Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche.

Von

OSKAR PERRON in Tübingen.

Einleitung.

Ist $\psi(x)$ eine in dem endlichen Intervall (a, b) wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, so hat das Stieltjessche Integral

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

einen assoziierten Kettenbruch*)

$$\frac{k_1}{z+l_1} + \frac{k_2}{z+l_2} + \frac{k_3}{z+l_3} + \dots$$

Der Übergang vom Integral zum Kettenbruch wird vermittelt durch die Reihe

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots,$$

wobei

$$c_k = \int_a^b (-x)^{k-1} d\psi(x)$$

ist. Während aber die Reihe nur für genügend große Werte von z konvergiert, hat Herr Markoff den sehr bemerkenswerten Satz bewiesen, daß die Konvergenz des Kettenbruches viel weiter reicht, indem die Gleichung

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \frac{k_1}{z+l_1} + \frac{k_2}{z+l_2} + \dots$$

*) Über die hier auftretenden Begriffe vergleiche man Kap. IX meines Buches: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig 1913. Im folgenden unter „Lehrbuch“ zitiert.

für alle (reellen und komplexen) z gilt, welche nicht dem Intervall $-b \leq z \leq -a$ angehören (Lehrbuch, S. 385, Satz 2).

Ist speziell $a = 0^*$), so gibt es auch einen *korrespondierenden* Kettenbruch

$$\frac{1}{b_1 z} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3 z} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5 z} + \frac{1}{b_6} + \dots,$$

und dieser ist wieder gleich dem Integral für alle z , welche nicht dem Intervall $-b \leq z \leq 0$ angehören (Lehrbuch, S. 388, Satz 3).

Der Markoffsche Beweis ist wesentlich an die Voraussetzung eines *endlichen* Intervalles (a, b) gebunden. Wenn aber $b = \infty$, so ist der Kettenbruch, *obwohl dann die Reihe für alle z divergiert* (Lehrbuch S. 390), noch vielfach konvergent, und Herr Markoff hat an der gleichen Stelle auf einem anderen Weg einige engumgrenzte Spezialfälle nachweisen können, in denen der assoziierte Kettenbruch gleich dem Integral ist. Für den *korrespondierenden* Kettenbruch hat Stieltjes die Frage zu einem gewissen Abschluß gebracht, indem er in der Divergenz der Reihe $\sum b_v$, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür erkannte, daß der Kettenbruch für alle nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehörenden z konvergiert und gleich dem Integral ist (Lehrbuch, S. 390, Satz 4).

Indessen ist es wünschenswert, aus dem Verhalten der Funktion $\psi(x)$ direkt auf die Konvergenz des assoziierten oder korrespondierenden Kettenbruches und seine Gleichheit mit dem Integral schließen zu können, ohne daß man die Koeffizienten k_v, l_v, b_v erst explizit berechnen muß. Bereits Stieltjes hat am Schluß seiner Arbeit 4a (Numerierung wie im „Lehrbuch“) diesem Problem ein paar Seiten gewidmet. Ein weiterer Beitrag soll in den folgenden Zeilen geliefert werden.

§ 1.

Sei a eine endliche reelle Zahl, und $\psi(x)$ eine im Intervall (a, ∞) wachsende Funktion, aber derart, daß die Integrale

$$(1) \quad \int_a^{\infty} (-x)^{k-1} d\psi(x) = c_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

sämtlich existieren. Dabei setzen wir voraus, daß $\psi(x)$ nicht von einem gewissen x an konstant bleibt, sondern also beliebig große Wachstumsstellen

*) Hierin ist auch der Fall $a > 0$ inbegriffen. Denn für $a > 0$ ist

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_0^b \frac{d\psi(x)}{z+a},$$

wenn man $\psi(x) = \psi(a)$ für $x < a$ setzt.

aufweist; andernfalls könnte man die obere Integrationsgrenze durch eine endliche ersetzen. Unter dieser Voraussetzung ist von einem gewissen k an stets

$$(2) \quad \int_a^\infty x^k d\psi(x) > \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x).$$

Für $a \geq 1$ ist das evident. Wenn aber $a < 1$, so ist

$$\int_a^\infty x^{k-1}(x-1) d\psi(x) = \int_a^1 + \int_1^{|a|+3} + \int_{|a|+3}^\infty \geq - \left| \int_a^1 \right| + \int_{|a|+3}^\infty.$$

Nun ist offenbar

$$\begin{aligned} \text{für } a \leq x \leq 1: & \quad |x^{k-1}(x-1)| < (|a|+1)^k, \\ \text{für } x \geq |a|+3: & \quad |x^{k-1}(x-1)| > (|a|+2)^k, \end{aligned}$$

sodaß aus vorigem folgt:

$$\int_a^\infty x^{k-1}(x-1) d\psi(x) > -(|a|+1)^k \int_a^1 d\psi(x) + (|a|+2)^k \int_{|a|+3}^\infty d\psi(x).$$

Die rechte Seite wird aber für genügend große k gewiß positiv, weil $\psi(x)$

beliebig große Wachstumsstellen hat, also $\int_{|a|+3}^\infty d\psi(x)$ größer als Null ist.

Aus der hiermit bewiesenen Formel (2) folgt insbesondere

$$\int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) = (-1)^{k-1} c_k > 0$$

für genügend große k . Denn wenn k ungerade, so ist das evident; für die nächstfolgende gerade Zahl k aber folgt es dann aus (2). Wir setzen nun voraus, die wachsende Funktion $\psi(x)$ sei so beschaffen, daß für unbegrenzt viele Werte von k die Ungleichung besteht:

$$(3) \quad \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) = (-1)^{k-1} c_k < G^k k!,$$

wo G eine von k unabhängige Zahl ist. Mit anderen Worten, es soll

$$(4) \quad \liminf_{k=\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!} (-1)^{k-1} c_k} = \text{endlich}$$

sein. In (3) kann man für G natürlich eine beliebig große Zahl denken sodaß wir, wenn a vielleicht negativ ist, doch jedenfalls

$$(5) \quad a + G > 0$$

voraussetzen dürfen. Weiter bemerken wir, daß die Ungleichung (3) gewiß auch für unendlich viele *ungerade* Werte von k besteht, wenn wir nur G eventuell durch eine größere Zahl G' ersetzen. Denn wenn im Gegenteil für alle hinreichend großen ungeraden k

$$\int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) \geq G'^k k!$$

wäre, so würde aus (2) folgen

$$\int_a^\infty x^k d\psi(x) > G'^k k! = \frac{1}{(k+1)G'} \left(\frac{G'}{G}\right)^k G^{k+1}(k+1)! > G^{k+1}(k+1)!,$$

wo nun $k+1$ gerade ist. Die Ungleichung (3) wäre also für *alle* hinreichend großen k (gerade und ungerade) nicht erfüllt, im Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 1. *Unter der Voraussetzung (4) ist der mit dem Integral $\int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ assoziierte Kettenbruch für $\Re(z) > -a$ konvergent und gleich dem Integral.*)*

Daß der assoziierte Kettenbruch überhaupt existiert, ist Lehrbuch, S. 377, Satz 1 bewiesen. Ist dann $\frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)}$ der Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung, so sind die λ Wurzeln von $L_\lambda(-x)$ ungleich und gehören dem Intervall (a, ∞) an (Lehrbuch, S. 385). Bezeichnet man sie mit $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$, so ist (Lehrbuch, S. 386f.):

$$(6) \quad \frac{K_\lambda(-x_i)}{L'_\lambda(-x_i)} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda),$$

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L'_\lambda(-x_i)} x_i^{k-1} = \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) \quad (k = 1, 2, \dots, 2\lambda);$$

außerdem, wenn $\Omega(x)$ ein beliebiges Polynom vom höchstens $(2\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grad bedeutet,

$$(8) \quad \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_a^\infty \left(\frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right) d\psi(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L'_\lambda(-x_i)} \left(\frac{1}{z+x_i} - \Omega(x_i) \right).$$

*) $\Re(z)$ bedeutet den reellen Teil von z . Es ist mehr als wahrscheinlich, daß der Satz sogar für alle z gilt, die nicht dem Intervall $(-\infty, -a)$ angehören; doch konnte ich ihn in diesem Umfang nur beweisen, wenn $a \geq 0$ ist (siehe Seite 553).

Diese Formeln sind zwar a. a. O. nur im Fall einer *endlichen* oberen Integrationsgrenze aufgestellt; ihr Beweis ist aber frei von dieser Voraussetzung, welche dort erst gebraucht wird, *nachdem* diese Formeln hergeleitet sind.

Wir denken uns jetzt unter z einen beliebigen konstanten Wert, dessen reeller Teil $\Re(z)$ größer als $-a$ ist. Sodann wählen wir für $\Omega(x)$ speziell das folgende Polynom:

$$(9) \quad \Omega(x) = \frac{-1}{\varphi(-z)} \frac{\varphi(x) - \varphi(-z)}{x + z},$$

wobei

$$(10) \quad \varphi(x) = \prod_{\nu=1}^k (a + \nu G - x)$$

ist, unter G eine Zahl verstanden, welche die Ungleichung (3) für unendlich viele ungerade Werte von k verbürgt, ebenso die Ungleichung (5). Da $\varphi(x) - \varphi(-z)$ durch $x + z$ teilbar ist, so ist $\Omega(x)$ in der Tat ein Polynom, und zwar vom Grad $k-1$. Dieser Grad muß kleiner sein als 2λ , und sei außerdem so gewählt, daß die Ungleichung (3) für diesen Wert von k erfüllt ist. Für genügend große Werte von λ ist das sicher möglich, und zwar dürfen wir uns k ungerade und beliebig groß denken, wenn wir nur λ groß genug gewählt haben.

Aus (9) erhält man:

$$(11) \quad \frac{1}{z+x} - \Omega(x) = \frac{1}{\varphi(-z)} \frac{\varphi(x)}{z+x}.$$

Nun ist aber

$$|\varphi(-z)| = \prod_{\nu=1}^k |a + \nu G + z| \geq \prod_{\nu=1}^k |a + \nu G + \Re(z)|.$$

Bezeichnet man die nach Voraussetzung positive Zahl $a + \Re(z)$ mit σ , so kommt also:

$$(12) \quad |\varphi(-z)| \geq \prod_{\nu=1}^k (\sigma + \nu G).$$

Bei der Abschätzung von $\frac{\varphi(x)}{z+x}$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Sei erstens

$$a + (p-1)G \leq x \leq a + pG,$$

wo p eine der Zahlen $1, 2, \dots, k$ bedeutet. Dann ist

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \prod_{\nu=1}^{p-1} (x-a-\nu G) \cdot \prod_{\nu=p}^k (a+\nu G-x)^* \\
&\leq \prod_{\nu=1}^{p-1} (a+pG-a-\nu G) \cdot \prod_{\nu=p}^k (a+\nu G-a-(p-1)G) \\
&= G^{p-1} (p-1)! G^{k-p+1} (k-p+1)! \\
&\leq G^k k!.
\end{aligned}$$

Daher ist überhaupt für $a \leq x \leq a+kG$

$$|\varphi(x)| \leq G^k k!;$$

also mit Rücksicht auf (11) und (12)

$$\left| \frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right| \leq \frac{G^k k!}{\prod_{\nu=1}^k (\sigma + \nu G)} \left| \frac{1}{z+x} \right|.$$

Nun ist $|z+x| \geq \Re(z) + a = \sigma$; setzt man ferner

$$(13) \quad \frac{G^k k!}{\prod_{\nu=1}^k (\sigma + \nu G)} = \prod_{\nu=1}^k \frac{\nu G}{\sigma + \nu G} = \varepsilon_k,$$

so ist

$$(14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0,$$

und man erhält:

$$(15) \quad \left| \frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right| \leq \frac{\varepsilon_k}{\sigma} \quad (\text{für } a \leq x \leq a+kG).$$

Sei zweitens $x \geq a+kG$. Dann ist

$$\frac{|\varphi(x)|}{|z+x|} = \frac{1}{|z+x|} \prod_{\nu=1}^k (x-a-\nu G) < \frac{(x-a-G)^k}{x+\Re(z)} < (x-a-G)^{k-1},$$

wegen (5) also erst recht kleiner als x^{k-1} . Daher kommt diesmal mit Rücksicht auf (11) und (12):

$$(16) \quad \left| \frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right| < \frac{x^{k-1}}{\prod_{\nu=1}^k (\sigma + \nu G)} = \varepsilon_k \frac{x^{k-1}}{G^k k!} \quad (\text{für } x \geq a+kG).$$

Aus (15) und (16) folgt nun zusammenfassend, weil k ungerade, also x^{k-1} stets positiv ist, für alle $x \geq a$:

$$\left| \frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right| < \frac{\varepsilon_k}{\sigma} + \varepsilon_k \frac{x^{k-1}}{G^k k!}.$$

*) Für $p=1$ ist das erste Produkt durch 1 zu ersetzen.

Schätzt man hiernach die rechte Seite der Formel (8) ab, wobei zu bedenken ist, daß die Wurzeln x_i reell und größer als a sind, so kommt:

$$\left| \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} \right| < \frac{\varepsilon_k}{\sigma} \int_a^\infty d\psi(x) + \frac{\varepsilon_k}{G^k k!} \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) \\ + \sum_{i=1}^{\lambda} \left| \frac{K_\lambda(-x_i)}{L'_\lambda(-x_i)} \right| \left(\frac{\varepsilon_k}{\sigma} + \varepsilon_k \frac{x_i^{k-1}}{G^k k!} \right).$$

Unter dem Summenzeichen darf man aber wegen (6) die Absolutstriche weglassen, und dann ergibt sich durch Anwendung von Formel (7) auf die Summe einfacher:

$$\left| \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} \right| < \frac{2\varepsilon_k}{\sigma} \int_a^\infty d\psi(x) + \frac{2\varepsilon_k}{G^k k!} \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x).$$

Da wir den Index k aber so gewählt haben, daß die Ungleichung (3) erfüllt ist, erhalten wir:

$$\left| \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} \right| < \frac{2\varepsilon_k}{\sigma} \int_a^\infty d\psi(x) + 2\varepsilon_k.$$

Weil mit λ auch k beliebig groß gewählt werden darf, und $\lim \varepsilon_k = 0$ ist, folgt hieraus sogleich:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

§ 2.

Handelt es sich um das Integral

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x},$$

wo also die untere Grenze Null ist (vgl. übrigens die Fußnote Seite 546), so existiert, wie bereits bemerkt, nicht nur der assoziierte, sondern auch der korrespondierende Kettenbruch

$$\frac{1}{|b_1 z|} + \frac{1^*}{|b_2|} + \frac{1}{|b_3 z|} + \frac{1}{|b_4|} + \frac{1}{|b_5 z|} + \frac{1}{|b_6|} + \dots$$

Wir setzen wieder voraus, daß für unbegrenzt viele Werte von k die Ungleichung

$$\int_0^\infty x^{k-1} d\psi(x) = (-1)^{k-1} c_k < G^k k!$$

besteht, und können dann eine ganz analoge Analyse wie im vorigen Paragraphen durchführen. Ist $\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)}$ der Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung des korrespondierenden Kettenbruches, so hat das Polynom $B_\lambda(-x)$ ν Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, wobei $\nu = \frac{\lambda}{2}$ oder $\frac{\lambda+1}{2}$ ist; sie gehören sämtlich dem Intervall $(0, \infty)$ an. An Stelle der Formeln (6), (7), (8) treten die folgenden (Lehrbuch, S. 388f.):

$$\frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)} x_i^{k-1} = \int_0^{\infty} x^{k-1} d\psi(x) \quad (k = 1, 2, \dots, \lambda),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{z+x} - \Omega(x) \right) d\psi(x) - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)} \left(\frac{1}{z+x_i} - \Omega(x_i) \right),$$

wobei $\Omega(x)$ ein beliebiges Polynom vom höchstens $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grad bedeutet. Wählt man dann $\Omega(x)$ genau wie im vorigen Paragraphen, so ergibt sich auf die gleiche Weise:

$$(17) \quad \frac{1}{|b_1 z|} + \frac{1}{|b_2 z|} + \frac{1}{|b_3 z|} + \frac{1}{|b_4 z|} + \dots = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} \quad (\Re(z) > 0).$$

Der Beweis gestaltet sich sogar etwas einfacher, weil keine negativen Werte von x in Betracht kommen, sodaß es nicht nötig ist, auf die Wahl eines ungeraden k Bedacht zu nehmen. Man sieht nun aber leicht, daß die Formel (17) nicht nur für $\Re(z) > 0$ gilt, sondern für alle z , die nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehören. Denn da die Gleichung (17) überhaupt für gewisse Werte von z besteht, so muß nach Lehrbuch, S. 390, Satz 4 die Reihe $\sum b_\nu$ divergieren, und dann gilt die Formel nach dem gleichen Satz für alle die genannten z . Somit ist bewiesen:

Satz 2. Sei $\psi(x)$ eine im Intervall $(0, \infty)$ wachsende Funktion mit beliebig großen Wachstumsstellen, aber derart, daß die Integrale

$$\int_0^{\infty} (-x)^{k-1} d\psi(x) = c_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

existieren. Wenn dann

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!} (-1)^{k-1} c_k}$$

endlich ist, so hat das Integral $\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ einen korrespondierenden Ketten-

bruch, der für alle z , die nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehören, gleich dem Integral ist.

Hieraus ergibt sich weiter, daß im Fall des Satz 1, wenn $a \geq 0$ ist, der assoziierte Kettenbruch nicht nur für $\Re(z) > -a$, sondern außerdem für alle z , die nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehören, gleich dem Integral ist, also schließlich für alle z , die nicht dem Intervall $z \leq -a$ angehören. Denn wegen $a \geq 0$ existiert auch der korrespondierende Kettenbruch, und der assoziierte geht aus ihm durch Kontraktion hervor (Lehrbuch, S. 376), ist also mindestens im selben Gebiet konvergent und hat den gleichen Wert.

Um Irrtümern vorzubeugen, muß jedoch bemerkt werden, daß im Fall $a > 0$ der korrespondierende Kettenbruch im Gegensatz zum assoziierten nicht schon für $\Re(z) > -a$ konvergiert. Unser Beweis versagt hier deshalb, weil die Wurzeln von $B_\lambda(-x)$ nicht dem Intervall (a, ∞) angehören, sondern dem Intervall $(0, \infty)$; für jedes ungerade λ ist nämlich die Wurzel $x = 0$ vorhanden, während die übrigen allerdings im Intervall (a, ∞) liegen. Und in der Tat ist der korrespondierende Kettenbruch auch mindestens für $z = 0$ divergent (Lehrbuch, S. 233, Satz 4).

Beispiel. Sei $G(x)$ eine im Intervall (a, ∞) stetige und beschränkte positive Funktion, etwa $0 < G(x) < C$. Dann ist

$$\int_a^x |x|^\alpha G(x) e^{-x} dx = \psi(x)$$

(α reell; $\alpha > -1$, falls $a \leq 0$)

eine wachsende Funktion mit lauter Wachstumsstellen, und es ist mindestens für gerade große Werte von k

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^{k-1} d\psi(x) &= \int_a^\infty x^{k-1} |x|^\alpha G(x) e^{-x} dx < C \int_0^\infty x^{k-1} x^\alpha e^{-x} dx \\ &= C \Gamma(k + \alpha) < 2^k k!. \end{aligned}$$

Nach Satz 1 ist also der mit dem Integral

$$\int_a^\infty \frac{|x|^\alpha G(x) e^{-x}}{z + x} dx$$

assoziierte Kettenbruch für $\Re(z) > -a$ gleich dem Integral. Desgleichen, falls $a \geq 0$ ist, nach Satz 2 der korrespondierende Kettenbruch für alle z , die nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehören. Letzteres hat bereits Stieltjes 4a gefunden.

§ 3.

Unsere Untersuchungen liefern auch einen Beitrag zu dem *Stieltjes'schen Momentenproblem*, welches folgendermaßen lautet:

„Wenn eine unbegrenzte Serie von positiven Zahlen $g_1, g_2, g_3, \dots$ gegeben ist, so soll eine für $x=0$ verschwindende und für $x \geq 0$ wachsende Funktion $\psi(x)$ mit unendlich vielen Wachstumsstellen gefunden werden, die den Gleichungen genügt:

$$\int_0^\infty x^{k-1} d\psi(x) = g_k \quad (k=1, 2, 3, \dots)“.$$

Nach Lehrbuch, S. 416 ist für die Lösbarkeit des Momentenproblems notwendig und hinreichend, daß

$$(18) \quad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_\nu \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_\nu & g_{\nu+1} & \cdots & g_{2\nu-1} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_2 & g_3 & \cdots & g_\nu \\ g_3 & g_4 & \cdots & g_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_\nu & g_{\nu+1} & \cdots & g_{2\nu-2} \end{vmatrix} > 0$$

ist für alle ν . Alsdann hat die Reihe:

$$(19) \quad \frac{g_1}{z} - \frac{g_2}{z^2} + \frac{g_3}{z^3} - \frac{g_4}{z^4} + \dots$$

einen korrespondierenden Kettenbruch

$$(20) \quad \frac{1}{|b_1 z|} + \frac{1}{|b_2|} + \frac{1}{|b_3 z|} + \frac{1}{|b_4|} + \frac{1}{|b_5 z|} + \frac{1}{|b_6|} + \dots$$

mit lauter positiven b_v , und das Momentenproblem hat nur eine oder unendlich viele Lösungen, je nachdem die Reihe Σb_v divergiert oder konvergiert (Lehrbuch, S. 417). Wir behaupten nun, daß gewiß der Fall *nur einer* Lösung vorliegt, wenn

$$(21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \sqrt[k]{\frac{1}{k!} g_k} = \text{endlich}$$

ist. Wenn dann nämlich $\psi(x)$ eine Lösung ist, so ist das Integral

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

korrespondierend mit dem Kettenbruch (20). Nach Satz 2, wobei $c_k = (-1)^{k-1} g_k$ zu setzen ist, besteht dann Gleichheit zwischen dem Kettenbruch (20) und dem Integral (22). Der Kettenbruch ist also konvergent, daher die Reihe Σb_v divergent, und folglich *nur eine* Lösung des Momentenproblems vorhanden. W. z. b. w.