In view of the vast extent of the field of research thus opened up to investigators, may we not hope that others will join in extending the discoveries here merely traversed in briefest outline?

The daring hope originally entertained by *Mossotti*, 1836, of analytically connecting the molecular forces directly with those of universal gravitation was long ago abandoned by investigators, chiefly because, as had been so strongly emphasized by *Laplace*, the molecular forces are sensible only at insensible distances, whereas the gravitational forces act with unbroken continuity over the immensity of the celestial spaces.

Maxwell was equally daring, and more fortunate in his physical conceptions, — when he emphasized the theory of the aether and concluded that all the forces observed in nature are due to stresses in this medium — but the theory of stresses never was completed, owing to the premature death

of this eminent mathematician at the early age of 48. In fact *Maxwell* had not formulated any *modus operandi* as to how such stresses in the medium could arise, nor had he examined the elastic constant of the aether $\epsilon = 689321600000$.

In our new theory of the aether we have examined the character of this medium more critically than *Newton* and *Maxwell* had been able to do, and thus formulated a general theory of physical forces due to wave-action. This reduces the theory of aether-stresses to concrete form, and the procedure has the recommendation of simplicity. It also conforms to the undulatory theory of light and heat, and thus is a necessary step in the doctrine of continuity as applied to the physical universe. The subject is therefore inviting, and will appeal strongly to the geometer as well as the natural philosopher, who may now perceive a new physical basis for the geometrical forms observed in nature.

1921 Dec. 10.

T. J. J. See.

Über die größte Phase von Sonnenfinsternissen. Von P. Harzer.

Die allgemein gebräuchliche Formel zur Verbesserung eines Näherungswertes τ der Zeit t der größten Phase, die in der *Hansenschen* Bezeichnung die Form

$$x = t - \tau = -15(m/m') \cos(M+M')$$

hat, ist ungenau. Wenn der Fehler der Formel auch nur auf etwa 17^s steigen kann, so ist gegen sie doch das einzuwenden, daß sie unter dem Anscheine der Strenge abgeleitet zu werden pflegt. Die genaue Formel habe ich, nachdem ich sie selbst aufgestellt hatte, in der mir hier zugänglichen Literatur überhaupt nur an einer Stelle (*Hansen*, Über die Verfinsterungen auf der Erde überhaupt, Astr. Nachr. B. 15, Nr. 339–342, S. 81, 82, Altona 1838) gefunden; selbst das Fundamentalwerk desselben Verfassers, die »Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen« (Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. B. IV, Leipzig 1858), von dem man auf die frühere Abhandlung nicht leicht zurückgreifen wird, enthält nur die ungenaue Formel, und zwar leitet sie *Hansen* dort (S. 416) aus seinen genauen Formeln für die nördliche und südliche Grenzkurve ab, indem er ohne Begründung und ohne Verweisung auf die genaue Formel der früheren Abhandlung erklärt, »jetzt . . . abkürzen« zu wollen. Die Erinnerung an die genaue Formel ist anscheinend verloren gegangen; selbst *Th. v. Oppolzer* kennt sie nicht, da er in seinem »Canon der Finsternisse« (Denkschr. d. math.-naturwiss. Cl. d. K. Ak. d. Wiss. B. LII, S. XXIV, XXV, Wien 1887) für die größte Phase zunächst eine Umgestaltung der ungenauen Formel mitteilt, bei der ein weiterer Verlust an Genauigkeit eingetreten ist, sodann aber als »strenge *Hansensche* Formel« die ungenaue Formel angibt.

Die Quelle der ungenauen Formel ist meistens die unrichtige Bedingung, daß sich der Beobachtungsort zur Zeit der größten Phase in der geringsten Entfernung von der Achse des Schattenkegels befinde. Diese Bedingung habe ich zurückgreifend zuerst in der Inauguraldissertation von *Ursin* (De eclipsi solari VII Sept. MDCCCXX S. 14, Hafniae 1820) gefunden, in der *Ursin* mitteilt, daß er »*Gauß'sche* Methoden« mit der Zustimmung seines großen Lehrers habe benutzen dürfen. Daneben entsteht aber die ungenaue Formel auch durch eine unrichtige Einkleidung der richtigen Bedingung, daß die beiden Zeiten, zu denen bei beliebiger Phase der

Anfang und das Ende einer Finsternis eintritt, bei der größten Phase zusammenfallen. Die Verbesserung dieser Zeiten geschieht nämlich bei beliebig angenommener Phase nach den Formeln (»Theorie«, S. 413)

$$\sin \chi' = (m/u) \sin(M+M') \\ x = t - \tau = -15(m/m') \cos(M+M') + 15(u/m') \cos \chi'.$$

Dabei gibt das letzte Glied, da die Größe χ' nur durch einen Sinus bestimmt wird, durch den Faktor $\cos \chi'$ zwei Werte von entgegengesetzten Vorzeichen, die für den Anfang und das Ende der Finsternis gelten. Man schließt hieraus (z. B. tut es *de Ball* in seinem Lehrbuche der sphärischen Astronomie, S. 339, Leipzig 1912), daß für die bei der größten Phase zusammenfallenden Werte der beiden Zeiten $\cos \chi' = 0$ sein müsse. Das ist aber unrichtig, und zwar deshalb, weil die Größe u , die in der Formel für x direkt und überdies indirekt, nämlich durch die Größe χ' eingeführt, vorkommt, von der Zeit abhängt und diese Abhängigkeit in einer Gleichung berücksichtigt werden muß, die für die Zeit eine Doppelwurzel haben soll und deshalb auch nach der Ableitung nach der Zeit noch gültig bleiben muß.

Im folgenden wollen wir eine einfache direkte Ableitung der Formeln für ein Extremum — nicht nur für ein Maximum — der Phase geben, die Art des Extremums untersuchen und Grenzen für den Fehler der ungenauen Formel aufstellen.

1. Durch den Beobachtungsort B legt man die nach dem Punkte Z der um B beschriebenen Himmelskugel zeigende z -Achse parallel zu der Richtung vom Mittelpunkte M des Mondes zum Mittelpunkte S der Sonne. Der Schnittpunkt C der Achse MS des Schattenkegels mit der senkrecht zur z -Achse durch B gelegten xy -Ebene ist der Mittelpunkt des Mondschattens in dieser Ebene, und dieser Schatten wird entsprechend der Annahme, daß der Mond und die Sonne Kugeln seien, als kreisförmig angesehen. Die Entfernung BC bezeichnen wir mit r , den Halbmesser des Schattens mit u , und zwar soll u allgemein nicht für den wirklichen Schatten gelten, sondern für denjenigen Schatten, den entsprechend der Phase i nicht die ganze Sonne erzeugt, sondern eine mit ihr konzentrische Kugel erzeugen würde, deren Halbmesser sich zu dem der Sonne wie $1 - 2i$ zu 1 verhielte. Es möge nun durch

die Formel $x = (a, b)$ angedeutet werden, daß die Größe x alle Werte von einer unteren Grenze a bis zu einer oberen Grenze b annehmen kann; dann ist das ganze Bereich von i , das nur bei totalen und bei zentralen ringförmigen Finsternissen völlig erschöpft wird: $i = (0, 1)$. Die Phase wird hierbei in Teilen des Durchmessers der Sonnenscheibe gerechnet, während sie in der »Theorie« in »Zollen« ausgedrückt wird und gegen die hier gewählte Bezeichnung den Divisor 12 erhält. Der der Phase i zugehörige Wert von u wird nun nach einer in der »Theorie« nicht vorkommenden und später hier darzulegenden Formel durch das Produkt eines stets positiven und während einer Finsternis sehr wenig veränderlichen Faktors mit der Größe $k = h + (1 - 2i)h'$ dargestellt, in der h und h' die für B geltenden Werte des scheinbaren Halbmessers des Mondes und der Sonne bedeuten. Der absolute Betrag der Größe k stellt aber offenbar den der Phase i zugehörenden Abstand der Mittelpunkte M und S des Mondes und der Sonne an der um B beschriebenen Himmelskugel dar. Diese Größe und somit auch u bleiben nun, wenn $h > h'$ ist, also für Finsternisse, die total werden können, stets positiv; wenn dagegen $h < h'$ ist, also für Finsternisse, die ringförmig werden können, bleiben k und u nur für das Bereich $i = (0, \frac{1}{2}(1 + h/h'))$ positiv, werden aber für das Bereich $i = (\frac{1}{2}(1 + h/h'), 1)$, das der Ringförmigkeit zugehört, negativ. Um nun die Bedingung für den Anfang und das Ende der Finsternis von der Phase i , wonach r dem absoluten Werte von u gleich sein muß, einfach darzustellen, bezeichnen wir diesen Wert mit eu , indem entweder $e = +1$ oder $e = -1$ ist, je nachdem der Wert von u positiv oder negativ ausfällt. Der so entstehenden Gleichung $r = eu$ ist nun für ein Extremum der Phase die Gleichung $r' = eu'$ hinzuzufügen, in der r' und u' die auf die Zeiteinheit bezogenen augenblicklichen Änderungen von r und u bedeuten; als Zeiteinheit aber wählen wir eine Stunde der wahren Zeit, und wir vermeiden damit den in der »Theorie« bei der Zeit auftretenden Divisor 15. Aus den beiden für ein Extremum der Phase aufgestellten Formeln ergibt sich neben der Zeit des Extremums auch die Größe der entsprechenden Phase.

Die Zeit t des Eintrittes der Finsternis von einer beliebigen Phase wird nun durch Näherung bestimmt; man nimmt einen Näherungswert τ an und entwickelt die Gleichungen nach Potenzen der Größe $x = t - \tau$ und beschränkt sich jeweilig auf ihre erste Potenz. Es seien nun F und C die Orte des Schattenmittelpunktes in der xy -Ebene zu den Zeiten τ und t ; die drei Punkte BFC bilden dann ein geradliniges Dreieck, in dem die Seite BC bereits mit r bezeichnet worden ist; die Seite BF werde mit m bezeichnet, und die dritte Seite erhält mit der Geschwindigkeit m' der relativen Bewegung des Schattenmittelpunktes gegen B den Wert $m'x$. Die Winkel dieses Dreieckes an B, F, C bezeichnen wir mit $\mu - \varrho, \pi - \mu, (\pi = 180^\circ), \varrho$, und zwar rechnen wir diese Winkel so, daß FC durch eine rechtläufige, d. h. im Sinne von Nord nach Ost gehende Drehung von der Größe $\pi - \mu$ um F zur Deckung mit FB , und CB durch eine rechtläufige Drehung von der Größe ϱ um C zur Deckung mit CF gelange. Dann liest man von dem Dreiecke sofort die folgenden Formeln ab

$$r = m \cos(\mu - \varrho) + m' \cos \varrho \cdot x \quad 0 = m \sin(\mu - \varrho) - m' \sin \varrho \cdot x.$$

Die stets positiven Größen m, m' haben dabei dieselbe Bedeutung, wie in der »Theorie« (S. 412–415); die Größen μ, ϱ aber sind mit den dortigen Größen M, M', ψ, χ' durch die Formeln $\mu = M + M' \quad \varrho = \chi' = M' - \psi$

verbunden. Die Werte der nur von τ abhängigen Größen m, m', M, M' sind bekannt. Aus den beiden Formeln erhält man sogleich die Bestätigung, daß die ungenaue Formel für die größte Phase der Bedingung $r' = 0$ genügt; denn es wird dann $\cos \varrho = 0, x = -(m/m') \cos \mu$.¹⁾ Zur Erlangung der genauen Formel ist die Gleichung

$$u = v + v' x$$

hinzuzufügen, in der die Größen v und v' nur von τ abhängen und mit der Bezeichnung der »Theorie« (S. 313, 414, 415) durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$v \cos f = s + w \sin f \quad v' \cos f = w' \sin f$$

$$w = Z - \eta \sin \delta' - \xi \cos \delta' \cos(\tau + A\alpha')$$

$$w' = \pi \xi \cos \delta' \sin(\tau + A\alpha')$$

$$\log \pi = 9.417969 \quad \log s = 9.435395.$$

Für ein Extremum der Phase müssen nun die beiden Reihen für r und eu in den allein angesetzten Gliedern der beiden niedrigsten Ordnungen in x gliedweise übereinstimmen; es muß also

$$v = e m \cos(\mu - \varrho) \quad v' = e m' \cos \varrho$$

sein. Mit der für jede beliebige Phase geltenden Formel

$$x = m \sin(\mu - \varrho) / m' \sin \varrho$$

erlangt man also für ein Extremum der Phase den Wert

$$u = e m \sin \mu / \sin \varrho.$$

Bei einem Extremum der Phase sind nun die Werte der Phase i und des von ihr abhängigen erzeugenden Winkels f des ihr zugehörenden Schattenkegels zunächst unbekannt; wir eliminieren deshalb $\sin f$ aus den Formeln für $v \cos f$ und $v' \cos f$, lassen aber die Größe $\cos f$, deren Wert von 1 um höchstens 11 Einheiten der 6. Dezimale abweicht und zunächst mit der Einheit vertauscht werden kann, stehen, dann wird

$$(w v' - v w') \cos f = -s w'.$$

Setzt man hierin die Werte von v und v' ein, so entsteht mit Hilfe der Formeln

$$g \cos \gamma = m' w - m w' \cos \mu \quad g \sin \gamma = -m w' \sin \mu \quad g > 0$$

für die nur von τ abhängigen Größen g, γ die Formel

$$\cos(\gamma - \varrho) = -e s w' / g \cos f.$$

Die Zweideutigkeit der Bestimmung von ϱ aus dieser Formel ist durch die Bedingung zu heben, daß der Wert von eu , also auch der von $\sin \mu / \sin \varrho$ stets positiv sei. Zur Bestimmung des Extremums sind dann die Formeln

$$x = m \sin(\mu - \varrho) / m' \sin \varrho$$

$$\sin f = [e m \cos(\mu - \varrho) \cos f - s] / w = (m' / w') \cos \varrho \cos f$$

$$i = (\sin f_1 - \sin f) / (\sin f_1 - \sin f_2)$$

hinzuzufügen, in der f_1 und f_2 die nur von τ abhängigen Werte des erzeugenden Winkels des Schattens für die Phasen

¹⁾ Soweit ich neuere Lehrbücher hier einsehen kann, erkennt nur Chauvenet in seinem Manual of spherical and practical astronomy, B. I, S. 508 (Philadelphia 1887) die Ungenauigkeit der Bedingung $r' = 0$, er meint aber irrtümlich, daß »strenger« der Überschuß des für die Phase $i = 0$ geltenden Wertes von u über r ein Maximum sein müsse.

$i = 0$ und $i = 1$ bedeuten. Die aufgestellten Formeln bestimmen das Extremum der Phase vollständig. Hansen hat in seiner früheren Abhandlung die erste Formel nicht, sondern benutzt hier, indem er $\epsilon = 1$ annimmt, die folgenden in unsere Bezeichnung übertragenen Formeln

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= (w'/m') \operatorname{tg} f & u &= m \sin \mu / \sin \varphi \\ x &= -(m/m') \cos \mu + (u/m') \cos \varphi \\ \sin f &= [m \cos(\mu - \varphi) \cos f - s] / w \\ i &= (\sin f_1 - \sin f) / (\sin f_1 - \sin f_2).\end{aligned}$$

Bei unseren Formeln braucht nur ein Wert von $\cos f$ angenommen zu werden, und der Wert $\cos f = 1$ ist stets ausreichend genau; bei Hansens Formeln muß unvorteilhafter ein Wert von $\operatorname{tg} f$ angenommen und durch eine zweite Rechnung verbessert werden.

2. Wir wollen nun die Bereiche der Werte der in diesen Formeln vorkommenden Größen untersuchen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir mit einigen Formeln der »Theorie« Umgestaltungen vor. Wenn man den Beobachtungsort, der in Wirklichkeit in B auf der Oberfläche der Erde in der geographischen Breite φ liegt, nach dem Mittelpunkt E der Erde verschiebt und ihn dadurch zugleich der Mitnehmung durch die Rotation der Erde entzieht, so ändert sich die relative Geschwindigkeit von C gegen B in der bei der Verschiebung mitzunehmenden und parallel zu erhaltenden xy -Ebene aus m' in n , und der in C oder, bei der Übertragung auf die Himmelskugel in Z gegen den Deklinationskreis zu messende Positionswinkel der Richtung FC der relativen Bewegung von C gegen B verwandelt sich aus $N' + M'$ in N' .

$$Z = 1/\sin \varpi \quad w = 1/\sin \varpi - \cos z \quad \sin f = [s + (1 - 2i) s'] \sin \varpi \sin \varpi' / \sin(\varpi - \varpi')$$

und die Formel $u = s \sec f + w \operatorname{tg} f$ nimmt bei Vernachlässigung von Gliedern zweiten Grades in den Größen ϖ, ϖ', f gegenüber der Einheit die folgende Gestalt an

$$u = [s \sin \varpi (1 - \cos z \sin \varpi') + (1 - 2i) s' \sin \varpi' (1 - \cos z \sin \varpi)] / \sin(\varpi - \varpi').$$

Da aber ferner die für B geltenden scheinbaren Halbmesser h und h' des Mondes und der Sonne den Formeln

$$\sin h = s \sin \varpi / (1 - \cos z \sin \varpi) \quad \sin h' = s' \sin \varpi' / (1 - \cos z \sin \varpi') \quad \text{genügen, so entsteht}$$

die bereits erwähnte Formel $u = \{[1 - \cos z \sin(\varpi + \varpi')] / \sin(\varpi - \varpi')\} \cdot h \quad h = h + (1 - 2i) h'.$

Was nun die Bereiche der Werte der vorkommenden Größen betrifft, so liefert der »Canon der Finsternisse« die Werte $n = (0.5030, 0.5843)$, $a = (60^\circ 5', 119^\circ 5')$; sodann wird b , damit die Finsternis in B sichtbar bleibe, auf das Bereich $b = (-90^\circ, 90^\circ)$ beschränkt. Die Formel für m' zeigt dann, daß, für $\varphi = 0$ am weitesten ausgedehnt, $m' = (n - \kappa, \sqrt{n^2 + \kappa^2 \cos^2 a})$ oder numerisch $m' = (0.2412, 0.5984)$ ist. Das Bereich von w' ist, wieder für $\varphi = 0$ am weitesten ausgedehnt, $w' = (0, \kappa)$ oder numerisch $w' = (0, 0.2618)$. Mit dem bereits angeführten, die Irradiation berücksichtigenden Werte $s = 0.2725$ und dem Werte $s' = 109.05$, der den mittleren Werten $8'80$ und $959'63$ der Sonnenparallaxe und des scheinbaren geozentrischen Halbmessers der Sonne entspricht, und mit den den Ephemeriden entnommenen Bereichen $\varpi = (3234'', 3691'')$, $\varpi' = (8'653, 8'949)$ findet man dann mit Rücksicht auf $i = (0, 1)$, indem man für u die vorletzte Formel benutzt, die Bereiche $w = (54.89, 63.78)$, $\sin f = (-0.004706, 0.004730)$, $u = (-0.0293, 0.5759)$, und, da die Werte von m mit den absoluten Werten von u übereinstimmen, so wird auch $m = (0, 0.5759)$. Wir wollen nun die oberen und unteren Grenzen der ermittelten Bereiche mit einander so verbinden, daß möglichst weite Bereiche entstehen, und

Die Werte der Größen n, N' werden bei einer Finsternis voraus berechnet (»Theorie« S. 330–333). Der Punkt Z liegt in der Deklination δ' und in bezug auf den Meridian von B im Stundenwinkel t ; der auf der Himmelskugel von E in Z unter dem Positionswinkel N' angetragene größte Kreis K , in dem sich, von E aus gesehen, Z bewegt, schneidet den Meridian von B in dem Punkte D ; in ihm sei der Positionswinkel von K in dem gleichen Sinne gemessen, wie er in Z den Wert N' hat, gleich a und der auf K im Sinne der Bewegung von Z positiv gerechnete Bogen von Z bis D sei gleich b . Dann nehmen die Formeln für $m' \frac{\cos}{\sin} M'$ und für die Geschwindigkeit der Änderung von u (»Theorie« S. 412–415) leicht die folgende Gestalt an, die ebenso leicht auch aus der beschriebenen Figur direkt abgeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}m' \cos M' &= n(1 - \epsilon \sin a \cos b) & m' \sin M' &= -n \epsilon \cos a \\ w' &= n \epsilon \sin a \sin b & \epsilon &= \kappa \cos \varphi / n.\end{aligned}$$

Darin bedeutet ϵ das Verhältnis der Rotationsgeschwindigkeit von B zur geozentrischen relativen Geschwindigkeit des Schattenmittelpunktes in der xy -Ebene. Für die Größe m' im besonderen gilt also die Formel

$$m'^2 = n^2 (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin a \cos b + \epsilon^2 \sin^2 a \sin^2 b).$$

Wenn man nun, wie das hier ausreicht, auch die Erde als eine Kugel, und zwar vom Halbmesser 1 betrachtet, so verwandelt sich der Ausdruck $\eta \sin \delta' + \xi \cos \delta' \cos t$ (»Theorie« S. 411) in den Cosinus der in B gemessenen Zenitdistanz z von Z . Ferner seien ϖ und ϖ' die Äqu.-Hor.-Parallaxen des Mondes und der Sonne und s und s' die linearen Halbmesser des Mondes und der Sonne, dann wird (»Theorie« S. 326, 327)

keine Rücksicht darauf nehmen, ob eine solche Verbindung auch möglich sei; die wirklichen Bereiche können deshalb merkbar enger sein als die auf diese Weise berechneten. Man gelangt dann nach den für ein Extremum der Phase aufgestellten Formeln zu den Bereichen $m' w = (13.24, 38.16)$, $m w' = (0, 0.1508)$, $g \cos \gamma, g = (13.09, 38.31)$, $|g \sin \gamma| = (0, 0.1508)$, $|\sin \gamma| = (0, 0.01152)$, $|\cos(\gamma - \varrho)| = (0, 0.005450)$, $|\cos \varrho| = (0, 0.005134)$. Der Wert von γ weicht also von 0° oder 180° nur um höchstens $39'60$, und die Werte von $\gamma - \varrho$ und von ϱ weichen von 90° oder 270° nur um höchstens $18'73$ und $17'65$ ab; die Berechnung der beiden letzten Größen aus einem Cosinus ist also stets scharf. Schließlich erhält man für den Fehler δx der ungenauen Formel für die größte Phase nach der Gleichung

$$\delta x = (u/m') \cos \varphi = (u w'/m'^2) \operatorname{tg} f$$

das Bereich $|\delta x| = (0, 44'13)$. Dieses Bereich ist aber einerseits zu weit, und andererseits bleibt die Abhängigkeit des Fehlers von φ und i unkenntlich. Das Bereich soll deshalb für den uns besonders interessierenden Fehler δx genauer festgestellt werden; dabei wollen wir aber eine ausreichende Vereinfachung der Formeln vornehmen. Es ist $h/h' = (0.921, 1.108)$,

und von 100 totalen oder ringförmigen Finsternissen sind nach dem »Canon der Finsternisse« 43 total, 50 ringförmig und 7 für die verschiedenen Beobachtungsorte teils total, teils ringförmig. Wir wollen deshalb $h' = h$ annehmen und um so mehr ω und ω'/ω gegenüber der Einheit vernachlässigen, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= 2(1-i)s \\ \sin f &= (1-2i)h \quad u \operatorname{tg} f = c(1-i)(1-2i) \quad c = 2sh \\ \delta x &= (c\epsilon/\pi)(1-i)(1-2i)F \quad F = \sin a \sin b/N \\ N &= 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin a \cos b - \epsilon^2 \sin^2 a \sin^2 b \end{aligned}$$

Für ein Extremum von δx sind nun zuerst die Formeln

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial F / \partial a = \cos a \sin b (1 + \epsilon^2 + \epsilon^2 \sin^2 a \sin^2 b) / N^2 \\ F_2 &= \partial F / \partial b = \sin a [\cos b (1 + \epsilon^2 + \epsilon^2 \sin^2 a \sin^2 b) - 2\epsilon \sin a] / N^2 \end{aligned}$$

aufzustellen und die Werte dieser Ausdrücke zum Verschwinden zu bringen. Die erste Formel liefert dann, da der Wert $b = 0$ ausgeschlossen ist, weil für ihn auch δx verschwindet, den Wert $a = \pi/2$. Die zweite Formel erhält dann die Gestalt

$$F_2 = (1 - \epsilon \cos b) (-2\epsilon + \cos b + \epsilon \cos^2 b).$$

Der erste Faktor dieses Ausdrucks kann wegen der Ungleichheit $\epsilon < 1$ nicht verschwinden; das Verschwinden des zweiten Faktors ergibt aber mit der Abkürzung $\beta = \sqrt{1 + 8\epsilon^2}$ die Formeln

$$\begin{aligned} \cos^2 b &= 2(\beta - 1)/(\beta + 1) \\ \operatorname{tg}^2 b &= (3 - \beta)/2(\beta - 1) \quad F^2 = 16/(\beta + 1)(3 - \beta)^3. \end{aligned}$$

Es gibt hiernach zwei Örter von Z , die auf dem zum Meridiane von B senkrechten Kreise K symmetrisch zu diesem Meridiane liegen. Um zu untersuchen, ob für diese beiden Örter wirklich ein Extremum eintritt und welcher Art das Extremum ist, sind nun auch die zweiten Ableitungen von F nach a und b zu bilden. Da in diese Ableitungen aber die besonderen Werte von a und b einzusetzen sind, die die Zähler der Ausdrücke F_1 und F_2 zum Verschwinden bringen, so braucht man bei der nochmaligen Ableitung von F_1 und F_2 nach a und b nur die Zähler, nicht aber den gemeinsamen Nenner N^2 als veränderlich zu betrachten. Es entstehen so die Formeln

$$\begin{aligned} F_{11} &= \partial^2 F / \partial a^2 = -\sin b (1 + \epsilon^2 + \epsilon^2 \sin^2 b) / N^2 \\ F_{12} &= \partial^2 F / \partial a \partial b = 0 \\ F_{22} &= \partial^2 F / \partial b^2 = -\sin b (1 - \epsilon^2 + 3\epsilon^2 \sin^2 b) / N^2 \end{aligned}$$

Zuerst wird nun durch den Umstand, daß der Wert des Ausdrucks $F_{11} F_{22} - F_{12}^2$ positiv ist, erwiesen, daß in der Tat ein Extremum eintritt; und sodann folgt aus den übereinstimmenden Vorzeichen der beiden Ausdrücke F_{11} und F_{22} , daß δx für den westlichen der beiden Örter ein Maximum und für den östlichen ein Minimum wird. Da ferner in jedem der beiden durch den Meridian von B getrennten symmetrischen Teilbereiche von a und b nach jeder der beiden Größen nur ein Extremum auftritt, kann F in diesen Bereichen, ohne ein Extremum zu werden, nicht an anderen Stellen einen größeren Betrag als im Extremum erreichen.

Mit den auf große Werte von δx hinwirkenden Werten $h = 990''$, $n = 0.5030$, $i = 0$ ergeben sich die folgenden größten Werte von $|\delta x|$ und die zugehörigen Werte von $|b|$

$ b $	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$ \delta x $	41°5	42°1	43°7	46°5	50°5	55°7	62°3	70°4	79°8	90°0

Der hierbei durch seinen größten Wert ersetzte Faktor $(1-i)(1-2i) = (-1/8, 1)$ bewirkt meist eine beträchtliche Verringerung der Werte von δx .

Sternwarte Kiel, 1921 Juli.

Es muß nun noch im Zusammenhange mit einer Untersuchung des Vorzeichens der Werte von u festgestellt werden, wann in dem Extremum der Phase ein Maximum und wann ein Minimum vorliegt. Das geschieht am einfachsten durch die bloße Anschauung des Verlaufes der Finsternis am Himmel. Die in der xy -Ebene von B geltende Größe u wird nämlich nach der letzten für sie aufgestellten Formel, abgesehen von dem stets positiven und während einer Finsternis nur wenig veränderlichen Faktor $[1 - \cos z \sin(\omega + \omega')/\sin(\omega - \omega')]$ durch die Größe $k = h + (1-2i)h'$ ersetzt und dadurch anschaulich auf die Himmelskugel um B übertragen. Es sei nun der stets positiv gerechnete geringste Wert, den $|k| = SM$ an der Himmelskugel von B im Verlaufe der Finsternis für B annehmen kann, gleich p , dann ergeben Skizzen für die verschiedenen Arten der Finsternis sogleich das Folgende: 1) Für partielle Finsternisse gibt es nur ein Bereich zusammengehörender Werte von i und k , nämlich $i = (0, 1/2[1 + (h-p)/h'])$, $k = (p, h+h')$ und die obere Grenze von i und die untere von k ergeben ein Maximum der Phase und die Werte von k und folglich auch die von u sind stets positiv. 2) Für totale Finsternisse ($h > h'$) gibt es gleichfalls nur ein Bereich von i und k , nämlich $i = (0, 1)$, $k = (h-h', h+h')$, es tritt aber hier überhaupt kein Extremum der Phase ein, die Werte von k und u sind aber auch hier stets positiv. 3) Für ringförmige Finsternisse ($h < h'$) gibt es zwei getrennte Bereiche von i und k , nämlich, zusammen gehörend erstens $i = (0, 1/2[1 + (h-p)/h'])$, $k = (p, h+h')$ und zweitens $i = (1/2[1 + (h+p)/h'], 1)$, $k = (-h'-h, -p)$; im ersten Bereiche ergeben wieder die obere Grenze von i und die untere von k ein Maximum der Phase und die Werte von k und u sind hier stets positiv; im zweiten Bereiche aber ergeben die untere Grenze von i und die obere von k ein Minimum der Phase und die Werte von k und u sind hier stets negativ. Die beiden Bereiche sind voneinander getrennt, wenn $p \neq 0$ ist, das Bereich $i = (1/2[1 + (h-p)/h'], 1/2[1 + (h+p)/h'])$, $k = (-p, p)$ bleibt dann unzugänglich; für $p = 0$ aber schließen sich die beiden Bereiche lückenlos zu dem Gesamtbereiche $i = (0, 1)$, $k = [-h'-h, h+h']$ aneinander an. Mit Ausschluß der totalen Finsternisse, denen überhaupt kein Extremum der Phase zugehört, tritt also ein Maximum oder ein Minimum der Phase ein, je nachdem $\epsilon = +1$ oder $\epsilon = -1$ ist.

Über den Positionswinkel des Berührungspunktes T des Mondrandes fügen wir das folgende hinzu: Für den Beobachter liegen die Punkte Z, S, M in dieser relativen Lage auf einem größten Kreise, auf dem sich auch T befindet. Die Positionswinkel sind streng genommen in Z zu messen; es ist aber $ZS/SM = \sin \omega' (1 - \cos z \sin \omega) / \sin(\omega - \omega')$ oder ausreichend genau $= \sin \omega' / \sin \omega = sh'/s'h$, und ZS kann deshalb für eine Finsternis höchstens auf $(sh'/s'h)(h+h')$ steigen. Ein Positionswinkel, der, in Z gemessen, gleich θ ist, wächst aber in S gemessen um $\sin \theta \operatorname{tg} \theta' \sin(ZS)$, bei einer Finsternis also höchstens um $\pm 2^\circ 3'$. Mit Vernachlässigung so kleiner Beträge können also die Positionswinkel in gleicher Größe von Z auf S übertragen werden. Der Positionswinkel von M ist nun offenbar gleich $N' + M' - \varphi$, und der Positionswinkel von T ist der gleiche oder um π verschieden, je nachdem die Punkte M und T beide auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von S liegen. Solange eine Finsternis nur partial ist, trifft das Erste oder das Zweite zu, je nachdem $i = (0, 1/2)$ oder $i = (1/2, 1)$ ist; so lange aber eine Finsternis ringförmig ist, tritt das Erste für $\epsilon = -1$, das Zweite für $\epsilon = +1$ ein.

P. Harzer.