Über Zerlegungen des n -dimensionalen Raumes.

Von Lilly Hahn in Czernowitz.

In meiner im Jahre 1909 an der Wiener Universität verfaßten Doktorsdissertation habe ich im Anschluß an den von Hans Hahn ¹⁾ geführten Beweis, daß ein einfaches Polygon die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt, einen nur Anordnungs- und Verknüpfungsaxiome benützenden Beweis geliefert, daß der Raum durch ein einfaches Polyeder in zwei getrennte Gebiete zerlegt wird und analog die Zweiteilung des n -dimensionalen Raumes behandelt. Seit-her erschienen Abhandlungen von den Herren N. J. Lennes ²⁾ und O. Veblen ³⁾, welche in sehr bemerkenswerter Weise denselben Gegenstand behandeln. Diese Abhandlungen veranlaßten mich, meine damaligen Untersuchungen wieder aufzunehmen, in einigen Punkten umzugestalten und zu verallgemeinern. Im folgenden seien die Resultate dieser Untersuchungen mitgeteilt. Ich stütze mich dabei auf das von O. Veblen aufgestellte Axiomensystem ⁴⁾ verallgemeinert auf n -dimensionale Räume, und benütze eine Reihe von Sätzen aus der n -dimensionalen Geometrie, die ausführlich von E. H. Moore ⁵⁾ bewiesen wurden.

Definition des n -dimensionalen Gebietes: Ein n -dimensionales Gebiet ist eine Menge von Punkten, die alle in demselben R_n liegen und die so beschaffen ist, daß sich 1. stets zwei beliebige unter ihnen durch einen Streckenzug verbinden lassen, dessen sämtliche Punkte der Menge angehören, 2. daß jeder Punkt der Menge innerer Punkt eines n -dimensionalen Simplex S_n ist, das ganz aus Punkten der Menge besteht.

Definition des Randes eines Gebietes: Eine Punktmenge R heißt Rand eines Gebietes M , wenn 1. kein Punkt von R in dem Gebiete M liegt, 2. jeder Streckenzug, der einen Punkt von M mit einem Punkt, der nicht zu M gehört, verbindet, einen Punkt von R enthält; 3. wenn jeder Punkt von R Endpunkt einer Strecke ist, die nur aus Punkten von M besteht. Eine Menge M kann nur einen einzigen Rand haben. Hat sie einen, so ist er nichts anderes als die Menge aller Punkte, die nicht zu M gehören, aber Endpunkte von Strecken sind, deren sämtliche Punkte zu M gehören.

¹⁾ H. Hahn, Monatshefte XIX, S. 289.

²⁾ N. J. Lennes, Amer. Journal, 33, S. 37.

³⁾ O. Veblen, Am. Trans. 14, S. 65.

⁴⁾ O. Veblen, A system of axioms for geometry, Am. Trans. 5, S. 343.

⁵⁾ E. H. Moore, On the projective axioms of geometry, Am. Trans. 3, S. 147.

Definition des n -dimensionalen polyedralen Gebietes. Die Definition des n -dimensionalen polyedralen Gebietes geschieht durch Induktion. Ein eindimensionales (polyedrales) Gebiet ist eine Strecke, Halbgerade (einschließlich der Endpunkte) oder Vollgerade. Ein zweidimensionales Gebiet, das einen Rand besitzt, der aus einer endlichen Anzahl von Punkten und eindimensionalen Gebieten samt deren Randpunkten besteht, heißt ein zweidimensionales polyedrales oder gewöhnlich polygonales Gebiet.

Wir setzen nun voraus, wir wissen, was unter einem $(n-1)$ -dimensionalen polyedralen Gebiet zu verstehen ist, nachdem wir es für den Fall $n=1$ (Strecke, Halb- und Vollgerade) und $n=2$ (polygonales Gebiet) eben definiert haben, und definieren:

Ein n -dimensionales Gebiet, dessen Rand aus einer endlichen Anzahl von Punkten, eindimensionalen Gebieten, zweidimensionalen polyedralen Gebieten, . . . , $(n-1)$ -dimensionalen polyedralen Gebieten samt der Berandung aller dieser Gebiete besteht, heißt ein n -dimensionales polyedrales Gebiet.

Wir bezeichnen im folgenden ein k -dimensionales polyedrales Gebiet ($k=1, 2, \dots, n$) mit G_k , Punkte mit G_0 . Es sei hier bemerkt, daß die k -dimensionalen Räume R_k auch Gebiete G_k sind.

Satz 1. Sind in einem R_n eine endliche Anzahl $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ gegeben, derart, daß jeder dem Rande eines dieser G_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) angehörende Punkt einem anderen dieser G_i angehört, so bilden diejenigen Punkte des R_n , die zu keinem dieser G_i gehören (also die Punktmenge $R_n - \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ bedeutet die Vereinigungsmenge aller $G_0, \dots, G_{n-1}$ zusammen) eine endliche Anzahl von G_n , die zu je zwei keinen Punkt gemein haben. Wir bezeichnen diese G_n mit Γ_n .

Wir können immer annehmen, daß die Randmannigfaltigkeiten jedes G_i schon unter den G stehen; denn wenn eine Randmannigfaltigkeit noch nicht in den G steht, und wir sie hinzufügen, so wird an der Menge $\mathfrak{G}$ nichts geändert.

Bevor wir an den Beweis des Satzes gehen, bemerken wir, daß Satz 1 ebensogut folgendermaßen hätte ausgesprochen werden können.

Satz 1 a. Sind in einem R_n eine endliche Anzahl $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$, G_n gegeben, derart, daß jeder dem Rande eines dieser G_i ($i=0, 1, \dots, n$) angehörende Punkt einem andern G_i angehört, so bilden diejenigen Punkte des R_n , die zu keinem dieser G gehören, eine endliche Anzahl von G_n , von denen je zwei keinen gemeinsamen Punkt haben; wir bezeichnen sie mit Γ_n .

Man leitet Satz 1 a aus Satz 1 folgendermaßen ab.

Wir nehmen zunächst wie in Satz 1 die $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ aus dem R_n fort, also bleiben nach Satz 1 eine endliche Anzahl von Γ_n zurück. Es sind nun noch gewisse G_n aus dem R_n fortzunehmen; ihre Randmannigfaltigkeiten sind schon unter den zuerst

aus dem R_n herausgenommenen $G_0, \dots, G_{n-1}$ herausgenommen worden. Es ist daher die Fortnahme eines der noch fortzunehmenden G_n identisch mit der Fortnahme einer endlichen Anzahl von Γ_n ; denn wenn ein Γ_n einen Punkt eines der herauszunehmenden G_n enthält, so muß es ganz zu dem G_n gehören und wenn ein Γ_n einen Punkt enthält, der nicht zu einem der G_n gehört, so hat es gar keinen Punkt mit dem G_n gemein. Nehme ich also aus dem R_n nach Fortnahme der $G_0, \dots, G_{n-1}$ noch die G_n fort, so nehme ich nur noch eine endliche Anzahl von Γ_n aus dem R_n fort, es können also nach Fortnahme endlich vieler G_n nur endlich viele Γ_n zurückbleiben.

Beweis des Satzes 1. Wir setzen den Satz 1 und somit Satz 1a für $i < n$ als bewiesen voraus.

1. Nun nehmen wir einen Punkt P , der auf keinem der Gebiete $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ liegt und betrachten alle Punkte, die sich mit P durch einen Streckenzug verbinden lassen, der keines der Gebiete G trifft. Wir behaupten, die Menge aller dieser Punkte und der Punkt P selbst bilden ein n -dimensionales Gebiet, das wir Γ_n nennen.

Wir haben also zunächst zu zeigen:

1. Je zwei Punkte A und B dieser Menge lassen sich durch einen Streckenzug verbinden, der nur aus Punkten dieser Menge besteht.

2. Jeder Punkt C der Menge liegt im Innern eines Simplex S_n , das nur aus Punkten dieser Menge besteht.

Beweis von 1. Wir verbinden P mit A und mit B durch einen Streckenzug. Dann ist der Streckenzug von A über P nach B der gewünschte.

Beweis von 2. Wir bilden zu jedem G_i ($i = 0, 1, \dots, n-2$) den R_i , in dem es liegt,¹⁾ und verbinden jeden dieser R_i , falls er nicht ohnehin durch C hindurchgeht, mit C durch einen R_{i+1} . Es entstehen so eine endliche Anzahl durch C hindurchgehender R_i und R_{i+1} , die wir mit $\bar{R}$ bezeichnen. Durch C legen wir einen R_1 , er heiße g , der in keinem der $\bar{R}$ enthalten ist. Auf ihm bestimmen wir die Punkte C_1 und C_2 so, daß die Anordnung besteht $(C_1 C C_2)$ und daß die Strecke $C_1 C_2$ einschließlich der Endpunkte C_1 und C_2 keinen Punkt eines G_{n-1} enthält.

Durch den Punkt C_2 legen wir einen R_{n-1} , den wir R nennen, der g nicht enthalten soll. Wir unterscheiden nun die G_i ($i = 0, \dots, n-2$) 1. in solche, deren zugehöriger R_i nicht durch C geht, 2. in solche, deren zugehöriger R_i C enthält.

¹⁾ Den R_i , in dem ein Gebiet G liegt, werden wir immer kurz den zu G_i gehörigen R_i nennen.

Im ersten Falle kann der R_i auch nicht durch C_1 gehen, weil sonst der durch C und diesen R_i gelegte R_{i+1} entgegen unserer Annahme g enthalten müßte. Wir verbinden die R_i dieses ersten Falles mit C_1 durch R_{i+1} , die wir mit $\bar{R}$ bezeichnen.

Die Schnittgebilde von R mit den $\bar{R}$ und den sämtlichen $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ sind eine endliche Anzahl von $R_0, R_1, \dots, R_{n-3}, R_{n-2}$ und von $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ ¹⁾, deren Vereinigungsmenge (der R und der G) wir mit $\mathcal{G}'$ bezeichnen. Auf R wenden wir nun Satz 1 α für $n-1$ Dimensionen an. Darnach liegt der Punkt C_2 im Innern eines Simplex S_{n-1} , das nur aus Punkten der Menge $R-\mathcal{G}'$ besteht. Durch C_1 und jedes Berandungs- S_{n-2} dieses S_{n-1} legen wir den R_{n-1} und erhalten so ein Simplex S_n , in dessen Innerem der Punkt C liegt und das nur aus Punkten der Menge $R_n-\mathcal{G}$ besteht, wie man sich folgendermaßen überzeugt:

Zunächst sieht man sofort ein, daß in dem S_n kein G_0 liegen kann; wir nehmen an, es sei bereits bewiesen, daß auch kein Punkt eines $G_0, \dots, G_{i-1}$ ($i=0, \dots, n-2$) in dem S_n liegen kann und zeigen, daß dann kein Punkt eines G_i in dem S_n liegen kann. Denn entweder wäre es ein G_i , dessen zugehöriger R_i nicht durch C geht. Wir verbinden dann den zu G_i gehörigen R_i mit C_1 durch einen R_{i+1} und wissen, daß dieser das Simplex S_{n-1} treffen würde, wenn das G_i im Innern des S_n einen Punkt hätte. Das aber widerspricht der Konstruktion des S_{n-1} .

Nun betrachten wir die G_i , deren zugehöriger R_i durch C geht. Liegt ein Punkt P eines solchen G_i im S_n , so verbinden wir ihn mit C durch eine Strecke. P ist Punkt des G_i , C nicht. Da aber C in dem zu unserem G_i gehörigen R_i liegt, müssen auf CP Randpunkte von G_i liegen. Nun konnten wir aber immer annehmen, daß jedes Berandungs- G_l unseres G_i selbst eines der $G_0, G_1, \dots, G_{i-1}$ ist und da dann $l < i$ ist, widerspricht das unserer Annahme.

Daß endlich kein Punkt eines G_{n-1} im S_n liegen kann, erhellt leicht aus der Konstruktion des S_{n-1} ; denn das G_{n-1} kann nicht ganz im S_n enthalten sein, da sonst ein Punkt seiner Berandung drin enthalten wäre, also muß das G_{n-1} den Rand des S_n treffen; die Strecke $C_1 C_2$ (einschließlich der Endpunkte) aber enthält keinen Punkt des G_{n-1} , es folgt also aus bekannten Eigenschaften eines Simplex, daß das G_{n-1} das Grund- S_{n-1} schneiden muß, was der Konstruktion des S_n widerspricht.

Wir haben also gezeigt, daß die Punkte, die im R_n zurückbleiben, wenn man eine endliche Anzahl von $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$

¹⁾ Wir stützen uns hier auf den Satz: hat ein R_i mit dem einem G_k ($k < n$) zugehörigen R_k einen R_l gemein, so hat der R_i mit dem G_k eine endliche Anzahl von G_l gemeinsam.

Beweis: Wir nehmen an, der Satz gelte für alle $k' < k$. Darnach hat der R_l unserer Behauptung mit allen Randmannigfaltigkeiten $G_0, \dots, G_{k-1}$ des G_k höchstens Polyedralgebiete von den Dimensionen $0, 1, \dots, l$ gemeinsam. Nach Fortnahme dieser Gebiete aus dem R_l bleiben noch eine endliche Anzahl von G_l im R_l ; die Schnittgebilde mit den G_k können nun nur gewisse dieser G_l sein, denn wenn eines der Gebiete G_l einen Punkt des G_k enthält, muß es ganz in ihm liegen.

aus dem R_n herausnimmt, n -dimensionale Gebiete sind; wir nennen sie auch weiterhin Γ_n .

II. Bevor wir uns nun dem Beweise zuwenden, daß die Gebiete Γ_n Polyedralgebiete sind, haben wir noch eine Zerlegung der Gebiete G in Teilgebiete zu vollführen.

Wir verfahren dabei folgendermaßen:

Es sei ein System von Gebieten $G_0, \dots, G_i$ ($i \leq n-1$) gegeben, wobei jede Randmannigfaltigkeit eines der G selbst eines der G sei. Wir behaupten: man kann dieses System der G ersetzen durch ein anderes: $G_0^*, G_1^*, \dots, G_i^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Gesamtheit der G^* enthält genau dieselben Punkte wie die Gesamtheit der G .

2. Keine zwei der Gebiete G^* haben einen gemeinsamen Punkt.

3. Jedes G^* , das einen Punkt vom Rand eines anderen G^* enthält, gehört ganz dem Rand dieses anderen G^* an.

Wir nehmen an, diese Behauptung sei für $i-1$ bewiesen,

Es werden nun die Schnittgebilde jedes G_i mit allen $G_0, \dots, G_{i-1}$ und den übrigen nicht im selben R_i liegenden G_i gebilde, und diese Schnittgebilde samt ihren Randmannigfaltigkeiten aus den G zu denen sie gehören, herausgenommen. Es bleibt statt der $G_0, \dots, G_{i-1}$ eine endliche Anzahl von Gebieten der Dimensionen $0, 1, \dots, i-1$ zurück, die wir mit $G'_0, \dots, G'_{i-1}$ bezeichnen. Zu diesen G' fügen wir die früher herausgenommenen G (die Schnittgebilde eines jeden G_i mit allen übrigen $G_0, \dots, G_{i-1}$) sowie die Schnittgebilde zweier nicht im selben R_i liegenden G_i hinzu und erhalten so ein neues System von Gebieten $G''_0, \dots, G''_{i-1}$, das wir nach Voraussetzung durch ein System von Gebieten $G_0^*, \dots, G_{i-1}^*$, die die oben angeführten drei Eigenschaften besitzen, ersetzen können. Durch Fortnahme der k -dimensionalen ($k=0, 1, \dots, i-1$) Schnittgebilde aus den Gebieten G_i sind von den G_i eine endliche Anzahl i -dimensionaler Gebiete zurückgeblieben, die wir G_i^* nennen. Wir haben zu zeigen, daß für das nun gewonnene System der $G_0^*, \dots, G_{i-1}^*, G_i^*$ die oben aufgezählten drei Eigenschaften gelten.

Daß die erste Eigenschaft gilt, ersieht man unmittelbar aus der Konstruktion der Gebiete G^* .

Bei der zweiten Eigenschaft bleibt offenbar nur zu beweisen, daß keine zwei G_i^* einen Punkt gemein haben: entweder sie liegen im selben R_i , dann müßte eines der zwei Gebiete einen Randpunkt des anderen enthalten, was unmöglich ist, oder die beiden G_i^* liegen nicht im selben R_i , dann haben sie ein Schnittgebilde von höchstens $i-1$ Dimensionen, das aber kann nicht zu den Gebieten G_i^* gehören, da wir ja die Schnittgebilde je zweier Gebiete G_i von niedrigerer als i -ter Dimension als selbständige Gebiete niedrigerer Ordnung unter die G^* aufgenommen haben.

Auch die dritte Eigenschaft ist erfüllt; es braucht offenbar nur mehr nachgewiesen zu werden, daß jedes G_k^* ($k \leq i$), das einen

Punkt vom Rande eines G_i^* enthält, ganz zum Rande dieses G_i^* gehört. Jedes G_i^* gehört einem der ursprünglichen G_i an; jeder Randpunkt des G_i^* ist entweder auch Randpunkt dieses G_i oder er ist ein Punkt einer der aus diesem G_i herausgenommenen Mannigfaltigkeiten, in beiden Fällen ist er Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{i-1}^*$.

Ist nun aber ein Punkt A eines G_k^* ($k < i$) Randpunkt eines G_i^* , so ist jeder Punkt dieses G_k^* Randpunkt des G_i^* .

Um dies zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß jeder Punkt von G_k^* Endpunkt einer Strecke ist, deren sämtliche übrige Punkte zu G_i^* gehören. Da A Randpunkt von G_i^* ist, ist er Endpunkt einer Strecke PA , deren sämtliche übrige Punkte einschließlich P zu G_i^* gehören. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt B in G_k^* her und zeigen, daß wir diesen Punkt mit P durch einen Streckenzug, der abgesehen von B aus lauter Punkten von G_i^* besteht, verbinden können. Zunächst verbinden wir A mit B durch einen ganz in G_k^* liegenden¹⁾ Streckenzug σ , dessen Eckpunkte $C_1, \dots, C_m$ seien. Wir legen durch die Punkte $PA C_1$ den R_2 .²⁾ Dieser trifft³⁾ die von G_i^* und G_k^* verschiedenen Gebiete G^* in einer endlichen Anzahl von G_0, G_1, G_2 , mit denen, resp. mit deren End- und Eckpunkten wir C_1 durch Gerade verbinden. Diese Geraden schneiden auf PA eine endliche Anzahl von Punkten aus. Wir wählen nun den Punkt L auf PA so nahe an A , daß die Strecke LA keinen dieser Schnittpunkte enthält. Man sieht nun leicht ein, daß die Strecke LC_1 keinen Punkt eines Gebietes G^* (außer natürlich G_i^*) enthalten kann.⁴⁾ Auf diese Weise ist also auch C_1 mit P durch

¹⁾ Ist B nicht Punkt des G_k^* , sondern Randpunkt des G_k^* , so gilt genau derselbe Beweis. Mit jedem G_h^* des Randes von G_i^* liegen auch alle Randpunkte von G_k^* auf dem Rand von G_i^* .

²⁾ Daß die Punkte P, A, C_1 nicht in einem R_1 liegen können, sieht man so ein. Die Strecke PA gehört (ausschließlich des Punktes A) nicht zu G_k^* , die Strecke $C_1 A$ gehört (einschließlich des Punktes A) zu G_k^* . Es müßte also der Punkt A ein Berandungspunkt von G_k^* sein und würde also entgegen unserer Annahme nicht zu G_k^* gehören.

³⁾ Siehe Fußnote Seite 306.

⁴⁾ Man hat dabei zu beachten, daß auf der Strecke AC_1 kein Endpunkt E einer Schnittstrecke s liegen kann. Es sind zwei Fälle möglich. a) Die Strecke s ist Schnittgebilde des R_2 mit einem G_h^* , $h < i$; in dem Falle würde E zum Rand eines G_h^* gehören, wobei $h = 0, \dots, i-1$ ist; da aber die $G_0^*, \dots, G_{i-1}^*$ die 3. der Seite 5 aufgestellten Bedingungen erfüllen, so gehört jedes G^* , das einen Punkt vom Rand eines anderen G^* enthält, ganz zum Rand dieses anderen G^* . Es müßte also G_k^* ganz zum Rand von G_h^* gehören, was unmöglich ist. b) Sei nun $h = i$, dann gehört das G_i^* , das unseren R_2 in der fraglichen Strecke schneidet, ganz einem der ursprünglichen G_i an. Der Punkt E ist Randpunkt eines G_i^* und kann nun entweder auf einer Randmannigfaltigkeit G_v des G_i liegen oder auf einem G^* , das aus dem G_i herausgenommen wurde. Jedenfalls liegt das G^* , dem E angehört, ganz in dem R_i , dem G_i angehört. Der R_i hat mit dem R_2 nur die Punkte der Geraden g , die durch s geht, gemeinsam. Es kann also das G^* , dem E angehört, mit dem R_2 nur Punkte der Geraden g gemein haben, dieses G^* kann also nicht etwa den Punkt C_1 enthalten, was ein Widerspruch ist.

einen Streckenzug s verbunden. Wir gehen nun so längs σ von Eckpunkt zu Eckpunkt weiter. Endlich haben wir auch den Endpunkt von σ , B , mit P durch einen Streckenzug verbunden, der nur aus Punkten von G_i^* besteht.

Damit ist aber nun auch gezeigt, daß, wenn ein Punkt eines G_k^* ($k < i$) Randpunkt eines G_i^* ist, jeder Punkt dieses G_k^* Randpunkt dieses G_i^* ist; daher ist nun auch erwiesen, daß jede Randmannigfaltigkeit eines Gebietes G^* selbst ein Gebiet G^* niedrigerer Dimension ist.

III. Es wird nun gezeigt, daß die Gebiete Γ_n Polyedralgebiete sind.

In der Tat, zunächst besitzt jedes Gebiet Γ_n einen Rand; und zwar besteht dieser Rand nur aus Punkten der Gebiete G_0 , $G_1, \dots, G_{n-1}$ oder was dasselbe ist, der zu ihnen gehörigen Gebiete G^* . Dies folgt aus der Definition des Randes eines Gebietes und der Art, wie die Gebiete Γ_n definiert wurden.

Sodann wird gezeigt: wenn ein Punkt eines G^* dem Rand eines Γ_n angehört, so gehört jeder Punkt dieses G^* zu diesem Rand. Der Beweis dieser Behauptung wird genau so geführt wie der Seite 308. Hiemit ist bewiesen, daß der Rand jedes Γ_n aus einer endlichen Anzahl G^* besteht. Da auch der Rand jedes dieser G^* offenbar zum Rande des Γ_n gehört (vgl. Anm. 1) S. 308), so ist tatsächlich gezeigt, daß jedes Γ_n ein Polyedralgebiet ist.

IV. Um nun zu zeigen, daß die Gebiete Γ_n nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, beweisen wir die Behauptungen:

1. Gibt es ein Γ_n , dessen Rand nur von $G_0^*, \dots, G_{n-2}^*$ gebildet wird, dann gibt es nur das eine Γ_n .

Beweis. Zu diesem Γ_n gehören alle Punkte, die sich mit einem gegebenen Punkt P_1 dieses Γ_n durch einen Streckenzug verbinden lassen, der die Berandungs- $G_0^*, \dots, G_{n-2}^*$ des Γ_n nicht trifft. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt P_2 des R_n , der auf keinem der $G_0^*, \dots, G_{n-2}^*$ der Berandung des Γ_n liegt und verbinden nun jeden der Punkte P_1 und P_2 mit den R_i ($i = 0, 1, \dots, n-2$), in denen die G_i^* der Berandung des Γ_n liegen, durch R_{i+1} bzw. wenn er schon in einem dieser R_i liegt, durch diesen R_i ; das gibt eine endliche Anzahl von $R_1, \dots, R_{n-1}$ durch P_1 und P_2 .

Es gibt aber bestimmt außerhalb aller dieser R einen Punkt A , der also auch auf keinem Berandungs- G_i^* des Γ_n liegen kann und weder mit P_1 noch mit P_2 identisch ist.

Der Streckenzug $P_2 A P_1$ verbindet dann den beliebigen auf keinem $G_0^*, \dots, G_{n-2}^*$ der Berandung des Γ_n liegenden Punkt P_2 mit P_1 und trifft die Berandung des Γ_n nicht. Es gehören also alle auf keinem Berandungs- G_i^* des Γ_n liegenden Punkte des R_n zu Γ_n , das heißt, es gibt nur dieses eine Γ_n , wie behauptet wurde.

2. Ein G_{n-1}^* kann nur Randpunkte von höchstens zwei verschiedenen Γ_n enthalten.

Beweis. Der R_{n-1} , in dem das G_{n-1}^* liegt, teilt den R_n in zwei getrennte Gebiete. Man kann also von einem Punkte des G_{n-1}^* aus nach zwei Seiten hin einen Halbstrahl legen, nach der Seite S_1 und der Seite S_2 . Nun legen wir von zwei Punkten, A und B des G_{n-1}^* nach S_1 je einen Halbstrahl und bestimmen auf diesem die Punkte A_1 resp. B_1 so, daß die Strecken AA_1 und BB_1 keinen Punkt eines der Gebiete G^* enthalten.

Es wird nun ganz wie früher Seite 308 A_1 mit B_1 durch einen Streckenzug verbunden, der keinen Punkt eines der G^* enthält. Die Punkte dieses Streckenzuges gehören also zum selben Γ_n .

Damit ist nun gezeigt, daß das G_{n-1}^* , in dem A und B liegen, auf der Seite S_1 nur an ein einziges Gebiet Γ_n grenzen kann. Dasselbe zeigt man von der Seite S_2 .

Aus diesen beiden eben bewiesenen Behauptungen folgt nun, da es nur endlich viele G_{n-1}^* gibt, sofort, daß die Γ_n nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

2. Satz. Damit es mindestens zwei verschiedene Gebiete Γ_n gebe, ist notwendig und hinreichend, daß es unter den zu den gegebenen $G_0, \dots, G_{n-1}$ gehörigen Gebieten G_{n-1}^* eine Anzahl von G_{n-1}^* gibt — wir bezeichnen sie mit $\bar{G}_{n-1}^*$ —, die der folgenden Bedingung genügen: jeder Punkt eines G_{n-2}^* , das zum Rand eines $\bar{G}_{n-1}^*$ gehört, gehört zum Rand einer geraden Anzahl von $\bar{G}_{n-1}^*$. Dabei ist aber, um den Wortlaut dieses Satzes nicht zu kompliziert zu gestalten, von folgender abkürzender Terminologie Gebrauch gemacht: gehört zum Rande eines G_{n-1}^* ein G_{n-2}^* , das von beiden Seiten ¹⁾ an dieses G_{n-1}^* grenzt, so ist dieses G_{n-1}^* zu zählen wie zwei verschiedene an das G_{n-2}^* grenzende G_{n-1}^* .

I. Die Bedingung ist hinreichend.

1. Hilfssatz. Ein Dreieck trifft eine endliche Anzahl in seinem R_2 liegender G_0^* und G_1^* ²⁾, die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört, in einer geraden Anzahl von Punkten, vorausgesetzt, daß kein Eckpunkt des Dreiecks auf einem G_1^* liegt und keines der G_0^* auf dem Dreieck.

Beweis. 1. Teil. Ein Dreieck hat mit einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^* , die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand von zwei G_1^* gehört, eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein, wenn dieselben Voraussetzungen gelten wie oben.

Eine Figur, die aus einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^* besteht und die Eigenschaft hat, daß 1. jedes G_0^* zum Rand von zwei G_1^* gehört, 2. je zwei Punkte der Figur sich durch einen Streckenzug verbinden lassen, der nur aus Punkten der Figur besteht, heißt ein Polygon. Die G_0^* heißen die Ecken, die G_1^* die Seiten des

¹⁾ Der R_{n-1} des G_{n-1}^* wird durch den R_{n-2} des G_{n-2}^* in zwei Teile zerlegt; in diesem Sinne ist von den beiden Seiten des G_{n-2}^* die Rede.

²⁾ Wir bezeichnen generell ein System von G_i , dem die Seite 307 zitierten Eigenschaften zukommen, als ein System von G_i^* .

Polygone. Sind alle G_1^* Strecken, so heißt das Polygon geschlossen; kommen unter den G_1^* auch Halbgerade vor, so heißt das Polygon offen.¹⁾

Wir wählen nun auf unserem Polygon zwei Punkte A_1 und A_2 derart, daß sie 1. beide im Äußern des Dreiecks liegen, 2. a) wenn das Polygon ein geschlossenes ist, beide derselben Seite des Polygons angehören und die Strecke $A_1 A_2$ keinen Dreieckspunkt enthält, 2. b) wenn das Polygon ein offenes ist, je auf einem seiner beiden Halbstrahlen so liegen, daß der Halbstrahl von diesem Punkte an keinen Dreieckspunkt mehr enthält. Der Streckenzug von A_1 bis A_2 (bei dem geschlossenen Polygon nicht die Strecke $A_1 A_2$) kann nun das Dreieck nur in einer geraden Anzahl von Punkten treffen; denn von A_1 nach A_2 gehend, befindet man sich nach einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten mit dem Dreieck im Innern, nach einer geraden Anzahl im Äußern des Dreiecks. Da sich aber A_2 im Äußern des Dreiecks befindet, so liegt auf dem Streckenzug von A_1 bis A_2 , also überhaupt auf dem Polygon, eine gerade Anzahl von Schnittpunkten mit dem Dreieck.

2. Teil. Da bei diesem Satze die G_0^* von den Schnittpunkten mit dem Dreieck ausgeschlossen sind, können wir nun auch folgendes behaupten.

Eine endliche Anzahl von Polygonen, die nur Eckpunkte gemeinsam haben, hat mit einem Dreieck eine gerade Anzahl von Schnittpunkten, wenn das Dreieck durch keinen Eckpunkt der Polygone geht und die Polygone keinen Eckpunkt des Dreiecks enthalten.

Eine endliche Anzahl von G_0^* und G_1^* , bei denen jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört, ist aber nichts anderes als eine endliche Anzahl von Polygonen mit nur gemeinsamen Eckpunkten. Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

2. Hilfssatz. Ein R_2 , der von dem Rand eines $\bar{G}_{n-1}^*$ keinen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ enthält und der mit keinem G_{n-2}^* der Berandung eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} liegt, trifft die $\bar{G}_{n-1}^*$ und ihren Rand in einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^* , die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört.

Beweis. Der R_2 darf laut Voraussetzung mit keinem G_{n-2}^* der Berandung der $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} liegen, also kann er auch mit keinem der $\bar{G}_{n-1}^*$ selbst im selben R_{n-1} liegen. Er hat also mit jedem $\bar{G}_{n-1}^*$, mit dem er überhaupt einen Punkt gemeinsam hat, eine endliche Anzahl G_1^* gemein. Die Randpunkte dieser G_1^* sind G_0^* , die die Schnittpunkte des R_2 mit den G_{n-2}^* , die der Berandung der $\bar{G}_{n-1}^*$ angehören, sind.

¹⁾ Auch eine Vollgerade kann als Spezialfall eines offenen Polygons betrachtet werden. Offenbar enthält ein offenes Polygon genau zwei Halbstrahlen.

Jedes Schnitt- G_0^* gehört einer geraden Anzahl von G_1^* als Rand an, da jeder Punkt eines G_{n-2}^* , das zum Rand eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ gehört, zum Rand einer geraden Anzahl von $\bar{G}_{n-1}^*$ gehört.¹⁾

Ein R_2 , der nicht die hier speziell angenommene Lage hat, hat mit den $\bar{G}_{n-1}^*$ und ihrem Rand eine endliche Anzahl von G_0^* , G_1^* , G_2^* gemeinsam.

3. Hilfssatz. Ein Dreieck trifft die $\bar{G}_{n-1}^*$ und ihre Berandung in einer geraden Anzahl von Punkten, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: kein Eckpunkt des Dreiecks gehört einem der $\bar{G}_{n-1}^*$ an, das Dreieck trifft keinen Punkt der Berandung dieser $\bar{G}_{n-1}^*$, der dem Dreieck zugehörige R_2 enthält keinen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ und liegt mit keinem G_{n-2}^* der Berandung der $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} .

Beweis. Der R_2 des Dreiecks trifft nach Hilfssatz 2 die $\bar{G}_{n-1}^*$ und deren Rand in einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^* , die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört.

Kein G_0^* liegt auf dem Dreieck, da die G_0^* die Schnittpunkte des R_2 mit den G_{n-2}^* der Berandung der $\bar{G}_{n-1}^*$ sind, das Dreieck aber keinen Berandungspunkt der $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält; ferner liegt kein Eckpunkt des Dreiecks auf einem G_1^* , da wir das Dreieck so gelegt haben, daß es keinen Eckpunkt auf einem der $\bar{G}_{n-1}^*$ hat. Nach dem 1. Hilfssatz hat also das Dreieck mit der Schnittfigur des R_2 und der $\bar{G}_{n-1}^*$ samt ihrer Berandung eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein, also hat das Dreieck auch mit den $\bar{G}_{n-1}^*$ und ihrer Berandung eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein.

Wir kehren nun zurück zum Beweis, daß die in Satz 2 gestellte Bedingung hinreichend ist.

Wir legen durch einen Punkt eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ einen R_1 so, daß der R_1 keinen Berandungspunkt von den $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält.²⁾ Mit den $\bar{G}_{n-1}^*$ selbst habe er die Punkte $B_1, B_2, \dots, B_m$ gemein. Auf dem R_1 wählen wir nun die Punkte C und C' so, daß die Strecken CB_i (B_i sei einer der Punkte $B_1, \dots, B_m$) und BC' außer dem Punkt B_i und einschließlich der Punkte C und C' keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält und daß die Anordnung besteht $(CB_i C')$.

¹⁾ Man beachte die Seite 310 erläuterte abgekürzte Terminologie.

²⁾ Man verbindet die G_i^* ($i = 0, \dots, n-2$) der Berandung mit dem Punkt durch R_{i+1} resp. R_i und legt den R_1 so, daß er in keinem dieser R_{i+1} oder R_i ganz liegt.

Wir behaupten nun: C und C' lassen sich nicht durch einen Streckenzug verbinden, der keinen Punkt eines Gebietes $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seiner Berandung enthält.

Wir zeigen zu dem Zweck:

A. Ein Streckenzug σ , der C und C' verbindet und die beiden folgenden Eigenschaften hat, enthält immer einen Punkt der Gebiete $\bar{G}_{n-1}^*$.

1. Die Verbindungsgeraden seiner Eckpunkte mit C' enthalten keinen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-2}^*$ der Berandung eines der $\bar{G}_{n-1}^*$.

2. Die Verbindungs- R_2 zweier aufeinanderfolgender Eckpunkte des Streckenzuges mit C' enthalten ¹⁾ von der Berandung eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ keinen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ und sie liegen mit keinem G_{n-2}^* des Randes eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} .

Wir nehmen zum Beweise an, der Streckenzug σ enthalte keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seiner Berandung und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

σ habe die Eckpunkte $C, C_1, \dots, C_i, \dots, C_m, C'$. Unter den so entstehenden Dreiecken ($\triangle C_{i-1}, C_i, C'$) betrachten wir zuerst das Dreieck CC_1C' .²⁾ Kein Eckpunkt des Dreiecks liegt auf einem $\bar{G}_{n-1}^*$ und das Dreieck enthält keinen Punkt der Berandung eines der $\bar{G}_{n-1}^*$.

Das Dreieck CC_1C' trifft also die $\bar{G}_{n-1}^*$ in einer geraden Anzahl von Punkten, von denen laut Voraussetzung auf CC' nur einer, der Punkt B_i , liegt. Es muß also auf C_1C' eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten mit den $\bar{G}_{n-1}^*$ liegen. Wir gehen so von Dreieck zu Dreieck weiter und kommen endlich zum Dreieck $C_{m-2}C_{m-1}C'$ und überzeugen uns ebenso, daß auf Seite $C_{m-1}C'$ eine ungerade Anzahl von Punkten, die den $\bar{G}_{n-1}^*$ angehören, liegen muß. Endlich betrachten wir das Dreieck $C_{m-1}C_mC'$. Auf Seite $C_{m-1}C'$ liegt eine ungerade Anzahl von Punkten der $\bar{G}_{n-1}^*$, es muß also noch eine ungerade Anzahl von Punkten der $\bar{G}_{n-1}^*$ auf den Strecken $C_{m-1}C_m$ und C_mC' liegen. Das ist aber ein Widerspruch mit der gemachten Voraussetzung, daß σ keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthalten soll. Es gibt also keinen Streckenzug, der C und C' verbindet und die beiden angeführten Eigenschaften hat und keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seines Randes enthält.

¹⁾ Wenn die drei Punkte nicht in einem R_1 liegen.

²⁾ Der Fall, daß die drei Punkte C, C_1 und C' in einem R_1 liegen, bedarf keiner weiteren Erörterung.

B. Wenn es nun überhaupt einen Streckenzug σ' gibt, der C und C' verbindet und keinen Punkt eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ oder deren Berandung enthält, so gibt es auch einen Streckenzug σ , der die eben angeführten zwei Eigenschaften hat und C mit C' verbindet, ohne einen Punkt eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ oder ihres Randes zu enthalten.

Um dies zu beweisen, ändern wir zunächst σ' in einen Streckenzug ab, der die erste Eigenschaft hat: $C, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots, C'$ seien die Eckpunkte von σ' , C_k der erste Eckpunkt derart, daß die Strecke $C' C_k$ einen Berandungspunkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält. Nun legen wir durch alle G_i^* ($i = 0, 1, \dots, n-2$) der Berandung unserer $\bar{G}_{n-1}^*$ die zugehörigen R_i und verbinden diese R_i mit C' durch R_{i+1} resp. R_i (wenn C' in einem dieser R_i schon enthalten ist), die wir alle zusammen η nennen.

Dann legen wir durch C_k einen R_1 , er heiße g , der in keinem der η ganz liegt.¹⁾ Wir können nun auf g einen Punkt P_l derart bestimmen,²⁾ daß die Strecken $C_{k-1} P_l$ und $P_l C_{k+1}$ keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seines Randes enthalten und so, daß P_l in keinem η liegt. Dann kann die Strecke $P_l C'$ keinen Punkt der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthalten.

Wir ersetzen also jetzt die Strecken $C_{k-1} C_k$ und $C_k C_{k+1}$ durch die Strecken $C_{k-1} P_l$ und $P_l C_{k+1}$ und verfahren so mit jedem Eckpunkt C_j von σ , wenn die Strecke $C_j C'$ einen Berandungspunkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält. Auf diese Weise erhalten wir einen neuen Streckenzug σ_1 mit den Eckpunkten $C, P_1, \dots, P_m, C'$, die die beiden folgenden Eigenschaften besitzen: Die Strecke $C' P_k$ (P_k ein beliebiger Eckpunkt von σ_1) enthält keinen Punkt der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ und sie liegt mit keinem G_{n-2}^* dieser Berandung im selben R_{n-2} ; ferner enthält σ_1 keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder dessen Berandung, wenn der Streckenzug σ' keinen enthält.

Damit nun auch die zweite der verlangten Eigenschaften erfüllt werde, ändern wir σ_1 wieder in einen anderen Streckenzug σ ab, und zwar auf die folgende Weise.

¹⁾ Wir verbinden einen den η nicht angehörigen Punkt mit C_k und erhalten so den gewünschten R_1 .

²⁾ C_{k-1} (und C_{k+1}) wird mit g durch einen R_2 verbunden. Dieser trifft die $\bar{G}_{n-1}^*$ und ihre Berandung in einer endlichen Anzahl von G_0^*, G_1^*, G_2^* mit denen, resp. mit deren End- und Eckpunkten C_{k-1} (und C_{k+1}) durch R_1 verbunden wird; diese R_1 nennen wir ξ . Sie schneiden auf g Punkte $S_1, S_2, \dots, S_h$ ab. P_l wird nun so gewählt, daß die Strecke $C_k P_l$ keinen der Punkte S und keinen Punkt eines η enthält. Dreieck $C_k C_{k-1} P_l$ ($\triangle C_k C_{k+1} P_l$) enthält dann keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$.

Der durch die Punkte $P_k P_{k+1} C'$ bestimmte R_2 enthalte von der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ einen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ oder er liege mit einem G_{n-2}^* , das zum Rand eines $\bar{G}_{n-1}^*$ gehört, im selben R_{n-1} .

Wir legen durch alle die G_v^* ($v = 0, \dots, n-3$) der Berandung unserer $\bar{G}_{n-1}^*$ die zugehörigen R_v und verbinden nun die Geraden $C' P_k$ und $C' P_{k+1}$ mit diesen R_v durch R_{v+2} resp. R_{v+1} , resp. R_v , ebenso verbinden wir $C' P_k$ und $C' P_{k+1}$ mit den R_{n-2} , die zu denjenigen G_{n-2}^* gehören, welche mit $C' P_k$ resp. $C' P_{k+1}$ im selben R_{n-1} liegen, durch R_{n-1} .¹⁾ Alle diese R_{v+2} , R_{v+1} und R_v zusammen nennen wir ζ . Nun verbinden wir die zu den übrigen G_{n-2}^* zugehörigen R_{n-2} mit C' durch R_{n-1} und nennen diese alle zusammen η . Nun legen wir durch einen inneren Punkt S der Strecke $P_k P_{k+1}$ einen R_1 , den wir g nennen, so daß er in keinem ζ oder η ganz liegt. Auf g wird der Punkt D so bestimmt, daß 1. die Strecke SD (inklusive des Endpunktes D) keinen Schnittpunkt mit ζ oder η enthält, 2. die Strecken $P_k D$ und $D P_{k+1}$ keinen Punkt eines der $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält. Die Strecke DC' enthält dann keinen Berandungspunkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$; die durch die Punkte P_k, C', D und P_{k+1}, C', D bestimmten R_2 enthalten keinen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ und sie liegen mit keinem G_{n-2}^* des Randes eines $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} .

So oft nun ein durch die Punkte P_i, P_{i+1}, C' bestimmter R_2 einen Punkt eines $G_0^*, \dots, G_{n-3}^*$ der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ enthält oder mit einem G_{n-2}^* der Berandung eines $\bar{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} liegt, ersetzen wir die Strecke $P_i P_{i+1}$ in der angegebenen Weise durch zwei andere Strecken und erhalten dadurch einen neuen Streckenzug σ , der nun beide Seite 11 verlangten Eigenschaften hat und der keinen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seiner Berandung enthält, wenn σ' keinen solchen Punkt enthält. Einen solchen Streckenzug σ kann es aber nicht geben, also gibt es auch den Streckenzug σ' nicht, das heißt aber, jeder Streckenzug, der die Punkte C und C' verbindet, muß einen Punkt eines $\bar{G}_{n-1}^*$ oder seiner Berandung enthalten.

II. Die Bedingung ist notwendig.

Wir nehmen also an, es gebe mindestens zwei Gebiete Γ_n , sie heißen γ und γ' , und zeigen, daß es dann unter den G_{n-1}^* ein Teilsystem geben muß, das der obigen Bedingung genügt.

¹⁾ Wie vorhin bemerkt, liegt $C' P_k$ mit keinem dieser G_{n-2}^* im selben R_{n-2} .

Wir nehmen eines der beiden Γ_n , z. B. γ , her. Es muß bestimmt ein G_{n-1}^* , wir nennen es g , zum Rand von γ gehören, weil es sonst nur dieses eine Γ_n geben könnte (Seite 309). Wir betrachten nun alle die G_{n-1}^* , die sowohl zum Rand von γ als zum Rand eines anderen von γ verschiedenen Γ_n gehören¹⁾ und behaupten von der Menge dieser G_{n-1}^* , daß sie die Bedingung von Satz 2 erfüllen.

1. Wir beweisen zuerst, daß ein G_{n-2}^* des Randes eines dieser G_{n-1}^* nicht nur dem Rand dieses einen G_{n-1}^* angehören kann.²⁾

Angenommen ein G_{n-2}^* , es heiße g , gehöre zum Rand eines einzigen G_{n-1}^* , das wir g_1 nennen. Wir zeigen, daß uns diese Annahme zu einem Widerspruch führt mit der Annahme, daß g_1 außer zum Rand von γ noch zum Rand eines von γ verschiedenen Γ_n gehört.

Wir legen durch g_1 den zugehörigen R_{n-1} ; er teilt den R_n in zwei Halb- R_n , die mit r_1 und r_2 bezeichnet seien. Wir nehmen nun in g_1 zwei beliebige Punkte A und B her und ziehen von A in den Halb- R_n r_1 , von B nach r_2 einen Halbstrahl und fixieren auf diesen zwei Halbstrahlen je die Punkte A_1 resp. B_1 so, daß die beiden Strecken AA_1 und BB_1 keinen Punkt eines G^* enthalten. Zeigen wir nun, daß sich A_1 und B_1 durch einen Streckenzug verbinden lassen, der keinen Punkt eines G^* enthält, so ist damit gezeigt, daß g_1 nur zum Rand eines einzigen Γ_n gehören kann und der Widerspruch ist dargetan.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt P von g , verbinden ihn durch einen ganz in g_1 verlaufenden Streckenzug mit A und mit B . Wir haben schon öfters gezeigt, wie man nun A_1 sowohl wie B_1 mit P je durch einen Streckenzug verbinden kann, der keinen Punkt eines G^* oder seiner Berandung (außer P) enthält. Die letzten Strecken dieser beiden Streckenzüge seien KP und LP . Wir legen in dem zu g_1 zugehörigen R_{n-1} eine Strecke PR von P aus so, daß PR (außer P) keinen Punkt eines G^* oder seiner Berandung enthält, was sicher möglich ist, da nach Voraussetzung g nur auf einer Seite an ein G_{n-1}^* grenzt. Auf PR läßt sich dann in der oft schon angewendeten Weise der Punkt M so finden, daß die Strecken LM und MK keinen Punkt eines G^* oder dessen Berandung enthalten. Der Streckenzug $A_1 \dots KML \dots B_1$ ist dann der Gewünschte.

2. Nun wird gezeigt, daß jedes G_{n-2}^* , das zum Rand eines G_{n-1}^* gehört, zum Rand einer geraden Anzahl von G_{n-1}^* gehören muß.

¹⁾ Wir sehen zufolge der Behauptungen Seite 309 und 310 leicht ein, daß es ein solches G_{n-1}^* geben muß.

²⁾ Es sei wieder daran erinnert, daß wenn das G_{n-2}^* von beiden Seiten an dasselbe G_{n-1}^* grenzt, wir dieses G_{n-1}^* wie zwei verschiedene zählen.

Wir nehmen ein G_{n-2} , es heiße g^0 , und gehöre zum Rand einer ungeraden Anzahl von $\bar{G}_{n-1}^*$, die wir alle zusammen mit $(\bar{G}_{n-1}^*)$ bezeichnen; wir zeigen, daß uns diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Sei nun P ein Punkt von g^0 , P_1 ein Punkt, der weder in dem R_{n-2} von g^0 , noch in einem der $(\bar{G}_{n-1}^*)$ liegt. Wir verbinden P_1 mit dem zu g^0 gehörigen R_{n-2} durch einen R_{n-1} und wählen außerhalb dieses R_{n-1} einen Punkt P_2 , der nicht in einem $(\bar{G}_{n-1}^*)$ liegt. Durch P , P_1 und P_2 legen wir den R_2 , der nun mit g^0 nur den Punkt P , mit den $(\bar{G}_{n-1}^*)$ je einen G_1^* gemein hat, dessen ein Randpunkt P ist. Nun legen wir in dem R_2 ein Dreieck derart, daß P in seinem Innern liegt und so, daß die von P ausgehenden G_1^* , nämlich die Schnittgebilde des R_2 mit den $(\bar{G}_{n-1}^*)$, den Umfang des Dreiecks in je einem Punkt treffen. Gehen wir nun von einem Eckpunkt des Dreiecks aus längs des Umfangs des Dreiecks bis zu dem Eckpunkt zurück, so durchlaufen wir dabei alle die Schnittpunkte dieser G_1^* mit dem Dreieck, die wir der Reihe nach $S_1, \dots, S_{2m+1}$ nennen; die zugehörigen G_1^* heißen $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}$.

Wir haben diese $(\bar{G}_{n-1}^*)$ so aus allen G_{n-1}^* ausgewählt, daß jedes von ihnen auf einer Seite an γ grenzt, auf der anderen Seite an ein von γ verschiedenes Γ_n , wir sagen an non γ . Es grenzt also eines dieser G_1^* , die in unserem R_2 von P ausgehen, auch auf der einen Seite an γ , auf der anderen Seite an non γ .

Legen wir nun von einem Punkt A_1 auf γ_1 einen Streckenzug σ nach einem Punkt A_2 von γ_2 , so daß σ keinen Punkt eines G^* enthält und ganz im Innern des Winkels $\gamma_1 \gamma_2$ verläuft, und setzen wir z. B. voraus, daß das Innere des Winkels $\gamma_1 \gamma_2$ zu γ gehört, so muß der von A_2 nach dem Punkt A_3 auf γ_3 fortgesetzte Streckenzug σ , wenn er ganz im Innern des Winkels $\gamma_2 \gamma_3$ bleibt und keinen Punkt eines G^* enthält, bei A_2 das Gebiet γ verlassen und in das Gebiet non γ gelangen. Setzen wir diesen Streckenzug von A_3 nach A_4 auf γ_4 usw. bis A_{2m} auf γ_{2m} immer so fort, daß er stets zwischen den Punkten A_i und A_{i+1} ganz im Innern des Winkels $\gamma_i \gamma_{i+1}$ bleibt und keinen Punkt von G^* enthält, so muß σ bei A_{2m} γ verlassen und das Gebiet non γ betreten. Bei A_{2m+1} verläßt nun σ wieder das Gebiet non γ und betritt das Gebiet γ , das es, wenn unsere Annahme, daß g^0 einer ungeraden Anzahl von $\bar{G}_{n-1}^*$ als Rand angehört, richtig wäre, bei A_1 wieder verlassen müßte. Wir haben aber angenommen, daß das Innere des Winkels $\gamma_1 \gamma_2$ dem Gebiete γ angehört. Es ergibt sich also aus unserer Annahme ein Widerspruch. Es kann also g^0 nur zu einer geraden Anzahl von $\bar{G}_{n-1}^*$ als Randgebilde gehören, wie behauptet.

3. Satz. Damit der R_n durch die gegebenen $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ genau in zwei Teile zerlegt werde, ist notwendig und hinreichend, daß sich aus den diesen G zugeordneten Gebieten $G_0^*, G_1^*, \dots, G_{n-1}^*$ ein einziges Teilsystem $\bar{G}_{n-1}^*$ herausgreifen läßt, das die Eigen-

schaft hat, daß jeder Punkt eines G_{n-2}^* , das zum Rand eines dieser G_{n-1}^* gehört, dem Rand einer geraden Anzahl von G_{n-1}^* dieses Teilsystems angehört.

Das Teilsystem des G_{n-1}^* bezeichnen wir wieder mit $\overline{G}_{n-1}^*$.

I. Die Bedingung ist notwendig. Wir nehmen also an, der R_n sei durch unsere $G_0, \dots, G_{n-1}$ in zwei Gebiete, γ und γ' , zerlegt und zeigen, daß dann die obige Bedingung erfüllt ist.

Wir nehmen nun das Gebiet γ her und wissen aus dem Beweise von Satz 2: alle die G_{n-1}^* , die auf einer Seite an γ und auf der anderen Seite an γ' grenzen, bilden ein System $\overline{G}$ von der in Satz 3 genannten Eigenschaft. Angenommen es gebe nun noch ein zweites solches System, das wir $\overline{G}$ nennen. Durch das System $\overline{G}$ wird der R_n nach Satz 2 in mindestens zwei Teile, γ'' und γ''' , zerlegt. Es muß γ ganz in einem der zwei Teile, in die $\overline{G}$ den R_n zerlegt, etwa in γ'' , und γ' ebenso ganz in γ''' enthalten sein, denn irgend zwei Punkte von γ können durch einen Streckenzug verbunden werden, der keines der G und mithin auch keines der $\overline{G}$ trifft. γ'' und γ''' können außer den Punkten von γ und γ' nur Punkte eines (nicht zu $\overline{G}$ gehörigen) G^* enthalten.

Wir behaupten 1. Jedes in $\overline{G}$ vorkommende G_{n-1}^* steht auch in $\overline{G}$. Die Behauptung erhellt sofort aus der Tatsache, daß man von einem Punkte eines in $\overline{G}$ stehenden G_{n-1}^* sowohl nach γ als nach γ' , also auch nach γ'' und γ''' eine Strecke legen kann, die keinen Punkt eines G^* enthält.

2. wird gezeigt: Jedes in $\overline{G}$ stehende G_{n-1}^* kommt auch in $\overline{G}$ vor.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist dargetan, wenn wir auch von jedem Punkt von $\overline{G}$ eine Strecke in das Innere von γ resp. γ' legen können. Dies haben wir aber dargetan, wenn wir von dem Punkt von $\overline{G}$ aus ins Innere von γ'' resp. γ''' eine Strecke gelegt haben, die keinen Punkt eines G^* enthält.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Wir nehmen an, es gebe nur ein einziges Teilsystem $\overline{G}_{n-1}^*$ mit der bekannten Eigenschaft und daraus wird deduziert, daß dann der R_n durch unsere $G_0, \dots, G_{n-1}$ tatsächlich genau in zwei Teile zerlegt wird.

Wir können, wie der Beweis von Satz 2 zeigt, zu jedem Gebiet $\gamma^{(i)}$, in das der R_n durch unsere G zerlegt wird, ein Teilsystem $\overline{G}_{n-1}^*$ bilden, das die Eigenschaft hat, daß jedes der dem Teilsystem angehörigen G_{n-1}^* an $\gamma^{(i)}$ und noch irgend ein anderes der Gebiete γ grenzt. Diese Teilsysteme $\overline{G}_{n-1}^*$ müssen alle identisch

sein, da wir ja angenommen haben, daß es nur ein derartiges Teilsystem $\overline{G}_{n-1}$ gibt. Dieses eine Teilsystem $\overline{G}_{n-1}^*$ grenzt aber nun an alle Gebiete, in die der R_n durch die G zerlegt wird, das können also nur zwei sein, da ein G_{n-1}^* , also auch die $\overline{G}_{n-1}^*$, nur an zwei Gebiete grenzen kann.

Es sei ein System von $G_0, \dots, G_{n-1}$ derart, daß jeder Randpunkt eines der G einem anderen der G angehört, gegeben. Das zugehörige System der $G_0^*, \dots, G_{n-1}^*$ habe die folgenden Eigenschaften:

1. Jedes G_i^* ($i < n-1$) gehört zum Rande mindestens eines G_{n-1}^* .
2. Jedes G_{n-2}^* gehört zum Rande einer geraden Anzahl von G_{n-1}^* .¹⁾
3. Es gibt unter den G^* kein Teilsystem, in dem neben jedem darin vorkommenden G^* auch alle Randmannigfaltigkeiten dieses G^* stehen und das die Eigenschaften 1 und 2 hat.

Ein solches System von G mitsamt ihrer Berandung heißt ein n -dimensionales Polyeder.

Sei im R_n ein System von $G_0, \dots, G_{n-1}$ gegeben derart, daß jeder Randpunkt eines der G einem anderen der G angehört. Wir bilden die zugehörigen $G_0^*, \dots, G_{n-1}^*$. Diese G^* mögen folgende Eigenschaften haben:

1. Jedes G_i^* ($i < n-1$) gehört zum Rande mindestens eines G_{n-1}^* .
2. Jedes G_{n-2}^* gehört zum Rande einer geraden Anzahl von G_{n-1}^* .
3. Je zwei G_{n-1}^* lassen sich durch eine Reihe von G_{n-1}^* so verbinden, daß je zwei in der Reihe benachbarte G_{n-1}^* ein G_{n-2}^* gemeinsam als Rand haben, das nur diesen beiden G_{n-1}^* als Rand angehört.

Wir behaupten: das System der $G_0, \dots, G_{n-1}$ bildet ein n -dimensionales Polyeder.

Beweis. Die beiden ersten Forderungen der Definition für ein n -dimensionales Polyeder sind erfüllt. Wir haben noch darzutun, daß man aus diesem System der $G_0^*, \dots, G_{n-1}^*$ auch nicht ein G^* weglassen kann, ohne daß die Eigenschaften 1 und 2 (siehe oben) zu bestehen aufhören, und zwar:

¹⁾ Beachte die Seite 310 eingeführte Terminologie.

a) Ein G_{n-1}^* kann ich aus folgendem Grunde nicht fortlassen: ich verbinde dieses weggelassene G_{n-1}^* mit einem anderen nicht weggelassenen G_{n-1}^* durch die in 3 erwähnte Reihe der G_{n-1}^* . Darunter muß es ein erstes G_{n-1}^* geben, das nicht weggelassen wird. Nach Eigenschaft 3 hat es mit dem in der genannten Reihe ihm unmittelbar vorangehenden, also weggelassenen G_{n-1}^* ein G_{n-2}^* gemein, das nur zum Rand dieser beiden G_{n-1}^* gehört. Wenn nun aber das eine dieser G_{n-1}^* abgespalten ist, so gehört dieses G_{n-2}^* nur einem G_{n-1}^* als Rand an.

b) Ein G_j^* ($j < n - 1$) kann ebenfalls nicht weggelassen werden, denn spalte ich ein G_j^* ab, so muß ich wegen Eigenschaft 1 auch jedes G_{n-1}^* weglassen, dessen Rand es angehört, was, wie bereits gezeigt, nicht möglich ist.