Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen.

Von

EMIL HILB in Würzburg.

Läßt man in einem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dy_{\kappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda} a_{\lambda\kappa}(x) \quad \kappa = 1, 2, \dots, n$$

n unendlich groß werden, so erhält man bei geeignetem Grenzübergang eine lineare Integrodifferentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy(\kappa; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda,$$

wobei wir annehmen wollen, daß $a(\lambda, \kappa; x)$ innerhalb eines gegebenen Gebietes in der komplexen x -Ebene für alle reellen Werte von λ und κ , für welche $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \kappa \leq 1$ ist, eine monogene Funktion von x sei.

Es entsteht nun die Aufgabe, eine Theorie für die Gleichung (2) zu entwickeln, die den für die Systeme (1) vorhandenen mannigfachen funktionentheoretischen Untersuchungen analog ist, eine Aufgabe, die Herr Schlesinger*) sich gestellt und in erfolgreicher Weise in Angriff genommen hat, wobei er sich neben anderen Hilfsmitteln einer wiederholten Durchführung des Grenzübergangs bedient. Es erscheint mir aber von Interesse, die Integrodifferentialgleichung (2) einer direkten Behandlung zu unterziehen, was im folgenden geschehen soll.

*) Schlesinger, Sur les équations intégral-différentielles C. R. (1914) 158, S. 1872 f. und Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen, Deutsche Math. Ver. 24 (1915), S. 84f. Abgesehen von gewissen, durch formale Rechnung ableitbaren Sätzen, welche in § 3 zusammengestellt sind, wird die Kenntnis dieser Arbeiten hier nicht vorausgesetzt.

§ 1.

Grundlagen der Theorie.

Es habe in einem gewissen einfach oder mehrfach zusammenhängenden Bereich der komplexen x -Ebene $|a(\lambda, \kappa; x)|$ die Eigenschaft, für alle in Betracht kommenden Werte von x , λ und κ unterhalb einer festen Grenze M zu bleiben. Wir wenden auf (2) in bekannter Weise die Methode der sukzessiven Approximationen an und erhalten für $y(\kappa; x)$ eine in bezug auf κ und x gleichmäßig konvergente Reihe, welche für $y(\kappa; x)$ die Darstellung

$$(3) \quad y(\kappa; x) = c(\kappa) + \int_0^1 c(\lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

liefert, wobei, wenn α innerhalb des angegebenen Bereiches in der komplexen x -Ebene liegt,

$$(4) \quad y(\lambda, \kappa; x) = \int_{\alpha}^x a(\lambda, \kappa; x) dx + \int_{\alpha}^x dx \int_0^1 \int_{\alpha}^x a(\lambda, \lambda_1; x) dx a(\lambda_1, \kappa; x) d\lambda_1 + \dots$$

ist und also der Integrodifferentialgleichung

$$(5) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = a(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

genügt.

Die Gleichung (2) nennt Schlesinger die *Streckengleichung*, (5) die *Feldgleichung*. Die Einführung von $y(\lambda, \kappa; x)$ zur Darstellung von $y(\kappa; x)$ entspricht genau der Einführung der lösenden Funktionen in der Theorie der Integralgleichungen, nämlich, in der Sprache der bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*) ausgedrückt, der Abtrennung des Einheitskernes von der allgemeinen Lösung.

Für $x = \alpha$ nimmt $y(\kappa; x)$ den Wert $c(\kappa)$ an, während $y(\lambda, \kappa; \alpha)$ verschwindet. Eine Lösung von (5), welche für $x = \alpha$ den vorgegebenen Wert $c(i, \kappa)$ annimmt, ergibt sich ebenfalls vermittelt sukzessiver Approximationen in der Form

$$(6) \quad Y(i, \kappa; x) = c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda.$$

Wir nennen $Y(i, \kappa; x)$ eine *allgemeine* Lösung von (5), wenn die mit $c(i, \kappa)$ als Kern gebildete Integralgleichung

$$(7) \quad c(\kappa) = C(\kappa) + \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, \kappa) d\lambda$$

*) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 5. Mitt., Gött. Nachr. 1906, S. 439 f.

für beliebiges $c(\kappa)$ lösbar ist, d. h. wenn die zu $c(\lambda, \kappa)$ zugehörige *Fredholmsche Determinante* von Null verschieden ist. Es folgt durch Einsetzen von $c(\kappa)$ aus (7) in (3) unter Berücksichtigung von (6)

$$(8) \quad y(\kappa; x) = C(\kappa) + \int_0^1 C(\lambda) Y(\lambda, \kappa; x) d\lambda.$$

Nun genügt auch $Y(i, \kappa; x) - y(i, \kappa; x)$ der Integrodifferentialgleichung (2) und nimmt für $x = \alpha$ den Wert $c(i, \kappa)$ an; also ist nach (8)

$$Y(i, \kappa; x) - y(i, \kappa; x) = -C(i, \kappa) - \int_0^1 C(i, \lambda) Y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

oder

$$(9) \quad y(i, \kappa; x) = C(i, \kappa) + Y(i, \kappa; x) + \int_0^1 C(i, \lambda) Y(\lambda, \kappa; x) d\lambda,$$

wobei entsprechend (7)

$$(10) \quad c(i, \kappa) = -C(i, \kappa) - \int_0^1 C(i, \lambda) c(\lambda, \kappa) d\lambda$$

ist.

Nun ist nach einem bekannten Satze von Fredholm*), wenn

$$(11) \quad Y(i, \kappa) = c(i, \kappa) + y(i, \kappa) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa) d\lambda$$

ist, die Fredholmsche Determinante von $Y(i, \kappa)$ gleich dem Produkte der Fredholmschen Determinanten von $c(i, \kappa)$ und $y(i, \kappa)$.

Es verschwindet aber $y(i, \kappa; x)$ für $x = \alpha$, also hat die zu $y(i, \kappa; \alpha)$ gehörige Fredholmsche Determinante den Wert 1 und man kann daher um α eine endliche Umgebung in der komplexen x Ebene angeben, für welche die Fredholmsche Determinante von $y(i, \kappa; x)$, die nur von x allein abhängt, gewiß von Null verschieden ist. Dasselbe gilt aber nach (6) entsprechend dem eben erwähnten Satze für die Fredholmsche Determinante einer jeden *allgemeinen* Lösung der Feldgleichung und überhaupt für jede Lösung der Feldgleichung, die in irgend einem Punkte der eben betrachteten Umgebung von α einen Wert $\gamma(i, k)$ annimmt, dessen Fredholmsche Determinante von Null verschieden ist. Da man nun jeden Punkt des zugrunde gelegten Bereiches als α wählen kann, so folgt in

*) Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math. 27 (1903), S. 383.

bekannter Weise, daß die Fredholmsche Determinante einer *allgemeinen* Lösung in dem ganzen Bereiche nirgends verschwindet.*)

Läßt man nun in einem mehrfach zusammenhängenden Bereich der x -Ebene, innerhalb dessen $a(\lambda, \kappa; x)$ die am Anfang dieses Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften hat, x einen geschlossenen Umlauf machen, so wird $y(i, \kappa; x)$ im allgemeinen in eine andere Lösung $\bar{y}(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung übergehen, so daß

$$(12) \quad \bar{y}(i, \kappa; x) = c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

ist. Wir bezeichnen nun nach Schlesinger

$$c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

als Operation aufgefaßt mit

$$\{c(i, \kappa)\} \{y(i, \kappa; x)\},$$

wobei dann dieselben Regeln gelten, wie bei der Komposition von Bilinearformen**).

Die Formel (12) gilt speziell bei einem Umlauf um irgend einen isolierten singulären Punkt, etwa $x = 0$, in dessen Umgebung $|a(i, \kappa; x)|$ mit einer geeigneten Potenz von $|x|$ multipliziert unterhalb einer festen endlichen Grenze bleibt; diesen Fall werden wir im folgenden ausschließlich betrachten.

Es sei nun $\eta(i, \kappa; x)$ eine andere, in der Umgebung von 0 (dieses aber ausgeschlossen) reguläre Funktion von x , deren Fredholmsche Determinante für alle in Betracht kommenden Werte von x nicht verschwindet und welche bei dem obigen Umlauf in $\bar{\eta}(i, \kappa; x)$ übergeht, so daß

$$(13) \quad \{\bar{\eta}(i, \kappa; x)\} = \{c(i, \kappa) + \eta(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) \eta(\lambda, \kappa; x) d\lambda\} \\ = \{c(i, \kappa)\} \{\eta(i, \kappa; x)\}$$

ist; dann nennt Schlesinger $y(i, \kappa; x)$ und $\eta(i, \kappa; x)$ kogredient für die Umgebung von $x = 0$.

*) Schlesinger zeigt l. c. S. 96 durch Grenzübergang, daß die Fredholmsche

Determinante von $y(i, \kappa; x)$ den Wert $e^{\int_0^x dx \int_0^1 a(i, \lambda; x) d\lambda}$ hat; Sassmanshausen, ein Schüler von Schlesinger, beweist (Deutsche Math. Ver. 25 (1916)) die Formel direkt aus der Darstellung der Fredholmschen Determinante.

**) Ist $E(i, \kappa)$ die Einheitsform, so entspricht als Bilinearform aufgefaßt

$$\{c(i, \kappa)\} \{y(i, \kappa)\} \text{ formal } (E(i, \kappa) + c(i, \kappa))(E(i, \kappa) + y(i, \kappa)) - E(i, \kappa).$$

Da die Fredholmsche Determinante von $c(i, \kappa)$ von Null verschieden ist, existiert $c^{-1}(i, \kappa)$, so daß $\{c(i, \kappa)\} \{c^{-1}(i, \kappa)\} = 0$ ist.

Ist dann*)

$$(14) \quad \{\eta(i, \kappa; x)\} \{\eta^{-1}(i, \kappa; x)\} = 0,$$

so ist

$$\{\bar{\eta}^{-1}(i, \kappa; x)\} = [\{c(i, \kappa)\} \{\eta(i, \kappa; x)\}]^{-1} = \{\eta^{-1}(i, \kappa; x)\} \{c^{-1}(i, \kappa)\},$$

also ist

$$(15) \quad \{\bar{\eta}^{-1}(i, \kappa; x)\} \{\bar{y}(i, \kappa; x)\} = \{\eta^{-1}(i, \kappa; x)\} \{c^{-1}(i, \kappa)\} \{c(i, \kappa)\} \{y(i, \kappa; x)\} \\ = \{\eta^{-1}(i, \kappa; x)\} \{y(i, \kappa; x)\} = f(i, \kappa; x)$$

eine in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Funktion und

$$(16) \quad \{y(i, \kappa; x)\} = \{\eta(i, \kappa; x)\} \{f(i, \kappa; x)\}; \\ \{\eta(i, \kappa; x)\} = \{y(i, \kappa; x)\} \{f^{-1}(i, \kappa; x)\}.$$

§ 2.

Die Cauchy-Volterrasche Integrodifferentialgleichung.

Der einfachste Typus einer Feldgleichung ist

$$(17) \quad \frac{dy(i, \kappa; t)}{dt} = a(i, \kappa) + \int_0^1 y(i, \lambda; t) a(\lambda, \kappa) d\lambda,$$

in der $a(i, \kappa)$ von t unabhängig ist. Setzt man dann in üblicher Weise

$$\int_0^1 a^{(\nu)}(i, \lambda) a(\lambda, \kappa) d\lambda = a^{(\nu+1)}(i, \kappa) \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

so folgt aus der Methode der sukzessiven Approximationen

$$(18) \quad y(i, \kappa; t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\nu} \frac{a^{(\nu)}(i, \kappa)}{\nu!} = W(a(i, \kappa); t);$$

$W(a(i, \kappa); t)$ nennen wir nach dem Vorgang von Schlesinger**) die Volterrasche Transzendente.

$W(a(i, \kappa); t+u)$ genügt ebenfalls (17); aus (6) folgt dann sofort das Additionstheorem

$$(19) \quad W(a(i, \kappa); t+u) \\ = W(a(i, \kappa); t) + W(a(i, \kappa); u) + \int_0^1 W(a(i, \lambda); t) W(a(\lambda, \kappa); u) d\lambda.$$

Setzt man

$$t = \lg x,$$

*) l. c. S. 108.

**) l. c. S. 113.

so erhält man

$$(20) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = \frac{a(i, \kappa)}{x} + \int_0^1 y(i, \lambda; x) \frac{\alpha(\lambda, \kappa)}{x} d\lambda;$$

diese Gleichung bezeichnen wir als *Cauchy-Volterrasche* Feldgleichung.

Es besteht dann nach Schlesinger*) der Satz:

Zu einer Feldgleichung gibt es in der Umgebung einer ihrer isolierten singulären Stellen stets eine zu ihr kogrediente Cauchy-Volterrasche Feldgleichung.

Sei 0 diese singuläre Stelle, dann kommt also der Beweis dieses Satzes darauf hinaus, zu zeigen, daß man zu jedem $c(i, \kappa)$, dessen Fredholmsche Determinante von Null verschieden ist, $a(i, \kappa)$ so bestimmen kann, daß

$$(21) \quad W(a(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) = c(i, \kappa),$$

da bei einem Umlauf um $x = 0$, der von 1 ausgeht, t von 0 in $2\pi\sqrt{-1}$ übergeht.

Ist $|c(i, \kappa)| < 1$, so konvergiert die dem Logarithmus nachgebildete Reihe**)

$$(22) \quad c(i, \kappa) = \frac{c^{(2)}(i, \kappa)}{2} + \frac{c^{(3)}(i, \kappa)}{3} - \dots$$

Setzt man dann für $2\pi\sqrt{-1}$ $a(i, \kappa)$ diese Reihe ein, so ist (21) erfüllt, da der Bau der Reihe für $W(a(i, \kappa); t)$ formal mit dem der Reihe für $e^{ta(i, \kappa)} - 1$ übereinstimmt und alle in Betracht kommenden formalen Rechnungsregeln für beide Reihen gleicherweise gelten.

Ist $|c(i, \kappa)|$ nicht durchaus < 1 , so kann man, wie Schlesinger andeutet, den Nachweis durch Grenzübergang aus der analogen Tatsache in der Theorie der Matrizen oder durch analytische Fortsetzung mittel des Additionstheorems (19) erbringen. Wir wollen jedoch einen anderen Beweisgang einschlagen, der uns gleichzeitig für die späteren Entwicklungen Material bringen wird. Der Beweis besteht darin, daß wir $c(i, \kappa)$ in zwei Summanden zerlegen, die zueinander *orthogonal* sind, derart daß auch $2\pi\sqrt{-1}$ $a(i, \kappa)$ in zwei zueinander orthogonale Summanden zerfällt von denen der eine durch eine zu (22) analoge Reihe, der andere in endlicher Form darstellbar ist.

Zu diesem Zwecke setzen wir also

$$(23) \quad c(i, \kappa) = c_1(i, \kappa) + c_2(i, \kappa),$$

wobei $c_1(i, \kappa)$ der Bestandteil von $c(i, \kappa)$ ist, dessen notwendigerweise nur in endlicher Anzahl vorhandenen Eigenwerte absolut genommen kleine

*) l. c. Abschnitt V.

**) Schlesinger, l. c. S. 115.

sind als zwei, während alle Eigenwerte von $c_2(i, \kappa)$ absolut genommen größer sind als zwei*). Es ist:

$$(24) \quad \int_0^1 c_1(i, \lambda) c_2(\lambda, \kappa) d\lambda = \int_0^1 c_2(i, \lambda) c_1(\lambda, \kappa) d\lambda = 0.$$

Ist dann

$$\gamma(i, \kappa) = c_2(i, \kappa) + \mu \int_0^1 \gamma(i, \lambda) c_2(\lambda, \kappa) d\lambda,$$

so konvergiert die Reihe

$$(25) \quad \gamma(i, \kappa) = c_2(i, \kappa) + \mu c_2^{(2)}(i, \kappa) + \mu^2 c_2^{(3)}(i, \kappa) + \dots$$

absolut und gleichmäßig in i und κ , wenn $|\mu| < 2$ ist. In der Tat läßt sich nach den Fredholmschen Formeln $\gamma(i, \kappa)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von μ darstellen; der Nenner ist von i und κ unabhängig, seine Nullstellen sind absolut genommen größer als zwei, so daß der absolute Betrag des reziproken Wertes des Nenners für $|\mu| < 2$ unterhalb einer von i und κ unabhängigen Grenze bleibt; dasselbe folgt für den Zähler unmittelbar aus dem beim Beweis der Fredholmschen Formeln benützten Hadamardschen Determinantensatz. Daraus folgt unmittelbar die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (25) und um so mehr gilt diese für die Reihe

$$(26) \quad 2\pi \sqrt{-1} a_2(i, \kappa) = c_2(i, \kappa) - \frac{c_2^{(2)}(i, \kappa)}{2} + \frac{c_2^{(3)}(i, \kappa)}{3} \dots$$

Hingegen zerlegen wir $c_1(i, \kappa)$ entsprechend seinen Eigenwerten und den zu diesen Eigenwerten gehörigen kanonischen Untergruppen**) in eine Summe von zueinander orthogonalen Summanden, setzen also

$$c_1(i, \kappa) = C_1(i, \kappa) + C_2(i, \kappa) + \dots,$$

wobei, wenn wir $C_1(i, \kappa)$ als typischen Repräsentanten herausgreifen,***)

*) Goursat, Recherches sur les équations intégrales, Ann. de Toulouse 22 (1908), S. 64; vgl. auch Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Deutsche Math. Ver. 1911, S. 25.

**) Goursat, l. c. S. 63, théorème VIII.

***) Diese Darstellung geht aus der von Goursat S. 63, 1. Zeile gegebenen hervor, indem man wie l. c. S. 67

$$\Phi_1 = \varphi_1, \Phi_2 = \varphi_2, \dots, \Phi_\nu = \varphi_\nu$$

und

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \psi_1, \Psi_2 + \Psi_3 = \psi_2, \dots, \Psi_{\nu-1} + \Psi_\nu = \psi_{\nu-1}, \Psi_\nu = \psi_\nu$$

setzt. Im Texte ist dann statt Φ wieder $\frac{\varphi}{\mu_1}$, statt Ψ wieder ψ geschrieben.

$$(27) \quad \mu_1 C_1(i, \kappa) = \varphi_1(i)(\psi_1(\kappa) + \psi_2(\kappa)) + \varphi_2(i)(\psi_2(\kappa) + \psi_3(\kappa)) + \dots \\ \dots + \varphi_{r-1}(i)(\psi_{r-1}(\kappa) + \psi_r(\kappa)) + \varphi_r(i) \psi_r(\kappa)$$

und

$$(28) \quad \int_0^1 \varphi_r(i) \psi_s(i) di = 0, \quad \text{wenn } r \neq s, \\ = 1, \quad \text{wenn } r = s$$

ist. Ferner ist $|\mu_1| \leq 2$, speziell aber muß μ_1 von -1 verschieden sein, da wir annehmen, daß die Fredholmsche Determinante von $c(i, \kappa)$ von 0 verschieden ist.

Sei zunächst $r = 1$, so wollen wir zeigen, daß man $A_1(i, \kappa)$ so bestimmen kann, daß

$$(29) \quad W(A_1(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) = \frac{\varphi_1(i) \psi_1(\kappa)}{\mu_1}$$

wird. Wir setzen versuchsweise

$$(30) \quad A_1(i, \kappa) = \frac{\varphi_1(i) \psi_1(\kappa)}{\varrho},$$

dann folgt aus (29)

$$(31) \quad e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} = 1 + \frac{1}{\mu_1};$$

diese Gleichung für ϱ ist immer auflösbar, da für μ_1 die Werte 0 und -1 ausgeschlossen sind.

Im allgemeinen Fall setzen wir entsprechend

$$(32) \quad A_1(i, \kappa) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_1(\kappa) + \bar{\psi}_2(\kappa)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_2(\kappa) + \bar{\psi}_3(\kappa)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(\kappa)}{\varrho},$$

wobei für die Funktionen $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ die Relationen (28) gelten mögen. Dann wird

$$(33) \quad W(A_1(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) \\ = \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(\kappa) + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \frac{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}}}{1!} \bar{\psi}_2(\kappa) + \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \right)^2 \frac{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}}}{2!} \bar{\psi}_3(\kappa) + \dots \right] \\ + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(\kappa) + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \frac{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}}}{1!} \bar{\psi}_3(\kappa) + \dots \right] \\ + \dots$$

Bestimmt man ϱ aus (31), dann kann man von den Funktionen $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ durch eine doppelte lineare Substitution*) zu den φ, ψ so übergehen, daß

*) Vgl. auch Lalesco, l'étude des noyaux résolvants, Bulletin de la Soc. math. 39 (1911), S. 86 u. 96.

die rechte Seite von (33) in $C_1(i, \kappa)$ übergeht und für die Funktionen φ und ψ einerseits, $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ andererseits die Orthogonalitätsrelationen (28) gelten.

Nun sind die Funktionen $A_1(i, \kappa)$, $A_2(i, \kappa)$ usf., wie aus (32), (33) und (26) hervorgeht, untereinander und zu $a_2(i, \kappa)$ orthogonal, also folgt aus der Definitionsgleichung (18)

$$(34) \quad W((A_1(i, \kappa) + A_2(i, \kappa) + \dots + A_n(i, \kappa) + a_2(i, \kappa)); 2\pi\sqrt{-1}) \\ = W(A_1(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) + W(A_2(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) + \dots + W(A_n(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) \\ + W(a_2(i, \kappa); 2\pi\sqrt{-1}) = C_1(i, \kappa) + C_2(i, \kappa) + \dots + C_n(i, \kappa) + c_2(i, \kappa) = c(i, \kappa).$$

Es ist damit also tatsächlich gezeigt, daß man bei vorgegebenem $c(i, \kappa)$ stets ein $a(i, \kappa)$ so bestimmen kann, daß (21) erfüllt ist; es entsteht nun die Aufgabe, alle überhaupt möglichen $a(i, \kappa)$ zu bestimmen, mit anderen Worten, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür anzugeben, daß zwei Cauchy-Volterrasche Feldgleichungen kogredient sind. Es sollen jedoch dieser Untersuchung im nächsten Paragraphen einige formal abzuleitende Sätze von Schlesinger, die wir späterhin brauchen werden, vorangestellt werden.

§ 3.

Zusammenstellung von Hilfsformeln.

Ist $y^{-1}(i, \kappa; x)$ das inverse Feld zu $y(i, \kappa; x)$, also

$$(35) \quad \{y(i, \kappa; x)\} \{y^{-1}(i, \kappa; x)\} = 0,$$

so erhält man durch Auflösung der Integralgleichung (5), in welcher $y(i, \lambda; \kappa)$ als Kern aufgefaßt ist,

$$(36) \quad a(i, \kappa; x) = \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} + \int_0^1 y^{-1}(i, \lambda; x) \frac{dy(\lambda, \kappa; x)}{dx} d\lambda.$$

Ist dann

$$(37) \quad \eta(i, \kappa; x) = \{y(i, \kappa; x)\} \{g(i, \kappa; x)\},$$

so genügt $\eta(i, \kappa; x)$, wie aus (36) und (37) durch Umrechnung folgt*), der Feldgleichung

$$(38) \quad \frac{d\eta(i, \kappa; x)}{dx} = a(i, \kappa; x) + \int_0^1 \eta(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda,$$

wenn

*) Schlesinger, l. c. S. 110.

$$\begin{aligned}
 (39) \quad a(i, \kappa; x) &= a(i, \kappa; x) + \int_0^1 a(i, \lambda; x) g(\lambda, \kappa; x) d\lambda \\
 &+ \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) a(\lambda, \nu; x) g(\nu, \kappa; x) d\lambda d\nu + \frac{dg(i, \kappa; x)}{dx} \\
 &+ \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) \frac{dg(\lambda, \kappa; x)}{dx} d\lambda
 \end{aligned}$$

ist. Ferner erwähnen wir noch die folgenden zwei Sätze von Schlesinger:

a) Genügt $y(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung*)

$$(5) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = a(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

und ist $y^{-1}(i, \kappa; x)$ das inverse Feld zu $y(i, \kappa; x)$, so genügt $y^{-1}(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung

$$(40) \quad \frac{dy^{-1}(i, \kappa; x)}{dx} = -a(i, \kappa; x) - \int_0^1 y^{-1}(\lambda, \kappa; x) a(i, \lambda; x) d\lambda.$$

b) Die allgemeine Lösung**) der inhomogenen Cauchy-Volterraschen Streckengleichung

$$(41) \quad \frac{dy(\kappa; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) \frac{a(\lambda, \kappa)}{x} d\lambda + f(\kappa; x)$$

läßt sich in der Form darstellen

$$(42) \quad y(\kappa; x) = \int_{x_0}^x d\xi \left[f(\kappa; \xi) + \int_0^1 d\lambda f(\lambda; \xi) W(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{\xi}) \right].$$

§ 4.

Kogrediente Cauchy-Volterrasche Integrodifferentialgleichungen.

Es handelt sich nach den Ausführungen der § 1 und 2 um die Aufgabe, zu gegebenem stetigen $a(i, \kappa)$ alle stetigen Funktionen $b(i, \kappa)$ und alle in der Umgebung von $x = 0$ eindeutigen Funktionen $f(i, \kappa; x)$ zu bestimmen, so daß gemäß (16)

$$(43) \quad W(a(i, \kappa); \lg x) = \{ W(b(i, \kappa); \lg x) \} \{ f(i, \kappa; x) \}$$

wird. Diese Frage hängt auf das engste mit den Eigenwerten der Funk-

*) l. c. S. 118.

**) l. c. S. 122.

tion $a(i, \kappa)$ und der in (21) definierten Funktion $c(i, \kappa)$ zusammen. Es sei nämlich $y(\kappa; x)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$(44) \quad \frac{dy(\kappa; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) \frac{a(\lambda, \kappa)}{x} d\lambda,$$

so daß entsprechend (3) $y(\kappa; x)$ sich in der Form

$$(45) \quad y(\kappa; x) = C(\kappa) + \int_0^1 C(\lambda) W(a(\lambda, \kappa); \lg x) d\lambda$$

darstellen läßt. $W(a(\lambda, \kappa); \lg x)$ verschwindet nach (18) für $x=1$; ferner ist

$$(46) \quad y(\kappa, 1) = C(\kappa).$$

Also wird nach einem Umlauf von x um 0 entsprechend (21)

$$(47) \quad \bar{y}(\kappa, 1) = C(\kappa) + \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, \kappa) d\lambda$$

und speziell wird

$$(48) \quad \bar{y}(\kappa, 1) = \omega y(\kappa, 1),$$

wobei ω von κ unabhängig ist, wenn

$$(49) \quad C(\kappa) = \frac{1}{\omega - 1} \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, \kappa) d\lambda$$

ist, wenn also $\frac{1}{\omega - 1}$ ein Eigenwert μ_1 von $c(\lambda, \kappa)$ ist.

Nun folgt aus der Darstellung (18) von $W(a(\lambda, \kappa); \lg x)$, wie weiter unten noch näher ausgeführt werden soll, daß $W(a(\lambda, \kappa); \lg x)$ mit einer endlichen Potenz von x multipliziert an der Stelle $x=0$ endlich bleibt. Setzt man daher, wenn (49) erfüllt ist,

$$(50) \quad e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} = \omega = 1 + \frac{1}{\mu_1},$$

so erhält man durch formalen Ansatz von $y(\kappa; x)$ in der Form $x^\varrho \mathfrak{P}(\kappa; x)$, wo $\mathfrak{P}(\kappa; x)$ eine Potenzreihe in bezug auf x ist,

$$(51) \quad y(\kappa; x) = x^{\frac{1}{\varrho}} \varphi(\kappa).$$

Dabei ist

$$(52) \quad \varphi(\kappa) = \varrho \int_0^1 \varphi(\lambda) a(\lambda, \kappa) d\lambda.$$

Die Eigenwerte ϱ von $a(\lambda, \kappa)$ und die Eigenwerte μ von $c(\lambda, \kappa)$ sind also durch (50) verknüpft; die reziproken Eigenwerte von $a(i, \kappa)$ und $b(i, \kappa)$ dürfen sich daher entsprechend der in § 1 gegebenen Definition der Kogredienz nur um ganze Zahlen unterscheiden. Um diese ganzen

Zahlen festzulegen, wollen wir zeigen, daß man stets zu einer kogredienten Feldgleichung übergehen kann, bei welcher ein einziger reziproker Eigenwert um 1 vermehrt bzw. vermindert ist.

Es sei $a(i, \kappa)$ in die zwei orthogonalen Summanden $a_1(i, \kappa)$ und $a_2(i, \kappa)$ zerlegt, wobei analog zu (32)

$$(53) \quad a_1(i, \kappa) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_1(\kappa) + \bar{\psi}_2(\kappa)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_2(\kappa) + \bar{\psi}_3(\kappa)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_\nu(i) \bar{\psi}_\nu(\kappa)}{\varrho}.$$

Wir setzen

$$(54) \quad g(i, \kappa; x) = (x-1) (\bar{\varphi}_1(i) \bar{\psi}_1(\kappa) + \bar{\varphi}_2(i) \bar{\psi}_2(\kappa) + \dots + \bar{\varphi}_\nu(i) \bar{\psi}_\nu(\kappa)),$$

also hat man

$$(55) \quad g^{-1}(i, \kappa; x) = \frac{1-x}{x} (\bar{\varphi}_1(i) \bar{\psi}_1(\kappa) + \bar{\varphi}_2(i) \bar{\psi}_2(\kappa) + \dots + \bar{\varphi}_\nu(i) \bar{\psi}_\nu(\kappa)).$$

Ist dann

$$(56) \quad W(a(i, \kappa); \lg x) = \{ W(a(i, \kappa); \lg x) \} \{ g(i, \kappa; x) \},$$

so folgt aus (39) durch eine leichte Rechnung

$$(57) \quad \begin{aligned} a(i, \kappa) = & \bar{\varphi}_1(i) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_1(\kappa) + \frac{1}{\varrho + 1} \bar{\psi}_2(\kappa) \right] \\ & + \bar{\varphi}_2(i) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_2(\kappa) + \frac{1}{\varrho + 1} \bar{\psi}_3(\kappa) \right] + \dots \\ & \dots + \bar{\varphi}_\nu(i) \bar{\psi}_\nu(\kappa) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) + a_2(i, \kappa). \end{aligned}$$

Es ist also*) in dem $a_1(i, \kappa)$ entsprechenden Summanden tatsächlich $\frac{1}{\varrho}$ durch $\frac{1}{\varrho} + 1$ ersetzt. Besitzt $a_2(i, \kappa)$ noch ϱ als Eigenwert, so sind noch weitere Summanden abzuspalten und genau wie $a_1(i, \kappa)$ zu behandeln. Nimmt man statt $g(i, \kappa; x)$ die Funktion $g^{-1}(i, \kappa; x)$, so wird der reziproke Eigenwert um 1 erniedrigt. Nun haben die Eigenwerte von $a(i, \kappa)$ als einzige Häufungsstelle ∞ , es gibt also nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten, für welche der absolute Betrag der reellen Teile ihrer reziproken Werte größer ist als $\frac{1}{2}$.

Durch eine endliche Anzahl von Transformationen der beiden angegebenen Arten kann man also stets erreichen, daß die reziproken Werte aller Eigenwerte von $a(i, \kappa)$ reelle Teile besitzen, die zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen. Ist diese Bedingung für alle Eigenwerte von $a(i, \kappa)$ erfüllt, dann behaupten wir, daß $W(a(i, \kappa); \lg x)$ an der Stelle $x = 0$ schwächer unendlich wird, als $x^{-\frac{1}{2}}$, wenn wir die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ zunächst

*) Die Darstellung (57) läßt sich durch eine auf die $\bar{\varphi}_\nu(i)$ und $\bar{\psi}_\nu(\kappa)$ auszuübende doppelt lineare Substitution wieder orthogonal in die alte Normalform überführen.

ausschließen. Den Beweis führen wir analog wie in § 2 bei $c(i, \kappa)$, d. h. wir setzen

$$(58) \quad a(i, \kappa) = a_1(i, \kappa) + a_2(i, \kappa),$$

wobei $a_1(i, \kappa)$ und $a_2(i, \kappa)$ zueinander orthogonal und alle Eigenwerte von $a_1(i, \kappa)$ dem absoluten Betrage nach ≤ 4 sind, während die absoluten Beträge der Eigenwerte von $a_2(i, \kappa)$ größer sind als 4. Dann ist nach (18)

$$(59) \quad W(a(i, \kappa); \lg x) = W(a_1(i, \kappa); \lg x) + W(a_2(i, \kappa); \lg x).$$

Wie man sich durch dieselbe Rechnung, die zu (33) führte, leicht überzeugt, besteht $W(a_1(i, \kappa); \lg x)$ aus einer endlichen Anzahl von Summanden der Form

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(x^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(\kappa) + x^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg x}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_2(\kappa)}{1!} + x^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg x}{\varrho} \right)^2 \frac{\bar{\psi}_3(\kappa)}{2!} + \dots \right] \\ & + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(x^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(\kappa) + x^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg x}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_3(\kappa)}{1!} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Da^{*})

$$(60) \quad -\frac{1}{2} < \Re \left(\frac{1}{\varrho} \right) < \frac{1}{2},$$

so wird $W(a_1(i, \kappa); \lg x)$ für $x = 0$ und für $x = \infty$ schwächer unendlich, als $x^{-\frac{1}{2}}$ bzw. als $x^{\frac{1}{2}}$.

Ist ferner

$$(61) \quad a_2(i, \kappa) = a_2(i, \kappa) + \mu \int_0^1 a_2(i, \lambda) a_2(\lambda, \kappa) d\lambda,$$

so konvergiert die Reihe

$$(62) \quad a_2(i, \kappa) = a_2(i, \kappa) + \mu a_2^{(2)}(i, \kappa) + \dots$$

absolut und gleichmäßig in i und κ , wenn $\mu \leq 4$. Durch analoge Schlüsse, wie wir sie anschließend an (25) gemacht haben, folgt

$$(63) \quad |a_2^{(1)}(i, \kappa)| < \frac{M}{4^{\frac{1}{\nu}}},$$

also ist

$$\begin{aligned} |W(a_2(i, \kappa); \lg x)| & < M e^{\frac{|\lg x|}{4}} = M |x|^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{wenn } |x| < 1, \\ & = M |x|^{\frac{1}{4}}, \quad \text{wenn } |x| > 1. \end{aligned}$$

Unsere Behauptung ist damit vollständig bewiesen und gleichzeitig ist gezeigt, daß, auch wenn (60) nicht erfüllt ist, $W(a(i, \kappa); \lg x)$ in der Umgebung von $x = 0$ bzw. ∞ nicht stärker unendlich wird, als eine geeignete Potenz von $\frac{1}{x}$ bzw. x .

^{*}) $\Re$ bedeutet: reeller Teil.

Wir denken uns jetzt in (43) $a(i, \kappa)$ und $b(i, \kappa)$ durch eine vorhergegangene Transformation der angegebenen Art so umgestaltet, daß für alle Eigenwerte (60) erfüllt ist. Da nun $b(\kappa, i)$ dieselben Eigenwerte hat wie $b(i, \kappa)$ und die Eigenwerte von $-b(i, \kappa)$ sich von denen von $+b(i, \kappa)$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so folgt aus (40), daß auch $W^{-1}(b(i, \kappa); \lg x)$ an der Stelle $x = 0$ bzw. ∞ schwächer unendlich wird, als $x^{-\frac{1}{2}}$ bzw. $x^{\frac{1}{2}}$.

Es folgt also aus (43)

$$(64) \quad f(i, \kappa; x) = \{ W^{-1}(b(i, \kappa); \lg x) \} \{ W(a(i, \kappa); \lg x) \}$$

wird für $x = 0$ schwächer unendlich als $\frac{1}{x}$, verhält sich also daselbst regulär. Da derselbe Schluß für $x = \infty$ gilt, so ist $f(i, \kappa)$ von x unabhängig. Derselbe Schluß ist aber noch durchführbar, wenn, was vorkommen kann, für eine endliche Anzahl von Eigenwerten in (60) das Gleichheitszeichen zu setzen ist. Man kann es nämlich dann stets so einrichten, daß bei $a(i, \kappa)$ und $b(i, \kappa)$ für diese Eigenwerte $\Re\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{2}$ ist; für $-b(i, \kappa)$ ist dann $\Re\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{2}$, woraus sich dieselben Schlußfolgerungen ziehen lassen, wie oben. Da also ganz allgemein $f(i, \kappa)$ von x unabhängig ist, so ergibt sich aus (43) und (39)

$$(65) \quad \{a(i, \kappa)\} = \{f^{-1}(i, \kappa)\} \{b(i, \kappa)\} \{f(i, \kappa)\}.$$

Die Kompositionen mit „Konstantenfeldern“ $f(i, \kappa)^$ und mit Funktionen $g(i, \kappa; x)$ von dem in (54) bzw. (55) angegebenen Typus sind also die einzigen, bei denen Cauchy-Volterrasche Feldgleichungen wieder in solche übergehen.*

§ 5.

Singuläre Stellen der Bestimmtheit.

Nach den Ausführungen des § 2 kann man für die Umgebung einer isolierten singulären Stelle der Feldgleichung (5) eine Cauchy-Volterrasche Feldgleichung angeben, deren Lösungen kogredient zu den entsprechenden Lösungen von (5) sind, d. h. man kann eine stetige Funktion $b(i, \kappa)$ von i und κ so bestimmen, daß

$$(66) \quad \{y(i, \kappa; x)\} = \left\{ W\left(b(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right\} \{f(i, \kappa; x)\}$$

und $f(i, \kappa; x)$ in der Umgebung von $x = 0$ eine eindeutige Funktion ist. Hat $f(i, \kappa; x)$ die Eigenschaft, mit einer endlichen Potenz von x multipliziert sich in der Umgebung von $x = 0$ analytisch zu verhalten,

*) Schlesinger, l. c. S. 114.

so nennen wir $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit. Wir wollen nun zeigen, daß speziell $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit für die Feldgleichung

$$(67) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = \frac{a(i, \kappa)}{x} + h(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) \left(\frac{a(\lambda, \kappa)}{x} + h(\lambda, \kappa; x) \right) d\lambda$$

ist, wenn $a(i, \kappa)$ eine in i und κ stetige Funktion, $h(i, \kappa; x)$ aber eine in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktion ist, deren absoluter Betrag für alle in Betracht kommenden Werte von i und κ daselbst unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt.

Schlesinger*) behauptet dann weiterhin, daß man in diesem Falle nach vorhergehender einfacher Transformation es stets erreichen kann, daß

$$b(i, \kappa) = a(i, \kappa)$$

wird. Den Beweis erbringt Schlesinger, wie er mir mitteilt, wiederum durch Grenzübergang von einem endlichem Systeme. Wir wollen uns hier zum Beweise derselben Methode bedienen, wie im vorigen Paragraphen und setzen zu diesem Zwecke zunächst voraus, daß für alle Eigenwerte ρ von $a(i, \kappa)$ die Ungleichung (60) bestehe, die wir aber gleich durch die genauere, auch die Ausnahmefälle umfassende Ungleichung

$$(60a) \quad -\frac{1}{2} + \delta < \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq \frac{1}{2}$$

ersetzen, wobei δ eine zwar beliebig kleine, aber feste positive Zahl bedeutet.

Wir schreiben dann (67) in der Form

$$(68) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = \int_0^1 y(i, \lambda; x) \frac{a(\lambda, \kappa)}{x} d\lambda + f(i, \kappa; x),$$

wobei

$$(69) \quad f(i, \kappa; x) = \frac{a(i, \kappa)}{x} + h(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) h(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

ist. Nach (42) erhält man dann für $y(i, \kappa; x)$ die Volterrasche Integralgleichung

$$(70) \quad y(i, \kappa; x) = \int_{x_0}^x d\xi \left[\frac{a(i, \kappa)}{\xi} + h(i, \kappa; \xi) + \int_0^1 d\lambda \left(\frac{a(\lambda, \kappa)}{\xi} + h(\lambda, \kappa; \xi) \right) W\left(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{\xi}\right) \right. \\ \left. + \int_{x_0}^x d\xi \left[\int_0^1 y(i, \lambda; \xi) h(\lambda, \kappa; \xi) d\lambda + \int_0^1 d\lambda \int_0^1 y(i, \mu; \xi) h(\mu, \lambda; \xi) d\mu W\left(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{\xi}\right) \right] \right] \\ = \sigma_1 + \sigma_2.$$

*) C. R. l. c S. 1864.

Wir nehmen dabei zunächst an, daß x mit x_0 auf demselben durch 0 gehenden Radiusvektor liegt und daß $|x| \leq |x_0|$, also stets $|x| \leq |\xi|$ ist, woraus dann folgt, daß

$$(71) \quad \left| W\left(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{\xi}\right) \right| < M \left| \frac{\xi}{x} \right|^{\frac{1}{2} - \delta}$$

ist, wenn M eine feste, endliche, positive GröÙe ist. Dieselbe Eigenschaft mögen in der Folge $M_1, M_2, M_3, \dots$ haben. Also ist

$$(72) \quad |\sigma_1| < \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}}.$$

Sei ferner

$$(73) \quad \begin{aligned} z(x) &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}} + \int_{|x|}^{|x_0|} |z(\xi)| M_2 \left| \frac{\xi}{x} \right|^{\frac{1}{2} - \delta} |d\xi| \\ &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}} \left(1 + (|x_0| - |x|) M_2 + \frac{(|x_0| - |x|)^2}{1 \cdot 2} M_2^2 + \dots \right) \\ &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}} e^{(|x_0| - |x|) M_2} < \frac{M_3}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}}, \end{aligned}$$

dann ist

$$(74) \quad |y(i, \kappa; x)| < |z(x)| < \frac{M_3}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}}.$$

Durch Wiederholung des oben in § 4 für $W^{-1}(b(i, \kappa); \lg x)$ durchgeführten Schlusses folgt ebenso

$$(75) \quad |y^{-1}(i, \kappa; x)| < \frac{M_4}{|x|^{\frac{1}{2}}},$$

wobei wegen (60a) hier δ im Exponenten von $|x|$ wegzulassen war.

Entsprechend den Ausführungen in § 4 denken wir uns ferner von vornherein $b(i, \kappa)$ so transformiert, daß (60a) von selbst erfüllt ist, daß also

$$(76) \quad \left| W\left(b(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right| < \frac{M_5}{|x|^{\frac{1}{2} - \delta}},$$

$$(77) \quad \left| W^{-1}\left(b(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right| < \frac{M_6}{|x|^{\frac{1}{2}}}$$

wird. Nach (66) ist aber

$$f(i, \kappa; x) = \left\{ W^{-1} \left(b(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0} \right) \right\} \{ y(i, \kappa; x) \},$$

also

$$(78) \quad |f(i, \kappa; x)| < \frac{M_6}{|x|^{\frac{1}{2}}} + \frac{M_8}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}} + \frac{M_6 \cdot M_8}{|x|^{1-\delta}}.$$

Diese Formel gilt zunächst nur, wenn x sich von x_0 aus geradlinig dem Werte $x=0$ nähert; aus (6) folgt aber, daß (74) und damit (78) bei jeder geradlinigen Annäherung an $x=0$ gilt. Da nun $f(i, \kappa; x)$ in der Umgebung von $x=0$ eindeutig ist und nach (78) $|f(i, \kappa; x)| \cdot |x|^{1-\delta}$ in der Umgebung von $x=0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so folgt, daß $f(i, \kappa; x)$ sich in der Umgebung von $x=0$ analytisch verhält.

Dieselbe Eigenschaft ergibt sich aus (75) und (76) für $f^{-1}(i, \kappa; x)$. Wir setzen nun

$$(79) \quad f(i, \kappa; x) = f_1(i, \kappa) + x f_2(i, \kappa; x) = \{ f_1(i, \kappa) \} \{ x \bar{f}(i, \kappa; x) \} \\ = f_1(i, \kappa) + x \bar{f}(i, \kappa; x) + x \int_0^1 f_1(i, \lambda) \bar{f}(\lambda, \kappa; x) d\lambda,$$

wobei also

$$(80) \quad \bar{f}(i, \kappa; x) = \bar{f}_2(i, \kappa; x) + \int_0^1 f_1^{-1}(i, \lambda) f_2(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

und

$$f_1^{-1}(i, \lambda) = f^{-1}(i, \lambda; 0)$$

ist. Es sei jetzt

$$(81) \quad \left\{ W \left(b(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0} \right) \right\} \{ f_1(i, \kappa) \} = \left\{ W \left(b_1(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0} \right) \right\},$$

also

$$(82) \quad \{ y(i, \kappa; x) \} = \left\{ W \left(b_1(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0} \right) \right\} \{ x \bar{f}(i, \kappa; x) \}.$$

Berechnet man dann $\frac{a(i, \kappa)}{x} + h(i, \kappa; x)$ mittelst (39), so ergibt sich

$$(83) \quad b_1(i, \kappa) = a(i, \kappa).$$

Wir haben daher den Satz:

Erfüllen alle Eigenwerte ϱ von $a(i, \kappa)$ die Bedingung (60a), so gibt es eine in der Umgebung von $x=0$ analytische Funktion $\bar{f}(i, \kappa; x)$, so daß, wenn $y(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung (67) genügt,

$$(84) \quad \{ y(i, \kappa; x) \} = \left\{ W \left(a(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0} \right) \right\} \{ x \bar{f}(i, \kappa; x) \}.$$

Im allgemeinen Falle gibt es endlich viele Eigenwerte von $a(i, \kappa)$, für welche (60a) nicht erfüllt ist. Es ist daher wieder wie im § 4 zu untersuchen, wie $a(i, \kappa)$ sich ändert, wenn wir einen reziproken Eigenwert

um 1 erhöhen bzw. vermindern. Wir zerlegen $a(i, \kappa)$ in die zwei orthogonalen Summanden $a_1(i, \kappa)$ und $a_2(i, \kappa)$, wobei analog zu (53)

$$(85) \quad a_1(i, \kappa) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{\rho} [\bar{\psi}_1(\kappa) + \bar{\psi}_2(\kappa)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{\rho} [\bar{\psi}_2(\kappa) + \bar{\psi}_3(\kappa)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(\kappa)}{\rho}$$

ist und setzen

$$(86) \quad g(i, x; x) = (x-1)[\bar{\varphi}_1(i)(\bar{\psi}_1(x) + x\chi_1(x)) + \bar{\varphi}_2(i)(\bar{\psi}_2(x) + x\chi_2(x)) + \dots \\ \dots + \bar{\varphi}_v(i)(\bar{\psi}_v(x) + x\chi_v(x))],$$

wobei für alle Werte von m und n

$$(87) \quad \int_0^1 \overline{\varphi}_m(i) \chi_n(i) di = 0$$

sein möge. Dann ist:

$$(88) \quad g^{-1}(i, \kappa; x) = \frac{1-x}{x} [\bar{\varphi}_1(i)(\bar{\psi}_1(\kappa) + x\chi_1(\kappa)) + \bar{\varphi}_2(i)(\bar{\psi}_2(\kappa) + x\chi_2(\kappa)) + \dots \\ \dots + \bar{\varphi}_r(i)(\bar{\psi}_r(\kappa) + x\chi_r(\kappa))].$$

Es sei

$$(89) \quad \{\mathfrak{y}(i, \kappa; x)\} = \{y(i, \kappa; x)\} \{g(i, \kappa; x)\}$$

und

$$(90) \quad \frac{d\eta(i, \kappa; x)}{dx} = \frac{a(i, \kappa)}{x} + h_1(i, \kappa; x) + \int_0^1 \eta(i, \lambda; x) \left(\frac{a(\lambda, \kappa)}{x} + h_1(\lambda, \kappa; x) \right) d\lambda,$$

wobei $h_1(\lambda, \kappa; x)$ in der Umgebung von $x = 0$ analytisch ist.

Dann folgt aus (39)

$$(91) \quad \alpha(i, \kappa) = \bar{\varphi}_1(i) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_1(\kappa) + \frac{1}{\rho + 1} \bar{\psi}_2(\kappa) \right] + \bar{\varphi}_2(i) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_2(\kappa) + \frac{1}{\rho + 1} \bar{\psi}_3(\kappa) \right] + \dots + \bar{\varphi}_\nu(i) \bar{\psi}_\nu(\kappa) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) + \alpha_2(i, \kappa),$$

wenn

[illegible]

Ist daher $\frac{1}{1 + \frac{1}{\varrho}}$ kein Eigenwert von $a(\lambda, \kappa)$, so sind die Integral-

gleichungen (92) für die Funktionen χ auflösbar, wenn mit der letzten angefangen wird, in welcher * andeutet, daß sie ein Glied weniger enthält, als die anderen; ferner folgt nachträglich, daß die Gleichungen (87) erfüllt sind. Wir haben also tatsächlich erreicht*), daß $1 + \frac{1}{\varrho}$ an die Stelle von $\frac{1}{\varrho}$ getreten ist. Da wir entsprechend einen reziproken Eigenwert um eine Einheit vermindern können, so können wir durch wiederholte Anwendung von Transformationen der angegebenen Art erreichen, daß (60a) für die Eigenwerte erfüllt ist, wenn wir voraussetzen, daß sich *nicht zwei reziproke Eigenwerte von $a(i, \kappa)$ um ganze Zahlen unterscheiden und daß zu denjenigen Eigenwerten von $a(i, \kappa)$, für die (60a) nicht von vorneherein erfüllt ist, nur eine einzige Gruppe von Eigenfunktionen*, (analog zu $a_1(i, \kappa)$ in (85)), *gehört*. Nach Ausführung aller dieser Transformationen gehe $y(i, \kappa; x)$ über in $Y(i, \kappa; x)$, $a(i, \kappa)$ in $A(i, \kappa)$, so daß also entsprechend (84)

$$(93) \quad \{Y(i, \kappa; x)\} = \left\{W(A(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0})\right\} \{x \bar{F}(i, \kappa; x)\}$$

ist, wobei $\bar{F}(i, \kappa; x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktion ist. Wir machen nun die Transformationen in umgekehrter Reihenfolge schrittweise rückwärts. Wir setzen also etwa, $g(i, \kappa; x)$ als Typus nehmend,

$$(94) \quad \{Y(i, \kappa; x)\} = \{Y_1(i, \kappa; x)\} \{g(i, \kappa; x)\}.$$

Geht dann $g^*(i, \kappa; x)$ aus $g(i, \kappa; x)$ hervor, indem man alle χ wegläßt, dann gibt es wegen der Übereinstimmung der Formeln (91) und (57) ein $A_1(i, \kappa)$, so daß

$$(95) \quad \left\{W\left(A(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right)\right\} = \left\{W\left(A_1(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right)\right\} \{g^*(i, \kappa; x)\},$$

also

$$(96) \quad \begin{aligned} &\{Y_1(i, \kappa; x)\} \\ &= \left\{W\left(A_1(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right)\right\} \{g^*(i, \kappa; x)\} \{x \bar{F}(i, \kappa; x)\} \{g^{-1}(i, \kappa; x)\} \end{aligned}$$

wird.

Nun folgt durch direkte Ausrechnung, daß

$$\{g^*(i, \kappa; x)\} \{x \bar{F}(i, \kappa; x)\} \{g^{-1}(i, \kappa; x)\}$$

*) Vgl. Anmerkung *) S. 525.

ebenso wie die dazu reziproke Funktion sich in der Umgebung von $x=0$ analytisch verhält; man kann also genau den Schluß anwenden, wie bei den Formeln (79)–(84); es folgt daher, analog zu (84) und (93),

$$(97) \quad \{Y_1(i, \kappa; x)\} = \left\{W\left(A_2(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right)\right\} \{x\bar{F}_1(i, \kappa; x)\}.$$

Wiederholt man den Schluß, so folgt, daß unter den *oben hervorgehobenen Voraussetzungen direkt* (84) gilt.

Ist dagegen $\frac{1}{1 + \frac{1}{e}}$ in (92) ein Eigenwert von $a(i, \kappa)$, so sind im all-

gemeinen die Integralgleichungen (92) nach den $\chi(\kappa)$ nicht auflösbar. Wir lassen daher in (86) die Funktionen $\chi(\kappa)$ ganz weg; dann treten aber in (91) in den in eckige Klammern gesetzten Faktoren von $\bar{\varphi}_1(i)$, $\bar{\varphi}_2(i)$ noch additive Zusatzglieder hinzu, nämlich die linken Seiten der ersten, bzw. zweiten usf. Gleichung (92), in denen jedesmal $\chi(\kappa)$ durch Null ersetzt ist. Da alle Zusatzglieder gleichzeitig zu $\bar{\varphi}_1(\kappa)$, $\bar{\varphi}_2(\kappa)$, $\dots$, $\bar{\varphi}_n(\kappa)$ orthogonal sind, so werden durch diese Zusatzglieder die Eigenwerte in (91) nicht geändert. Man kann also auch in diesem Falle durch eine endliche Anzahl von Transformationen des angegebenen Typus erreichen, daß (60a) erfüllt ist; d. h. man kann auch in dem vorliegenden Fall die *gegebene Integrodifferentialgleichung so transformieren, daß für die transformierte Integrodifferentialgleichung die Beziehung* (93) *gilt*, ohne jedoch die Transformationen im allgemeinen so rückgängig machen zu können, daß man direkt (84) erhält. Denn es wird dabei in der (95) entsprechenden Formel $g^*(i, \kappa; x)$ mit $g(i, \kappa; x)$ nicht denselben einfachen Zusammenhang haben, so daß

$$\{g^*(i, \kappa; x)\} \{x\bar{F}(i, \kappa; x)\} \{g^{-1}(i, \kappa; x)\}$$

in $x=0$ einen Pol erster Ordnung haben kann. Dieses entspricht übrigens bekannten Verhältnissen bei Systemen endlich vieler linearer Differentialgleichungen.

§ 6.

Fundamentalsysteme einer linearen Integrodifferentialgleichung.

Nach den Ausführungen des letzten Paragraphen kann man, allenfalls nach einer vorausgegangenen Transformation, die Lösung der Feldgleichung (67) in der Form darstellen

$$(98) \quad \{y(i, \kappa; x)\} = \left\{W\left(a(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right)\right\} \{x\bar{f}(i, \kappa; x)\},$$

in der $\bar{f}(i, \kappa; x)$ in eine Potenzreihe nach positiven, ganzzahligen, steigen-

den Potenzen von x entwickelbar ist. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Integrodifferentialgleichung (2) erhält man daher nach (3) in der Form

$$(99) \quad y(\kappa; x) = c(\kappa) + \int_0^1 c(\lambda) W\left(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right) d\lambda \\ + x \left[\int_0^1 \left(c(\mu) + \int_0^1 c(\lambda) W\left(a(\lambda, \mu); \lg \frac{x}{x_0}\right) d\lambda \right) \bar{f}(\mu, \kappa; x) d\mu \right].$$

Es sei dann, wie in § 4, $a(i, \kappa)$ in zwei orthogonale Summanden $a_1(i, \kappa) + a_2(i, \kappa)$ zerlegt und $a_1(i, \kappa)$ durch (53) definiert.

Nun ist nach den Ausführungen des § 4

$$(100) \quad W\left(a_1(i, \kappa); \lg \frac{x}{x_0}\right) \\ = \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(\kappa) + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_2(\kappa)}{1!} + \dots + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \right)^{\nu-1} \frac{\bar{\psi}_\nu(\kappa)}{(\nu-1)!} \right] \\ + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(\kappa) + \dots + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \right)^{\nu-2} \frac{\bar{\psi}_\nu(\kappa)}{(\nu-2)!} \right] \\ + \dots \dots \dots \\ + \bar{\varphi}_{\nu-1}(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_{\nu-1}(\kappa) + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \bar{\psi}_\nu(\kappa) \right] \\ + \bar{\varphi}_\nu(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_\nu(\kappa) \right].$$

Wir setzen dann der Reihe nach in (99)

$$c(\kappa) = \bar{\psi}_\nu(\kappa), \bar{\psi}_{\nu-1}(\kappa), \dots, \bar{\psi}_1(\kappa)$$

und erhalten die Lösungen

$$(101) \quad y_1(\kappa; x) = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left[\bar{\psi}_\nu(\kappa) + x \int_0^1 \bar{\psi}_\nu(\mu) \bar{f}(\mu, \kappa; x) d\mu \right], \\ y_2(\kappa; x) = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left[\bar{\psi}_{\nu-1}(\kappa) + x \int_0^1 \bar{\psi}_{\nu-1}(\mu) \bar{f}(\mu, \kappa; x) d\mu \right] \\ + \frac{\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}}}{\varrho} \lg \frac{x}{x_0} \left[\bar{\psi}_\nu(\kappa) + x \int_0^1 \bar{\psi}_\nu(\mu) \bar{f}(\mu, \kappa; x) d\mu \right],$$

usf. Besitzt $\alpha_2(i, \kappa)$ noch ρ als Eigenwert, so erhält man weitere zu ρ gehörige Systeme von Lösungen der angegebenen Art und entsprechendes gilt für jeden Eigenwert von $\alpha(i, \kappa)$. Die Frage, wann diese zu allen Eigenwerten von $\alpha(i, \kappa)$ gehörigen Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, d. h., wann sich die allgemeinste Lösung von (2) linear durch sie darstellen läßt, ist also äquivalent mit der Frage, wann sich eine stetige Funktion $c(\kappa)$ nach der Gesamtheit der zu allen Eigenwerten von $\alpha(i, \kappa)$ gehörigen Funktionen $\psi_1(\kappa)$ entwickeln läßt.

Aus den großen Beschränkungen, die man dabei $\alpha(i, \kappa)$ auferlegen muß, geht hervor, daß es bei den Integrodifferentialgleichungen weit zweckmäßiger ist, nach dem Vorgange von Schlesinger die Feldgleichung an die Spitze zu stellen, wie in § 1 ausgeführt wurde.

Würzburg, Oktober 1915.