\gamma_1\zeta_1^{n^*}, \gamma_2\zeta_2^{n^*}). \tag{87}$$

Ich setze noch

$$W_0=W_0^*(\zeta_1,\zeta_2), \qquad W_1=W_1^*(\zeta_1,\zeta_2).$$

Ist $\vartheta_1-\xi\vartheta_2$ ein Linearfaktor von $W_0(\vartheta_1,\vartheta_2)$, so ist $\sqrt[n^*]{\gamma_1}\,\zeta_1-\varepsilon^\lambda\sqrt[n^*]{\gamma_2\xi}\,\zeta_2$ für $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n^*}}$ und $\lambda=0,\ldots n^*-1$ ein Linearfaktor von $W_0^*(\zeta_1,\zeta_2)$. Wegen $\xi\neq 0$ sind die $n^*$ für $\lambda=0,\ldots n^*-1$ entstehenden Linearfaktoren voneinander verschieden; in $W_0^*$ sind also höchstens je $n$ Linearfaktoren einander gleich. $W_1^*$ hat höchstens die Dimension $(n-1)n^*$. Aus der Beweismethode von Satz 5 geht hervor, daß für

$$(88) \quad nn^* > nh\left(\frac{nn^*}{s+1}+s\right)+(n-1)n^* \qquad (s=[\tfrac{1}{2}(\sqrt{4nn^*+1}-1)])$$

die Diophantische Gleichung (87) nur endlich viele Lösungen besitzt. Aus (85) folgt aber (88):

$$nn^* = \sqrt{n^*}\sqrt{n^*}+(n-1)n^*$$
$$= nh\,2\sqrt{nn^*}+(n-1)n^* > nh\left(\frac{nn^*}{s+1}+s\right)+(n-1)n^*.$$

Daher hat auch (84) nur endlich viele Lösungen mit $N_{\vartheta_1\vartheta_2} \leqq M$.

Zusätze. 1. Satz 7 ist ein spezieller Fall von Satz 10. Er ergibt sich nämlich, wenn man in (76) $x-\lambda_1=u$, $x-\lambda_2=v$ setzt und Satz 10 auf $W(u,v)=u-v+(\lambda_1-\lambda_2)$ anwendet.

2. Es seien eine positive Zahl $M$ und eine quadratfreie natürliche Zahl $D>1$ gegeben. Es sei $x, y$ eine Lösung der Pellschen Gleichung $x^2-Dy^2=4$. Dann gibt es eine positive Zahl $N=N(M,D)$ derart, daß für $xy>N$ ein Primteiler von $xy$ größer als $M$ ist.

## Literaturverzeichnis.


Bachmann, P., Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig (Teubner); 1892.

Borel, É., Leçons sur la théorie de la croissance. Paris (Gauthier-Villars); 1910.

Cahen, E., Éléments de la théorie des nombres. Paris (Gauthier-Villars); 1900.

Delaunay, B., La solution générale de l'équation $X^3\varrho+Y^3=1$. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **162** (1916), S. 150/151.

Hayashi, T., Le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est pas le carré d'un nombre entier. Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 4, **18** (1918).

Hill, G. W., Solution of a Problem in the Theory of Numbers. a) The Analyst, **1** (1874), S. 27/28. b) The collected Mathematical Works, **1**, Washington; 1905.

Liouville, J., Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 1, **16** (1851), S. 133–142.

Maillet, E., Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Paris (Gauthier-Villars); 1906.

— Sur un théorème de M. Axel Thue. Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 4, **16** (1916), S. 338–345.

— Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **168** (1919), S. 217–220.

Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin (Teubner); 1913.

Pólya, G., Sur les propriétés arithmétiques des séries entières, qui représentent des fonctions rationnelles. L'enseignement mathématique, **19** (1917), S. 323.

— Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome. Mathematische Zeitschrift, **1** (1918), S. 143–148.

Størmer, C., Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1897.
— Sur une équation indéterminée. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **127** (1898), S. 752–754.
Thue, A., Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
— Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzel der ganzen Funktion dritten Grades $x^3 - ax - b$. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
— Om en generel i store hele tal uløsbar ligning. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
— Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **135** (1909), S. 284–305.
— Eine Lösung der Gleichung $\varrho P(x) - Q(x) = (x - \varrho)^n R(x)$ in ganzen Funktionen $P$, $Q$ und $R$ für jede beliebige ganze Zahl $n$, wenn $\varrho$ eine Wurzel einer beliebigen ganzen Funktion bedeutet. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1909.
— Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **138** (1910), S. 96–108.
— Über einige in ganzen Zahlen $x$ und $y$ unmögliche Gleichungen $F(x, y) = 0$. Skrifter udgit av Videnskabsselskapet i Kristiania; 1911.
— Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von der Form $ax^r - by^r = f$. Skrifter udgit av Videnskabsselskapet i Kristiania; 1918.

(Eingegangen am 10. Juni 1920.)