kann, und es wird die diesbezügliche, äußerst einfache und elegante Konstruktion angegeben. Aus den Diagrammstellungen der beiden Betriebszustände ergeben sich z. B. auch mit Leichtigkeit die Vektorkonfigurationen bei Kurzschluß und Leerlauf.

Im weiteren folgt die Anwendung der Ähnlichkeitstransformation auf den belasteten Transformator. Es erweist sich, daß jedem äußern Belastungskreis (R, L, C) bei gegebenem Nullsystem die Endpunkte der Spannungs- und Stromvektoren in der Diagrammebene eindeutig zugeordnet sind. Den Endpunkt des sekundären Stromvektors findet man mit den auf den Seiten 273 und 274 berechneten Größen χ und ν als Schnitt zweier Kreise, und die Lage und Größe der Vektoren $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{J}_1$ ergeben sich hieraus durch eine Ähnlichkeitstransformation. Bei beliebigen Belastungsänderungen hat man es mit einem zweidimensionalen Probleme zu tun; die Spitzen der resultierenden Vektoren $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ bewegen sich auf ähnlichen Kurven, die als Funktionen der Größen (R, L, C) bestimmt und leicht angebbar sind.

Belastungsänderungen mit gleichbleibendem Leistungsfaktor oder gleichbleibendem scheinbarem Widerstand des Belastungskreises entsprechen Kreisdiagramme (S. 273 und 274). Als Spezialisierung dafür wird ein sehr handliches Kreisdiagramm für rein „Ohmsche“ Belastung des Transformators angegeben (s. S. 274 bis 276). Bei Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände in den Transformatorwicklungen folgt daraus das bekannte „Heylanddiagramm“, welches aus den Induktionskoeffizienten des Transformators auf einfachste Weise berechnet werden kann [vgl. S. 278, Formeln 85].

Die Betrachtungen des darauf folgenden Kapitels (S. 279 bis 282) gelten dem Energiesatz des Transformators, welchen man dort in Differential- und Integralform (mittlerer Energiesatz) findet. Der direkte Nachweis des mittleren Energiesatzes am Diagramm über die Ähnlichkeitstransformation (Abb. 6 S. 269) liefert eine gute Probe für die letztere. Im Schlußkapitel wird noch gezeigt, wie die für sinusförmige Spannungen und Ströme abgeleiteten analytischen und graphischen Resultate bei zeitlich willkürlich verlaufenden periodischen Wellen zu erweitern sind. Die vollständige Erledigung dieses allgemeineren Falles durch alles bisher Behandelte ist möglich auf Grund der Gültigkeit der Fourierschen Entwicklungen von beliebigen einwertigen periodischen Funktionen in trigonometrische Reihen.

Im Transformationssysteme (S. 270) ist die vollständige Integration der Transformatorgleichungen mit konstanten Koeffizienten für sinusförmige Spannungen und Ströme enthalten. Die Vektordiagramme von stationären Wechselstromvorgängen, die sich in einem Einphasen-Transformatorkreise darstellen lassen, erhält man deshalb in Zukunft nicht mehr auf dem Wege des Probierens, sondern als das bestimmte Resultat der in dieser Schrift behandelten Methode der Ähnlichkeitstransformation.

Der Anlaßvorgang beim Gleichstrommotor.

Von

Erich Jasse, z. Zt. im Felde.

Einleitung. Beim Anlassen eines Gleichstrommotors handelt es sich darum, den Motoranker und die von ihm anzutreibenden Massen auf eine gewisse vorgeschriebene Geschwindigkeit zu bringen. Dies geschieht meist¹⁾ in der Weise, daß man seinem Anker einen Widerstand (den Anlaßwiderstand) vorschaltet und diesen in demselben

¹⁾ Die Anlaßmethode ohne Widerstand, die sogenannte Grobschaltung, soll hier außer Betracht bleiben, da sie von C. Trettin in der ETZ 1912 S. 759, 794, 822 unter dem Titel: „Das Schalten großer Gleichstrommotoren ohne Vorschaltwiderstände“ eingehend besprochen worden ist.

Maße, wie die Geschwindigkeit des Ankers wächst, allmählich verringert, bis nur noch der innere Motorwiderstand im Kreise ist. Diese Verringerung des Anlaßwiderstandes muß nun in bestimmter gesetzmäßiger Weise erfolgen, wenn man Stöße vermeiden will und der Anlauf gleichmäßig erfolgen soll. Damit der Motor überhaupt anläuft, muß sein Drehmoment das zu überwindende Lastmoment um irgendeinen Betrag überschreiten und dieser Überschuß an Drehmoment dient dazu, die Massen zu beschleunigen. Die Größe dieses Beschleunigungsmomentes, die natürlich während der Anlaßdauer sich ändern kann, steht nun in engster Beziehung zu dem Gesetz, nach welchem der Anlaßwiderstand abnimmt.

Mit Rücksicht auf eine gute Kommutierung, auf die Erwärmung und aus verschiedenen anderen Gründen wird man einen gewissen Strom nicht überschreiten und um auch die Anlaßzeit nach Möglichkeit abzukürzen und damit die erforderliche Materialmenge für den Widerstand zu verkleinern, ist es vorteilhaft, den höchsten zulässigen Strom konstant zu halten; erfolgt das Anlassen stufenweise, so werden also die Stromspitzen alle denselben Wert haben. Nun ist aber durch den Strom auch das Drehmoment des Motors bestimmt, folglich wird dieses ebenfalls während der Anlaßdauer konstant bleiben. Diese Anlaßbedingung hat außerdem den Vorteil, daß sie sich praktisch leicht erfüllen läßt, denn man braucht nur den Widerstand beim Anlassen immer so einzustellen, daß der Stromzeiger in Ruhe bleibt oder daß sein größter Ausschlag jedesmal derselbe ist. Diese Voraussetzung soll daher für die folgenden Untersuchungen festgehalten werden.

Von einer Berücksichtigung der Selbstinduktivität des Ankers soll wegen des hohen Ohmschen Vorschaltwiderstandes abgesehen werden.

Für sämtliche Ableitungen wird, falls nichts anderes erwähnt, das absolute elektromagnetische Maßsystem angewandt.

1. Ableitung der Grundformeln.

a) Der Nebenschlußmotor. Die Vorgänge beim Anlassen des Nebenschlußmotors habe ich schon in meiner früheren Arbeit¹⁾ besprochen. Der Vollständigkeit halber sollen jedoch die erforderlichen Formeln kurz abgeleitet werden. Das Lastdrehmoment soll hier wie früher als konstant gleich M_0 vorausgesetzt werden. Der ihm entsprechende stationäre Strom sei i_1 , dann beträgt bei einem Strome i das vom Motor ausgeübte Drehmoment

$$D = \frac{i}{i_1} M_0 \quad \dots \dots \dots 1)$$

Das Ohmsche Gesetz liefert die Gleichung

$$\mathcal{E} = E + ir \quad \dots \dots \dots 2)$$

wenn $\mathcal{E}$ die angelegte Klemmenspannung,

E die EMK des Motors,

r der gesamte Widerstand im Ankerkreise

ist. Bezeichnet ferner ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Ankers, ω_s diejenige Winkelgeschwindigkeit, bei welcher der Strom verschwindet, die also die Grenze zwischen Motor und Generator bildet, so haben wir die dritte Grundgleichung

$$E = \frac{\omega}{\omega_s} \mathcal{E} \quad \dots \dots \dots 3)$$

Der Anlaßwiderstand sei in einzelne Stufen geteilt, deren Kontakte von 1 bis n gezählt werden sollen. Der Widerstand r_v sei dann der gesamte Widerstand des

¹⁾ Siehe El. u. M., Wien 1912, S. 657 und 685. Zur Berechnung von Anlaßwiderständen und Motorsicherungen.

Ankerkreises, wenn der Hebel auf dem ν ten Kontakt steht. Entsprechend sei r_n der innere Widerstand des Motors. Die stationäre Geschwindigkeit bei derselben Hebelstellung sei ω_ν , wobei der Strom i_1 aufgenommen wird.

Wird jetzt der Hebel auf den $(\nu + 1)$ ten Kontakt gestellt, so soll der Motor den Strom $i_0 = s i_1$ aufnehmen. Um die Anlaßdauer nicht unnötig zu verlängern, wartet man nicht den stationären Strom ab, der theoretisch sich erst nach unendlich langer Zeit einstellt, sondern schaltet schon bei einem größeren Strome um, etwa bei dem Strome $i_1' = \varepsilon i_1$. Beim Übergang auf die nächste Stufe steigt der Strom auf $i_0' = \varepsilon s i_1$ und die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt sei dementsprechend mit ω_ν' bezeichnet. Die gleichen Indizes erhält auch die Größe E . Wenn man nun das Ohmsche Gesetz auf zwei aufeinander folgende Stufen anwendet, so erhält man die Gleichungen

$$\mathcal{E} = E_{\nu-1}' + i_1' r_{\nu-1} = E_{\nu-1}' + i_0' r_\nu = E + i r_\nu = E_\nu + i_1 r_\nu \dots 2a)$$

Hieraus findet sich zunächst ohne weiteres, daß $i_1' r_{\nu-1} = i_0' r_\nu$ ist; da aber wie vorausgesetzt $i_0' = s i_1'$ sein soll, so muß

$$r_{\nu-1} = s \cdot r_\nu \dots 4)$$

sein. Der Widerstand muß also beim Nebenschlußmotor nach einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn das Lastmoment konstant ist und die Stromspitzen stets denselben Wert haben sollen. Ferner finden sich mit Hilfe von Gl. 3) die folgenden Beziehungen

$$i = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s - \omega_\nu} \cdot i_1 \dots 5)$$

$$\frac{i_0'}{i_1'} = s = \frac{\omega_s - \omega_{\nu-1}'}{\omega_s - \omega_\nu'}; \quad \frac{i_0}{i_1} = s = \frac{\omega_s - \omega_{\nu-1}}{\omega_s - \omega_\nu} \quad \frac{i_1'}{i_1} = \varepsilon = \frac{\omega_s - \omega_\nu'}{\omega_s - \omega_\nu} \dots 6)$$

Trägt man nach Gl. 5) i als Funktion von ω auf, so erhält man eine Gerade, die für jede Stufe eine andere Richtung hat, jedoch stets durch den Punkt $\omega = \omega_s$ auf der Abszissenachse geht. Es entsteht also für den Anlaßvorgang die in Abb. 1 dargestellte Zickzacklinie des Stromes¹⁾. Für den Augenblick des Einschaltens wurde dabei, um möglichst allgemein zu bleiben, ein Strom $i_a = s_a i_1$ angenommen. Da der Anker hierbei noch stillsteht, so ist

Abb. 1.

$$\mathcal{E} = i_a r_1 = s_a i_1 r_1.$$

Für die spätere Rechnung ist es ferner vorteilhaft, den Ankerwirkungsgrad einzuführen, d. i. das Verhältnis der elektromagnetischen Leistung zu der vom Ankerkreise aufgenommenen Leistung, bezogen auf den Dauerzustand bei abgeschaltetem Anlaßwiderstand; dieser Wirkungsgrad hat den Wert

$$\eta = \frac{E_n i_1}{E_n i_1 + i_1^2 r_n} = \frac{E_n}{E_n + i_1 r_n} = \frac{E_n}{\mathcal{E}} = \frac{\omega_n}{\omega_s} \dots 7)$$

¹⁾ Diese Darstellung des Anlaßvorganges wurde zuerst in etwas vereinfachter Form von H. Görges in seiner Arbeit „Über das Anlassen von Elektromotoren, speziell der Drehstrommotoren“ gegeben. Siehe ETZ 1894, S. 644.

Hieraus ergibt sich

$$i_1 r_n = (I - \eta) \mathcal{E}$$

und mit der Einführung von r_1 aus der vorhergehenden Gleichung finden wir

$$\frac{r_n}{r_1} = s_a (I - \eta) \quad \dots \quad 8)$$

Es ist zu beachten, daß diese beiden Gleichungen 7) und 8) für jeden Gleichstrommotor gelten. Aus Gl. 4) folgt nun für den Nebenschlußmotor

$$r_\nu = s \cdot r_{\nu+1} = s^2 \cdot r_{\nu+2} = s^3 \cdot r_{\nu+3} = \dots = s^{n-\nu} r_n \quad \dots \quad 9)$$

und daher für $\nu = 1$

$$\frac{r_1}{r_n} = s^{n-1} \quad \dots \quad 9a)$$

Setzt man jetzt hier den allgemeinen Wert von $\frac{r_1}{r_n}$ aus Gl. 8) ein, so erhält man

$$s^{n-1} = \frac{I}{s_a (I - \eta)} \quad \dots \quad 10)$$

wodurch die Stufenzahl des Anlassers bei gegebenem s bestimmt ist.

b) Der Hauptschlußmotor. Beim Hauptschlußmotor erfolgt die Erregung durch den Ankerstrom und ist mit diesem veränderlich. Ist das Eisen ungesättigt, so ist der Kraftfluß proportional dem Strome; bei zunehmender Sättigung wird jedoch der Fluß immer weniger von dem Strome abhängig und der Motor nähert sich in seinem Verhalten mehr dem Nebenschlußmotor. Um daher den Einfluß der Hauptschlußerregung bei der Gegenüberstellung der beiden Motoren besser erkennen zu können, ist es zweckmäßig, zum Grenzfall des ungesättigten Motors überzugehen und den Kraftfluß proportional dem Strome vorauszusetzen. Da nun das Drehmoment proportional dem Produkt aus Strom und Fluß ist, so erhält man die Gleichung

$$D = \frac{i^2}{i_1^2} M_0 \quad \dots \quad 11)$$

Die Gleichungen 2) und 2a) bleiben vollkommen ungeändert. Dagegen ist die EMK vom Kraftfluß abhängig und statt Gl. 3) ergibt sich die folgende

$$E = \frac{i}{i_1} \frac{\omega}{\omega_s} \mathcal{E} \quad \dots \quad 12)$$

Hier hat jedoch ω_s nicht mehr die ungezwungene Deutung wie beim Nebenschlußmotor, sondern man muß sagen: ω_s ist diejenige Geschwindigkeit, bei welcher die EMK gleich der Klemmenspannung wird, wenn der Fluß durch den normalen Laststrom i_1 erzeugt wird. Da jetzt E vom Strome abhängig ist, so ist bei Gl. 2a) zu beachten, daß die beiden Größen $E'_{\nu-1}$ nicht mehr gleich sind, sondern sich um den Stromsprung vor und nach dem Übergang auf den ν ten Kontakt unterscheiden.

Unserer ursprünglichen Voraussetzung entsprechend, daß die Stromspitzen alle denselben Wert haben sollen, wollen wir auch hier annehmen, daß die Größen ε und s während des Anlassens konstant bleiben. Aus der Gl. 2a) finden wir durch einfache Rechnungen leicht die folgenden Beziehungen

$$r_{\nu-1} = r_\nu + \frac{s - I}{s} \frac{s_a}{\varepsilon} r_1 \quad \dots \quad 13)$$

$$i = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_\nu + \omega} i_1 \quad \dots \quad 14)$$

$$\frac{s - I}{\varepsilon s} = \frac{\omega_\nu' - \omega_{\nu-1}'}{\omega_s}; \quad \frac{\varepsilon - I}{\varepsilon} = \frac{\omega_\nu - \omega_\nu'}{\omega_s} \quad \dots \quad 15)$$

Beim ungesättigten Hauptschlußmotor muß also der Anlaßwiderstand nach einer arithmetischen Reihe abnehmen, wenn wir dieselben Stromschwankungen erhalten wollen, wie beim Nebenschlußmotor. Die Stromänderung zwischen größtem und kleinstem Wert erfolgt allerdings nicht nach einer Geraden, sondern nach einer Hyperbel, wie aus Gl. 14) hervorgeht. Ferner erhalten wir aus Gl. 13) durch ihre wiederholte Anwendung

$$r_\nu = r_{\nu+1} + (s - 1) \frac{s_a}{\varepsilon s} r_1 = r_{\nu+2} + 2(s - 1) \frac{s_a}{\varepsilon s} r_1 = \dots = r_n + (n - \nu)(s - 1) \frac{s_a}{\varepsilon s} r_1 \quad 16)$$

woraus sich für $\nu = 1$ ergibt

$$\frac{r_n}{r_1} = 1 - (n - 1)(s - 1) \frac{s_a}{\varepsilon s} \dots \dots \dots 16a)$$

Setzen wir hier den allgemeingültigen Wert von $\frac{r_n}{r_1}$ aus Gl. 8) ein, so erhalten wir die Stufenzahl des Anlagers

$$n = 1 + [1 - s_a(1 - \eta)] \frac{\varepsilon s}{s_a(s - 1)} \dots \dots \dots 17)$$

Benutzt man zum Anlassen des Hauptschlußmotors einen nach einer geometrischen Reihe abgestuften Widerstand und läßt ε konstant, wartet also mit dem Weiterschalten auf jeder Stufe so lange, bis der Strom auf den vorgeschriebenen für alle Stufen gleichen Wert zurückgegangen ist, so bleiben die Stromspitzen nicht konstant, sondern nehmen allmählich auf einen sehr geringen Wert ab. Hierdurch wird aber die Anlaßzeit und damit die erforderliche Widerstandsgröße (seine Wärmekapazität) vergrößert.

2. Die Anlaßzeit.

a) **Der Nebenschlußmotor.** Wie schon erwähnt, muß das vom Motor entwickelte Drehmoment das Lastmoment übersteigen und dieser Mehrbetrag beschleunigt die umlaufenden Massen. Wir drücken dies durch die folgende Differentialgleichung aus

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = D - M, \dots \dots \dots 18)$$

worin Θ das Gesamtträgheitsmoment der umlaufenden Massen bezeichnet. Das Lastmoment hatten wir als konstant gleich M_0 vorausgesetzt; das Motordrehmoment können wir mit Hilfe von Gl. 1) und ω mit Gl. 5) durch den Strom i ausdrücken. Die Grenzbedingungen für diesen sind nach früheren:

$$\begin{aligned} \text{Anfang der Stufe: } t &= t_{\nu-1}; & i &= i_0' = \varepsilon s i_1 \\ \text{Ende der Stufe: } t &= t_\nu; & i &= i_1' = \varepsilon i_1. \end{aligned}$$

Führen wir dann noch die Anlaufzeitkonstante der ν ten Stufe

$$T_\nu = \frac{\Theta}{M_0} (\omega_s - \omega_\nu) = T_0 \frac{\omega_s - \omega_\nu}{\omega_s} \dots \dots \dots 19)$$

ein, so liefert die Integration die Beziehung

$$t_\nu = t_{\nu-1} + T_\nu \ln \frac{\varepsilon s - 1}{\varepsilon - 1} = t_{\nu-1} + T_\nu \cdot k \dots \dots \dots 20)$$

Für die erste Stufe sind die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Anfang der Stufe: } t &= 0; & i &= i_a = s_a i_1; & \omega &= 0 \\ \text{Ende der Stufe: } t &= t_1; & i &= i_1' = \varepsilon i_1 \end{aligned}$$

und daher wird hier

$$t_1 = T_1 \ln \frac{s_a - 1}{\varepsilon - 1} = T_1 k_a \dots \dots \dots 20a)$$

Nun folgt zunächst aus Gl. 6) und 19)

$$T_\nu = T_0 \frac{\omega_s - \omega_\nu}{\omega_s} = T_0 \frac{\omega_s - \omega_{\nu-1}}{s\omega_s} = T_0 \frac{\omega_s - \omega_{\nu-2}}{s^2\omega_s} = \dots = T_0 s^{-\nu+1} \frac{\omega_s - \omega_1}{\omega_s}$$

und mit Beachtung von Abb. 1

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_0 \frac{\omega_s - \omega_1}{\omega_s} = T_0 \frac{1}{s_a} \\ T_\nu &= T_0 \frac{1}{s_a} \cdot s^{-\nu+1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 19a)$$

In ähnlicher Weise erhält man aus Gl. 20)

$$t_\nu = t_{\nu-1} + kT_\nu = t_{\nu-2} + kT_{\nu-1} + kT_\nu = t_{\nu-3} + kT_{\nu-2} + kT_{\nu-1} + kT_\nu = \dots$$

$$t_\nu = t_1 + \sum_{\lambda=0}^{\nu-2} kT_{\nu-\lambda} = \frac{T_0}{s_a} \left[k_a + k \sum_{\lambda=0}^{\nu-2} s^{-\nu+\lambda+1} \right]$$

Die Summierung der Reihe ergibt, wenn man gleichzeitig n statt ν einsetzt,

$$t_n = \frac{T_0}{s_a} \left[k_a + k \frac{1 - s^{-n+1}}{s - 1} \right] \dots \dots \dots 21)$$

Es ist zu beachten, daß die Anlaßzeit in dieser Formel vom Stillstand bis zu dem Zeitpunkt gerechnet ist, in welchem der Strom bei gänzlich abgeschaltetem Vorschaltwiderstande den Wert $i_1' = \varepsilon i_1$ erreicht hat. Zwar beschleunigt sich der Motor auch dann noch, nämlich bis der stationäre Strom i_1 erreicht ist, jedoch gehört dies nicht mehr zu dem Anlaßvorgang. Der Wert s^{n-1} ist schon durch Gl. 10) bestimmt, man kann daher auch schreiben

$$t_n = \frac{T_0}{s_a} \left[k_a + k \frac{1 - s_a(1 - \eta)}{s - 1} \right] \dots \dots \dots 21a)$$

Für den Fall $s_a = \varepsilon s$ erhält man $k_a = k$ und daher

$$t_n = T_0 \frac{k}{\varepsilon} \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{s - 1} \dots \dots \dots 21b)$$

Denselben Ausdruck erhält man auch für $s_a = \varepsilon$, wie man sich unmittelbar überzeugen kann, da dann $k_a = 0$ wird. Dies ist übrigens selbstverständlich, denn die Ströme εi_1 und εi_1 treten jedesmal zu demselben Zeitpunkt und Geschwindigkeitspunkt auf. Aus der letzten Gleichung kann man leicht den Grenzwert ableiten, den die Anlaßzeit für $s = 1$, also für stetiges Anlassen annimmt. In diesem Falle wird

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{k}{s - 1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

und somit die Anlaßzeit für stetiges Anlassen

$$t_s = T_0 \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{\varepsilon - 1} \dots \dots \dots 21c)$$

b) Der Hauptschlußmotor. Wir gehen wieder von der allgemein gültigen Gl. 18) aus, setzen D nach Gl. 11) und ω nach Gl. 14) ein, dann erhalten wir mit Benutzung der Größe T_0 , wie sie in Gl. 19) definiert ist,

$$T_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_1}{i} \right) = \left(\frac{i}{i_1} \right)^2 - 1.$$

Die Grenzbedingungen sind dieselben wie vorher, daher erhält man nach Ausführung der Integration

$$\left. \begin{aligned} t_\nu &= t_{\nu-1} + T_0 \left[\mathfrak{M} \mathfrak{T} g \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{M} \mathfrak{T} g \frac{1}{\varepsilon s} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon s} \right] = t_{\nu-1} + T_0 \kappa \\ t_1 &= T_0 \left[\mathfrak{M} \mathfrak{T} g \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{M} \mathfrak{T} g \frac{1}{s_a} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{s_a} \right] = T_0 \kappa_a \end{aligned} \right\} \dots 22)$$

Auch hier sind die Koeffizienten der Zeitkonstanten unabhängig von der Stufe, also konstant. Durch wiederholte Anwendung der ersten Gleichung findet sich

$$t_\nu = t_{\nu-1} + \kappa T_0 = t_{\nu-2} + 2\kappa T_0 = t_{\nu-3} + 3\kappa T_0 + \dots = t_1 + (\nu - 1)\kappa T_0$$

und wenn wir ν durch n ersetzen

$$t_n = T_0 [\kappa_a + (n - 1)\kappa] \dots 23)$$

Mit Einführung des schon berechneten Wertes von n aus Gl. 17) erhalten wir

$$t_n = T_0 \left[\kappa_a + \kappa \varepsilon s \frac{1 - s_a(1 - \eta)}{s_a(s - 1)} \right] \dots 23a)$$

Für den schon erwähnten Sonderfall $s_a = \varepsilon s$ wird $\kappa_a = \kappa$ und unsere Gleichung lautet

$$t_n = T_0 \kappa s \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{s - 1} \dots 23b)$$

Jetzt können wir wieder zur Grenze ($s = 1$, $n = \infty$) übergehen; da

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\kappa}{s - 1} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}$$

ist, so beträgt die Anlaßzeit bei stetigem Anlassen

$$t_s = T_0 \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)} \dots 23c)$$

c) Vergleichende und allgemeine Betrachtungen. Um leicht einen Überblick über das Verhalten der beiden Motorarten zu gewinnen, wollen wir das Verhältnis der beiden Anlaßzeiten für stetiges Anlassen untersuchen. Die Zeitkonstante enthält die Geschwindigkeit ω_s ; maßgebend ist jedoch die stationäre Geschwindigkeit ω_n und wir setzen daher (mit Beachtung von Gl. 7)

$$T = \frac{\Theta \omega_n}{M_0} = \eta T_0 \dots 24)$$

Diese neue Zeitkonstante ist nur von den Anlaßbedingungen und nicht mehr von den Eigenschaften des Motors abhängig. Sie stellt die Zeit dar, die notwendig ist, einen Drehkörper mit dem Trägheitsmoment Θ auf die Geschwindigkeit ω_n zu bringen, wenn auf ihn ein beschleunigendes Moment M_0 wirkt. Setzen wir voraus, daß der Anlaßstrom und die Größe T bei beiden Motoren gleich groß sind, so beträgt das Verhältnis der Anlaßzeit des Nebenschlußmotors zu der des Hauptschlußmotors

$$y = \frac{\eta_1}{\eta} \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{1 - \varepsilon(1 - \eta_1)} \varepsilon(\varepsilon + 1).$$

(Der Wirkungsgrad η_1 des Hauptschlußmotors ist für dieselbe Ankerwicklung um einige Hundertstel geringer als der des Nebenschlußmotors η .) Für $\varepsilon = 1$ wird $y = 2$; für $\varepsilon = \frac{3}{2}$ und $\eta = 0,9$, $\eta_1 = 0,87$ wird $y = 3,82$; das heißt also, die Anlaßzeit ist beim Nebenschlußmotor mindestens doppelt bis viermal so lang, wie beim Hauptschlußmotor. Dies ist auch durchaus erklärlich, denn da wir denselben Anlaßstrom angenommen hatten, so ist das Beschleunigungsmoment beim Hauptschlußmotor bedeutend größer, wodurch seine Anlaßzeit verkürzt wird. Nehmen wir daher zu einem neuen Vergleich das Beschleunigungsmoment in beiden Fällen gleich, so müssen wir in Gl. 23c) ε durch $\sqrt{\varepsilon}$ ersetzen und dann das Verhältnis bilden. Wir erhalten dann

$$y_1 = \frac{\eta_1}{\eta} \sqrt{\varepsilon} \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{1 - \sqrt{\varepsilon}(1 - \eta_1)}.$$

Für $\varepsilon = 1$ wird $y_1 = 1$; für $\varepsilon = \frac{3}{2}$ und $\eta = 0,9$, $\eta_1 = 0,87$ wird $y_1 = 1,19$; also selbst bei gleichem Beschleunigungsmoment ist die Anlaßzeit des Nebenschlußmotors stets größer als die des Hauptschlußmotors.

Der absolute Wert des Faktors von T beträgt für $\varepsilon = \frac{3}{2}$ und $\eta = 0,9$ beim Nebenschlußmotor

$$\frac{1}{0,9} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2}(1 - 0,9)}{\frac{3}{2} - 1} = 1,89$$

und nimmt mit η zugleich ab. Vergleicht man Motoren verschiedener Größe miteinander, so wird dieser Faktor sich zwar auch ändern, da der Wirkungsgrad verschieden ist, doch ist diese Änderung nur bei bedeutenden Größenunterschieden der Motoren beträchtlich. Es fragt sich nun, welchen Einfluß die Zeitkonstante auf die Anlaßzeit hat. Für diese Untersuchung soll unter Θ nur das Trägheitsmoment des Motorankers verstanden werden. Für einen Vollzylinder mit den Abmessungen d und l und der Massendichte μ wird

$$\Theta = \frac{\pi}{32} \mu d^4 l.$$

Dieser Wert dürfte sehr nahe auch für den Motoranker richtig sein, denn dieser ist im Innern hohl und trägt am äußern Rande die seine Länge wesentlich überschreitende Kupferwicklung, zwei Umstände, die sich meist mehr oder weniger aufheben werden. Das Drehmoment M_0 ist gleich dem stationären Motordrehmoment und daher durch die Gleichung bestimmt

$$L_a = M_0 \omega_n,$$

wenn L_a die elektromagnetische Leistung des Motors ($L_a = E_n i_1$) bezeichnet. Dividiert man diese durch das Volumen des Zahnkranzes

$$w = \frac{L_a}{\pi d h l}$$

(h = Zahnhöhe), so erhält man einen spezifischen Belastungswert, der nur wenig von der Maschinengröße abhängig ist. Führen wir diese Werte in die Gl. 24) ein und ersetzen gleichzeitig die Winkelgeschwindigkeit ω_n durch die Umfangsgeschwindigkeit v (es ist $v = \frac{d}{2} \omega_n$), so erhalten wir nach Streichung der sich weghebenden Größen

$$T = \frac{\mu}{8} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{v^2}{w} \dots \dots \dots 25)$$

Bei kleinen und mittleren Maschinen kann man das Verhältnis $\frac{d}{h}$ als nahezu konstant ansehen und da die Umfangsgeschwindigkeit unter normalen Verhältnissen stets etwa dieselbe ist, so wird die Zeitkonstante sich nur unwesentlich mit der Maschinengröße ändern. Um die Größenordnung für die Anlaßzeit kennen zu lernen, wollen wir ein Zahlenbeispiel nehmen. Es werde gewählt $\mu = 7,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\frac{d}{h} = 5$, $v = 1500 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$, $w = 3 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$, welche Werte für kleinere Maschinen etwa zutreffen dürften; dann erhalten wir mit dem schon berechneten Faktor von T als Anlaßzeit

$$t_s = \frac{7,5}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1500^2}{3 \cdot 10^7} \cdot 1,89 = 0,67 \text{ Sekunden.}$$

Legt man die von Pichelmayer in seinem Buche „Dynamobau“¹⁾ auf S. 643 gegebenen Kurven der Rechnung zugrunde, so erhält man bis zu 40 cm Durchmesser

¹⁾ Erschienen 1908 im Verlag von S. Hirzel, Leipzig.

einen nahezu konstanten Wert von im Mittel etwa 0,92 Sekunden, und dieser Wert steigt für größere Durchmesser allmählich bis auf das Doppelte bei etwa 180 cm und das Dreifache bei 300 cm Durchmesser. Dabei wurde wie oben $\mu = 7,5$ und $v = 1500$ angenommen.

In der „Starkstromtechnik“¹⁾ gibt F. Natalis eine ganze Reihe von beobachteten Anlaßzeiten für verschiedenartige Motoren von 6,3 bis 2640 PS. Danach ändert sich die Anlaßzeit von 0,78 bis 1,6 Sekunden, und zwar nimmt sie auch mit der Leistung zu. Allerdings ist aus den gegebenen Zahlen kein bestimmtes Gesetz zu erkennen; jedoch ist dies leicht erklärlich, da vermutlich die Umfangsgeschwindigkeit, sowie auch die magnetische und elektrische Beanspruchung der Motoren verschieden gewesen ist.

3. Die Wärmekapazität des Widerstandes.

a) Der Nebenschlußmotor. Es soll hier vorausgesetzt werden, daß die Wärmezeitkonstante des Widerstandsmaterials groß gegenüber der Zeitdauer einer Stufe ist. Dann werden wegen der kurzen Belastungsdauer die Temperaturschwankungen auf einer Stufe gegenüber der mittleren Temperatur gering sein, so daß man sie vernachlässigen kann. Man wird daher mit der letzteren rechnen können und es kommt für die Bemessung der Materialmenge die Wärmekapazität, die wir berechnen wollen, in Frage. Von einer Wärmeabgabe des Widerstandes nach außen wird dabei abgesehen. Ist dagegen die Wärmezeitkonstante etwa von der gleichen Größenordnung wie die Zeitdauer einer Stufe oder gar kleiner als diese, so muß der Widerstand für Dauerbelastung berechnet werden. Die Entscheidung darüber, unter welchen Umständen die Wärmekapazität des Widerstandes in Betracht kommt und wann er für Dauerbelastung zu berechnen ist, liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

Wir berechnen zunächst den effektiven Strom der ν -ten Stufe und definieren ihn durch die Gleichung

$$c^2 i_1^2 (t_\nu - t_{\nu-1}) = \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} i^2 dt \quad \dots \dots \dots 26)$$

Mit Benutzung der Gl. 20), 18), 1) und 5) erhält man

$$c^2 i_1^2 T_{\nu,k} = - \int_{\varepsilon s i_1}^{\varepsilon i_1} i^2 \frac{T_\nu}{i_1} \frac{di}{\frac{i}{i_1} - 1}$$

und nach Ausführung der Integration ergibt sich nach Vereinfachung

$$c^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2k} (s - 1) (\varepsilon s + \varepsilon + 2) \quad \dots \dots \dots 27)$$

Auf der ersten Stufe dagegen ist die untere Grenze $s_a i_1$, also ist hier

$$c_a^2 i_1^2 t_1 = c_a^2 i_1^2 T_{1,k_a} = - \int_{s_a i_1}^{\varepsilon i_1} i^2 \frac{T_1}{i_1} \frac{di}{\frac{i}{i_1} - 1}$$

und daher liefert die Integration

$$c_a^2 = 1 + \frac{1}{2k_a} (s_a^2 - \varepsilon^2 + 2s_a - 2\varepsilon) \quad \dots \dots \dots 27a)$$

Der Leistungsverbrauch auf der ν -ten Stufe beträgt

$$c^2 i_1^2 (r_\nu - r_{\nu+1}) = c^2 i_1^2 r_n (s - 1) s^{n-\nu-1}$$

¹⁾ Taschenbuch für Elektrotechniker; herausgegeben von R. Zihl und Seidener, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin; 2. Aufl., 1912, S. 671.

und auf der ersten Stufe

$$c_a^2 i_1^2 (r_1 - r_2) = c_a^2 i_1^2 r_n (s - 1) s^{n-2}.$$

Die ν -te Stufe bleibt die ganze Zeit vom Beginne des Anlassens bis zum Abschalten dieser Stufe belastet, also die Zeit t_ν hindurch; daher beträgt ihre Wärmekapazität

$$C_\nu = c^2 i_1^2 r_n (s - 1) s^{n-\nu-1} t_\nu$$

oder wenn man Gl. 21) mit ν statt n benutzt

$$C_\nu = c^2 i_1^2 r_n (s - 1) \frac{T_0}{s_a} s^{n-\nu-1} \left[k_a + k \frac{1 - s^{-\nu+1}}{s - 1} \right].$$

Zur Vereinfachung des Ausdruckes werde an Gl. 7) und 10) und an die Bedeutung von T_0 [Gl. 19)] erinnert; es ist danach

$$i_1^2 r_n T_0 = \frac{1 - \eta}{\eta} E_n i_1 T_0 = \frac{1 - \eta}{\eta} M_0 \omega_n \cdot \frac{\Theta \omega_s}{M_0} = \frac{\Theta \omega_s^2}{s_a \cdot s^{n-1}}.$$

Bezeichnet man noch die kinetische Energie der umlaufenden Massen bei stationärer Geschwindigkeit mit A und bei der Geschwindigkeit ω_s mit A_s , setzt man also

$$A = \frac{1}{2} \Theta \omega_n^2; \quad A_s = \frac{1}{2} \Theta \omega_s^2 = \frac{A}{\eta^2}, \quad \dots \dots \dots 28)$$

so erhält man schließlich für die ν -te Stufe

$$C_\nu = 2 c^2 A_s \frac{s - 1}{s_a^2} s^{-\nu} \left[k_a + k \frac{1 - s^{-\nu+1}}{s - 1} \right].$$

und für die erste Stufe

$$C_1 = 2 c_a^2 A_s \frac{s - 1}{s s_a^2} k_a.$$

Die Gesamtkapazität des Anlaßwiderstandes ergibt sich daher zu

$$K_{n-1} = C_1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} C_\nu = 2 A_s \frac{s - 1}{s_a^2} \left[c_a^2 \frac{k_a}{s} + \sum_{\nu=2}^{n-1} \left(c^2 \frac{k_a}{s^\nu} + c^2 \frac{k}{s^\nu} \frac{1 - s^{-\nu+1}}{s - 1} \right) \right]$$

und nach Summierung der Reihe

$$\left. \begin{aligned} K_{n-1} &= 2 A_s \frac{s - 1}{s s_a^2} \left[c_a^2 k_a + c^2 k_a \frac{1 - s^{-n+2}}{s - 1} + c^2 k \frac{1 - s^{-n+2}}{(s - 1)^2} - c^2 k \frac{1 - s^{-2n+4}}{(s - 1)(s^2 - 1)} \right] \\ K_{n-1} &= A_s \frac{2}{s s_a^2} \left[c_a^2 k_a \frac{s - 1}{s} + c^2 k_a \left(\frac{1}{s} - s^{-n+1} \right) + c^2 k \frac{(1 - s^{-n+2})(1 - s^{-n+1})}{s^2 - 1} \right] \end{aligned} \right\} 29)$$

Mit Gl. 10) erhalten wir hieraus

$$K_{n-1} = A_s \frac{2}{s s_a^2} \left\{ c_a^2 k_a \frac{s - 1}{s} + c^2 k_a \left[\frac{1}{s} - s_a (1 - \eta) \right] + c^2 k \frac{[1 - s s_a (1 - \eta)][1 - s_a (1 - \eta)]}{s^2 - 1} \right\} \quad 29a)$$

Als obere Grenze der Reihe wurde $n - 1$ eingesetzt, da die n -te Stufe (r_n) nicht mehr zum Vorschaltwiderstandes gehört, sondern der innere Widerstand des Motors ist. Eine besonders einfache Form nimmt der Ausdruck auch wieder für $s_a = \varepsilon s$ an, oder, was dasselbe ergibt, für $s_a = \varepsilon$. Im letzteren Falle wird $k_a = 0$ und wir erhalten

$$K_{n-1} = A_s \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{c^2 k}{s^2 - 1} [1 - \varepsilon (1 - \eta)] [1 - \varepsilon s (1 - \eta)] \dots \dots \dots 29b)$$

Für den Fall des stetigen Anlaufs ist $s = 1$ zu setzen; dann ist

$$\lim_{s=1} \frac{c^2 k}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon - 1}$$

und die Gl. 29b) ergibt

$$K = A_s \frac{\varepsilon}{\varepsilon - I} [I - \varepsilon(I - \eta)]^2 \dots \dots \dots 29c)^1)$$

Diesen Wert kann man auch durch Integration leicht unmittelbar berechnen. In dem Widerstandselement dr wird in der Zeit dt die Energie $dr \cdot i^2 dt$ in Wärme umgesetzt und zwar für die Zeit $t=0$ bis zu der Zeit $t=t$; dies muß man dann über den ganzen Widerstand integrieren. Daher erhalten wir die Formel

$$K = \int_{r_n}^{r_1} dr \int_0^t i^2 dt \dots \dots \dots 30)$$

Mit Benutzung der im Abschnitt Ia abgeleiteten Formeln, sowie Gl. 18) finden wir leicht nach Ausführung der Integrationen und entsprechender Umformung unsere auf anderem Wege entwickelte Gl. 29c).

b) **Der Hauptschlußmotor.** Auch hier berechnen wir zunächst den effektiven Strom und benutzen dazu wieder die Gl. 26), in welcher wir t durch den Strom ausdrücken; wir erhalten

$$c^2 i_1^2 (t_r - t_{r-1}) = \int_{\frac{1}{\varepsilon s}}^{\frac{1}{\varepsilon}} i^2 \frac{T_0 d\left(\frac{i_1}{i}\right)}{\left(\frac{i}{i_1}\right)^2 - I} = T_0 i_1^2 \int_{\frac{1}{\varepsilon s}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d\left(\frac{i_1}{i}\right)}{I - \left(\frac{i_1}{i}\right)^2}.$$

Die Integration liefert mit Beachtung von Gl. 22)

$$c^2 = I + \frac{s - I}{\varepsilon s \kappa} \dots \dots \dots 31)$$

Ebenso erhält man für die erste Stufe

$$c_a^2 = I + \frac{s_a - \varepsilon}{\varepsilon s_a \kappa_a} \dots \dots \dots 31a)$$

Auf der ν -ten Stufe wird daher eine Leistung

$$c^2 i_1^2 (r_\nu - r_{\nu+1}) = c^2 i_1^2 r_n \frac{s - I}{\varepsilon s (I - \eta)}$$

verbraucht; da dieser Wert nicht von der Stufe abhängig ist, so gilt er auch für die erste Stufe, nur daß dort c_a statt c zu setzen ist. Die auf der ν -ten Stufe während der Einschaltzeit in Wärme umgesetzte Energiemenge beträgt mit Gl. 23)

$$\begin{aligned} C_\nu &= c^2 i_1^2 r_n \frac{s - I}{\varepsilon s (I - \eta)} t_r = c^2 i_1^2 r_n \frac{s - I}{\varepsilon s (I - \eta)} T_0 [\kappa_a + (\nu - 1)\kappa] \\ &= A_s 2 c^2 \frac{s - I}{\varepsilon s} [\kappa_a + (\nu - 1)\kappa]. \end{aligned}$$

Die Wärmekapazität des Gesamtwiderstandes beträgt somit

$$K_{n-1} = C_1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} C_\nu = A_s 2 \frac{s - I}{\varepsilon s} \left[c_a^2 \kappa_a + \sum_{\nu=2}^{n-1} c^2 [\kappa_a + (\nu - 1)\kappa] \right].$$

Die Summierung ist hier besonders einfach und ergibt

$$K_{n-1} = A_s 2 \frac{s - I}{\varepsilon s} \left[c_a^2 \kappa_a + c^2 \kappa_a (n - 2) + c^2 \kappa \frac{I}{2} (n - 1)(n - 2) \right] \dots \dots 32)$$

Hier kann n mit Hilfe von Gl. 17) ausgeschafft und dann der Wert von K_{n-1} leicht

¹⁾ In meiner früheren Arbeit (a. a. O.) ist der Grenzübergang nicht richtig dargestellt, da bei der Bestimmung des Wertes von κ [in Gl. 27)] die Klemmenspannung $\mathcal{E} = i_0 r_1$ gesetzt ist und im Grenzfall $i_0 = i_1$ ist. Infolgedessen sind alle Abteilungen, bei denen der Grenzübergang vorgenommen ist, unrichtig, also von Gl. 26) bis zum Schluß des dortigen Abschnitts.

berechnet werden. Wir wollen jedoch darauf verzichten, die Gleichung mit dieser Einführung nochmals hinzuschreiben, da sie dadurch nur umständlicher wird. Besonders einfach wird jedoch auch hier die Gleichung, wenn wir $s_a = \varepsilon s$ oder $s_a = \varepsilon$ setzen. In diesen Fällen finden wir nämlich

$$K_{n-1} = A_s \frac{c^2 \kappa}{\varepsilon(s-1)} [1 - \varepsilon(1 - \eta)] [1 - \varepsilon s(1 - \eta)] \quad 32b)$$

Beim stetigen Anlauf, also für $s = 1$, wird

$$\lim_{s=1} \frac{c^2 \kappa}{s-1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$$

und daher erhalten wir als Kapazität in diesem Falle

$$K = A_s \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2 \quad 32c)$$

Auch hier könnten wir natürlich diesen Ausdruck mit Hilfe von Gl. 30) unmittelbar berechnen.

c) Vergleichende Betrachtungen. Wir setzen auch hier wieder gleiche Anlaßbedingungen, also gleiche Zeitkonstante T voraus. Dann erhalten wir für das Verhältnis der Kapazität beim Nebenschlußmotor zu der beim Hauptschlußmotor unter Voraussetzung gleichen Beschleunigungsmomentes und stetigen Anlaufs, wofür wir in Gl. 32c) $\sqrt{\varepsilon}$ statt ε einsetzen müssen, den Wert

$$y = \frac{\eta_1^2}{\eta^2} \varepsilon \frac{[1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2}{[1 - \sqrt{\varepsilon}(1 - \eta_1)]^2}$$

Für $\varepsilon = 1$ wird $y = 1$; mit den früher schon gewählten Werten $\varepsilon = \frac{3}{2}$, $\eta = 0,9$, $\eta_1 = 0,87$ ergibt sich hier $y = 1,43$. Auch die Widerstandskapazität ist also, wie zu erwarten war, beim Nebenschlußmotor größer. Der absolute Wert des Faktors von A beträgt beim Nebenschlußmotor

$$\frac{1}{0,92} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} [1 - \frac{3}{2}(1 - 0,9)] = 2,67,$$

d. h. also, der Anlaßwiderstand muß für den 2,67fachen Betrag der kinetischen Energie der umlaufenden Massen berechnet werden. Es ist vielfach üblich¹⁾, als Maßstab für die Bestimmung der Größe des Widerstandes die Anlaßarbeit anzusetzen; hierunter wird das Produkt aus der Anlaßleistung mit der Anlaßzeit verstanden. Als Anlaßleistung wird dabei „die dem Anlaufdrehmoment entsprechende, auf normale Tourenzahl bezogene Leistung“ aufgefaßt, also in unsern Zeiten offenbar die Größe $D \omega_n$. Für die Anlaßzeit wird ferner mit Benutzung unserer Zeichen die Größe $\frac{\Theta \omega_n}{D - M_0}$ eingesetzt; daher wäre danach die Kapazität des Widerstandes

$$K = \Theta \omega_n^2 \frac{D}{D - M_0} \quad 33)$$

also beim Nebenschlußmotor

$$K = A \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1} \quad 33a)$$

und beim Hauptschlußmotor

$$K = A \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \quad 33b)$$

Das Verhältnis dieses Wertes zu dem von uns abgeleiteten beträgt daher beim Nebenschlußmotor [Gl. 29 c) und 28)]

¹⁾ Siehe beispielsweise Preisliste der Siemens-Schuckert-Werke über Anlasser. In gleicher Weise wie dort wird auch von E. Arnold in seinem Buche „Die Gleichstrommaschine“, Berlin 1907, II. Bd., S. 413, die Anlaßleistung und die Anlaßzeit definiert.

$$y = \frac{2\eta^2}{[1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2}$$

Für $\varepsilon = 1$ erhalten wir $y = 2$ und für $\varepsilon = \frac{3}{2}$ wird mit $\eta = 0,9$

$$y = \frac{2 \cdot 0,9^2}{[1 - \frac{3}{2}(1 - 0,9)]^2} = 2,24.$$

Der Widerstand wird also, nach Gl. 33 a) berechnet, zu reichlich ausfallen und zwar mindestens doppelt so groß wie er nötig ist, denn sowohl mit der Abnahme von η als auch mit der Zunahme von ε wird y größer.

Für den Hauptschlußmotor beträgt dieses Verhältnis mit Gl. 33 b), 33 c) und 28)

$$y = \frac{2\varepsilon^2\eta^2}{[1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2}.$$

Auch hier wird $y = 2$ für $\varepsilon = 1$; dagegen für $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\eta = 0,87$ ergibt sich

$$y = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0,87^2}{[1 - \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - 0,87)]^2} = 3,21.$$

Bei gleichem Beschleunigungsmoment wie beim Nebenschlußmotor wird also hier die Abweichung der beiden Formeln noch größer. Der Grund für das Auftreten der 2 in den Gl. 33 a) und 33 b) gegenüber den richtigen Gl. 29 c) und 32 c) ist darin zu suchen, daß als Anlaßleistung der konstante Wert $D\omega_n$ eingesetzt ist, während in Wirklichkeit der Wert $D\omega$ zu nehmen ist, d. h. also, das konstante Drehmoment, multipliziert mit der augenblicklichen Geschwindigkeit. Nun erfolgt die Änderung der letzteren wegen des konstanten Drehmoments linear; trägt man daher die Anlaßleistung über der Zeit auf, so erhält man ein Dreieck, dessen mittlere Ordinate $\frac{1}{2}D\omega_n$, mit der Anlaßzeit multipliziert, die Anlaßarbeit (die Dreiecksfläche) ergibt. Die sonstige Abweichung der Gl. 33 a) und 33 b) ist darauf zurückzuführen, daß als obere Grenze bei der Integration die stationäre Geschwindigkeit ω_n gewählt ist. Bei Annahme eines konstanten Beschleunigungsmomentes, also auch eines konstanten Anlaßstromes, ist aber gerade dann aller Vorschaltwiderstand abgeschaltet und nur noch der innere Widerstand des Motors im Kreise, sobald die Geschwindigkeit ω_n' erreicht ist; diese ist aber durch Gl. 6) oder 15) mit $v = n$ gegeben. Bis hierher darf man daher auch nur die Anlaßzeit rechnen, denn der weitere Vorgang erfolgt nach anderen Gesetzen; der Widerstand des Kreises ist jetzt unveränderlich und die Zeit, bis die stationäre Geschwindigkeit ω_n erreicht ist, wird unendlich groß. Außerdem ist ja auch die Zeitdauer bis zur Erreichung des stationären Zustandes nach Abschaltung des Anlaßwiderstandes für dessen Größe ohne Belang.

4. Die Energieumsetzung beim Anlassen.

a) **Allgemeine Formeln und ihre graphische Darstellung.** Da wir zur Erreichung der erforderlichen Drehzahl des Motors dem Anker einen Widerstand vorschalten und diesen erst allmählich mit der Steigerung der Geschwindigkeit verringern, so wird in diesem Widerstand auch eine gewisse Energiemenge, die vom Netz zu liefern ist, in Wärme umgesetzt. Wir setzen für alle weiteren Ableitungen voraus, daß das Anlassen stetig erfolgt, und aus den zu Anfang angeführten Gründen soll der Anlaßstrom und damit das Motordrehmoment konstant bleiben. Dann beträgt die im Widerstand in Wärme umgesetzte Energie

$$Q_w = \int i^2 r dt = i^2 \int_0^{t_s} r dt \quad \dots \dots \dots 34)$$

Eine weitere Energiemenge wird zur Beschleunigung der Massen aufgewendet; diese beträgt

$$Q_\theta = \int_0^{\omega_n'} \Theta \omega d\omega = \frac{1}{2} \Theta \omega_n'^2 \quad \dots \dots \dots 35)$$

Setzen wir

$$D = p M_0, \quad M = \alpha M_0,$$

wobei p als konstant angenommen wird, α jedoch veränderlich sein kann (M_0 ist das stationäre Lastmoment), so erhalten wir aus Gl. 18) und 24)

$$\frac{T}{\omega_n} \frac{d\omega}{dt} = p - \alpha \dots \dots \dots 36)$$

Führen wir mittels dieser Gleichung in der vorigen Gleichung als Integrationsvariable t ein, so ergibt sich nach kurzer Umformung

$$Q_\theta = \int_0^{t_s} D \omega \left(1 - \frac{\alpha}{p} \right) dt.$$

Nun ist aber $D\omega = Ei$ und ferner $E = \mathcal{E} - ir$; die Klemmenspannung wird im Augenblick des Einschaltens gänzlich durch den dann eingeschalteten Gesamtwiderstand r_1 aufgebraucht, es ist also $\mathcal{E} = ir_1$ und daher können wir den Ausdruck für die Beschleunigungsenergie auch folgendermaßen schreiben:

$$Q_\theta = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] \left(1 - \frac{\alpha}{p} \right) dt \dots \dots \dots 35a)$$

Zur Überwindung des Lastdrehmoments wird die folgende Energie verbraucht:

$$Q_M = \int_0^{t_s} M \omega dt, \dots \dots \dots 37)$$

oder nach Umformung wie vorher unter Weglassung der Zwischenrechnung

$$Q_M = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] \frac{\alpha}{p} dt \dots \dots \dots 37a)$$

Diese beiden Energiemengen sind nutzbar aufgewendet; sie geben zusammen

$$Q_n = Q_M + Q_\theta = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] dt \dots \dots \dots 38)$$

und werden durch die elektromagnetische Leistung des Motors gedeckt. Man kann sie daher auch durch das Integral

$$Q_n = \int_0^{t_s} E i dt \dots \dots \dots 38a)$$

darstellen. Vom Netz wird während des Anlassens die Energie

$$Q_1 = \int_0^{t_s} \mathcal{E} i dt \dots \dots \dots 39)$$

geliefert, und da $\mathcal{E} = E + ir$ ist, so wird

$$Q_1 = \int_0^{t_s} E i dt + i^2 \int_0^{t_s} r dt = Q_n + Q_w, \dots \dots \dots 39a)$$

d. h. es wird gerade so viel vom Netz geliefert, wie zur Deckung der nutzbar verwendeten und der in Wärme umgesetzten Energie gebraucht wird. Wenn wir noch die Formel für die Kapazität hinzunehmen [Gl. 30)], so erhalten wir bei konstantem Strom durch partielle Integration

$$K = i^2 \int_{r_n}^{r_1} t dr = i^2 [tr]_{t_s, r_n}^{0, r_1} - i^2 \int_{t_s}^0 r dt = i^2 \int_0^{t_s} r dt - i^2 r_n t_s,$$

also

$$K = Q_W - V \quad \dots \quad 40)$$

Die letzte Größe V ist die während des Anlassens innerhalb des Motors in Wärme umgesetzte Energie.

Wir wollen jetzt versuchen, diese Formeln in einem Kurvenbild uns zu veranschaulichen. Zu dem Zwecke tragen wir den Widerstand r als Ordinate über der Zeit als Abszisse auf (Kurve BE in Abb. 2) und ziehen außerdem eine Parallele zur Ordinatenachse durch den Punkt $t = t_s$ ($\overline{AC}$) und zwei Parallelen zur Abszissenachse durch die Punkte $r = r_n$ ($\overline{DE}$) und $r = r_1$ ($\overline{BC}$), wie dies in Abb. 2 geschehen ist. Ferner teilen wir die Verlängerung der Ordinate zwischen der Kurve BE und der Geraden $\overline{BC}$ im Verhältnis $\frac{\alpha}{p}$ und ziehen durch die gefundenen Punkte eine neue Kurve (in Abb. 2 Kurve BF)¹⁾. Wenn wir uns jetzt die Bedeutung der oben aufgestellten Integrale vor Augen führen, so können wir die betreffenden Energiegrößen durch entsprechende Flächen der Abb. 2 darstellen, indem wir deren Inhalt mit der konstanten Größe i^2 multiplizieren. Wir erhalten auf diese Weise die folgenden Energiegrößen mit den ihnen entsprechenden Flächen:

Abb. 2.

$$Q_W = i^2 \int_0^{t_s} r dt = i^2 \cdot \overline{OAE B},$$

$$Q_\theta = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) dt = i^2 \cdot \overline{BEF},$$

$$Q_M = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] \frac{\alpha}{p} dt = i^2 \cdot \overline{BFC},$$

$$Q_n = i^2 \int_0^{t_s} [r_1 - r] dt = i^2 \cdot \overline{BEC},$$

$$Q_1 = i^2 \int_0^{t_s} r_1 dt = i^2 \cdot \overline{OACB},$$

$$K = i^2 \int_{r_n}^{r_1} t dr = i^2 \cdot \overline{DEB},$$

$$V = i^2 \int_0^{t_s} r_n dt = i^2 \cdot \overline{OAED}.$$

Wir können jetzt auch den Wirkungsgrad des Anlaßvorganges bestimmen. Nennen wir diesen ϱ , so erhalten wir dafür den Ausdruck

$$\varrho = \frac{Q_n}{Q_1} = 1 - \frac{Q_W}{Q_1} \quad \dots \quad 41)$$

¹⁾ Die Kurven in Abb. 2 wurden für den Nebenschlußmotor entworfen und zwar für den Fall, daß das Lastmoment proportional der Geschwindigkeit ansteigt. Dabei wurde wie früher $\varepsilon = \frac{2}{3}$ und $\eta = 0,9$ gewählt, womit alle Unterlagen gegeben sind.

Mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen können wir diesen Ausdruck auch leicht auf die Formen bringen:

$$\varrho = \int_0^1 \left[1 - \frac{r}{r_1} \right] d\left(\frac{t}{t_s}\right) = \int_0^1 \frac{E}{\mathfrak{E}} d\left(\frac{t}{t_s}\right) = \int_0^1 \eta_t d\left(\frac{t}{t_s}\right) \dots \dots \dots 41a)$$

Die letzte Form ist besonders beachtenswert und leicht zu behalten. Wir hätten zu Anfang den Ankerwirkungsgrad $\eta = \frac{E_n}{\mathfrak{E}}$ des Motors eingeführt; wenn wir nun diesen Begriff verallgemeinern, so ist $\eta_t = \frac{E}{\mathfrak{E}}$ der augenblickliche Wirkungsgrad des Ankerkreises zu einem beliebigen Zeitpunkt t während des Anlassens. Der Mittelwert dieses Wirkungsgrades, über die ganze Anlaßzeit gerechnet, ist aber der Anlaßwirkungsgrad.

b) Konstantes Lastmoment. Wir wollen jetzt die Formeln auf unseren Fall des konstanten Lastmoments anwenden. Hierfür ist also $\alpha = 1$ zu setzen. Aus Gl. 2) und 3) bzw. 12) erhalten wir, da ja $\mathfrak{E} = ir_1$ ist, für den

$$\text{Nebenschlußmotor } r = r_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_s} \right), \dots \dots \dots 42a)$$

$$\text{Hauptschlußmotor } r = r_1 \left(1 - \varepsilon \frac{\omega}{\omega_s} \right) \dots \dots \dots 42b)$$

Aus Gl. 36) folgt

$$\frac{\omega}{\omega_n} = (p - 1) \frac{t}{T},$$

und setzen wir diesen Wert mit $p = \varepsilon$ bzw. $p = \varepsilon^2$ oben ein, so erhalten wir für den

$$\text{Nebenschlußmotor } \frac{r}{r_1} = 1 - \eta (\varepsilon - 1) \frac{t}{T}, \dots \dots \dots 43a)$$

$$\text{Hauptschlußmotor } \frac{r}{r_1} = 1 - \varepsilon \eta (\varepsilon^2 - 1) \frac{t}{T} \dots \dots \dots 43b)$$

Der Widerstand nimmt also linear mit der Zeit ab, die Kurve $\overline{BE}$ und damit auch $\overline{BF}$, wird eine Gerade. Wir können daher die Inhalte der für uns wichtigen Flächen sofort ablesen, und wenn wir beachten, daß

$$i^2 r_1 T = \mathfrak{E} i T = 2 \varepsilon \eta A_s$$

ist, so erhalten wir die folgenden Formeln:

	Nebenschlußmotor		Hauptschlußmotor		
	Formel	$\varepsilon = \frac{2}{3};$ $\eta = 0,9$	Formel	$\varepsilon = \frac{2}{3};$ $\eta = 0,87$	$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}};$ $\eta = 0,87$
t_s	$T \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{\eta(\varepsilon - 1)}$	1,89 T	$T \frac{1 - \varepsilon(1 - \eta)}{\varepsilon \eta (\varepsilon^2 - 1)}$	0,49 T	1,58 T
Q_w	$A_s \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} [1 - \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]$	3,62 A	$A_s \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} [1 - \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]$	1,02 A	2,57 A
Q_θ	$A_s [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	0,89 A	$A_s \frac{1}{\varepsilon^2} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	0,38 A	0,62 A
Q_M	$A_s \frac{1}{\varepsilon - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	1,78 A	$A_s \frac{1}{\varepsilon^2 (\varepsilon^2 - 1)} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	0,31 A	1,24 A
Q_1	$A_s \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	6,29 A	$A_s \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	1,71 A	4,43 A
K	$A_s \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	2,67 A	$A_s \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]^2$	0,69 A	1,86 A
V	$A_s \frac{2\varepsilon^2(1 - \eta)}{\varepsilon - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	0,95 A	$A_s \frac{2\varepsilon(1 - \eta)}{\varepsilon^2 - 1} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	0,33 A	0,71 A
ϱ	$\frac{1}{2} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	0,425	$\frac{1}{2} [1 - \varepsilon(1 - \eta)]$	0,403	0,420

Der Wirkungsgrad des Anlaßvorganges ist natürlich bei beiden Motoren durch denselben Ausdruck gegeben, da die Kurve $\overline{BE}$ eine Gerade ist. Außerdem ist in diesem Falle (Lastmoment konstant)

$$K = Q_n = Q_\theta + Q_M.$$

Ferner kann man, da in diesem Falle die Geschwindigkeit proportional der Zeit ist, als Abszisse auch die Geschwindigkeit wählen, wobei nur der Maßstab zu ändern ist.

Um einen Überblick über die Größenordnung der einzelnen Energiemengen zu gewinnen, sind in der Tabelle bei unbestimmt gelassenem Werte von A die Koeffizienten zahlenmäßig berechnet, wobei dieselben Werte von ε und η benutzt wurden wie bisher. Der Wirkungsgrad ist beim Nebenschlußmotor trotz der höheren Wärmeentwicklung und der langen Anlaßdauer noch am besten. Allgemein ist zu sagen, daß der Wirkungsgrad bei konstantem Lastmoment niemals größer als $\frac{1}{2}$ werden kann, welchen Wert er für $\eta = 1$ erreicht.

c) **Veränderliches Lastmoment.** Wir wollen jetzt annehmen, daß das Lastmoment sich mit der Geschwindigkeit ändert. Setzt man linearen Anstieg voraus, so wird

$$\alpha = \beta + (1 - \beta) \frac{\omega}{\omega_n}$$

zu setzen sein; für $\beta = 1$ erhält man daraus den vorigen Fall. Der Fall des linearen Anstiegs ist praktisch besonders wichtig, denn in den meisten Fällen wird das Lastmoment nicht konstant sein, sondern mehr oder weniger ansteigen. Man wird dann im allgemeinen seinen Verlauf durch eine Gerade mit praktisch genügender Genauigkeit darstellen können. Mit dem gegebenen Werte von α erhält man aus Gl. 36) durch Integration

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{p - \beta}{1 - \beta} \left[1 - e^{-(1-\beta) \frac{t}{T}} \right],$$

und wenn wir hierin $t = t_s$ und $\omega = \omega_n'$ machen, so können wir die Anlaßzeit berechnen. Die Größe ω_n' ist aus Gl. 6) oder 15) zu entnehmen. Durch Einsetzen des Wertes von $\frac{\omega}{\omega_n}$ in Gl. 42 a) und 42 b) erhalten wir die Gleichung der Widerstandskurve für den

$$\text{Nebenschlußmotor} \quad \frac{r}{r_1} = 1 - \eta \frac{\varepsilon - \beta}{1 - \beta} \left[1 - e^{-(1-\beta) \frac{t}{T}} \right], \quad \dots \dots 44a)$$

$$\text{Hauptschlußmotor} \quad \frac{r}{r_1} = 1 - \varepsilon \eta \frac{\varepsilon^2 - \beta}{1 - \beta} \left[1 - e^{-(1-\beta) \frac{t}{T}} \right] \quad \dots \dots 44b)$$

Diese Werte müssen dann in die Energiegleichungen eingesetzt werden. Die Integrationen sind einfach auszuführen, doch sollen die Lösungen hier nicht mehr hingeschrieben werden, da sich nichts wesentlich Neues mehr bietet. Jedoch wollen wir den Wirkungsgrad noch berechnen. Es werde zur Abkürzung

$$x = \frac{1 - \beta}{p - \beta} \frac{\omega_n'}{\omega_n}$$

gesetzt und der Wirkungsgrad für konstantes Lastmoment werde mit q_1 bezeichnet; dann erhalten wir durch Integration der Gl. 41 a) die Beziehung

$$q = q_1 \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\ln \frac{1}{1-x}} \right) \approx q_1 \left(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} \right) \dots \dots 45)$$

Der Wirkungsgrad wird also größer, als bei konstantem Lastmoment; jedoch ist der Unterschied nicht groß, denn für den Nebenschlußmotor erhält die Größe x mit $\beta = 0$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$, $\eta = 0,9$ den Wert 0,63 und das ergibt eine Steigerung des Wirkungsgrades um etwa 14%. Wir erhalten also $q = 0,425 \cdot 1,14 = 0,485$. Beim Hauptschlußmotor

hat x einen kleineren Wert und daher wird auch der Wirkungsgrad um weniger vergrößert.

Ein weiterer für die Praxis wichtiger Fall ist der, daß das Lastmoment quadratisch mit der Geschwindigkeit wächst, wie dies bei dem Antrieb von Ventilatoren und Propellern vorkommt. In diesem Falle müssen wir

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

setzen und hiermit erhalten wir durch Integration von Gl. 36)

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{p} \cdot \mathfrak{T}_g \left(\sqrt{p} \frac{t}{T} \right),$$

woraus wir wieder mit $\omega = \omega_n'$ die Anlaßzeit t_s berechnen können. Die Gleichung der Widerstandskurve heißt daher in diesem Falle für den

$$\text{Nebenschlußmotor } \frac{r}{r_1} = 1 - \sqrt{\varepsilon} \eta \mathfrak{T}_g \sqrt{\varepsilon} \frac{t}{T}, \quad \dots \quad 46a)$$

$$\text{Hauptschlußmotor } \frac{r}{r_1} = 1 - \varepsilon^2 \eta \mathfrak{T}_g \varepsilon \frac{t}{T} \quad \dots \quad 46b)$$

Auch hier wollen wir uns die Berechnung der verschiedenen Energiemengen ersparen und nur den Wirkungsgrad bestimmen. Die auftretenden Integrale sind in allen Fällen lösbar und in den Integralsammlungen gegeben. Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\omega_n'}{\omega_n}$$

und führen den Wirkungsgrad ϱ_1 für konstantes Lastmoment ein, so ergibt die Ausrechnung:

$$\varrho = \varrho_1 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1-x^2)^{-1}}{\mathfrak{A}r \mathfrak{T}_g x} \approx \varrho_1 \left(1 + \frac{x^2}{6} \right) \quad \dots \quad 47)$$

Für unseren Nebenschlußmotor erhalten wir wieder mit $\varepsilon = \frac{3}{2}$ und $\eta = 0,9$ für x den Wert 0,772, und dies ergibt eine Vergrößerung des Wirkungsgrades um etwa 13%; also wird der Wirkungsgrad $\varrho = 0,425 \cdot 1,13 = 0,480$. Er ist um wenigstens kleiner, als wenn das Lastmoment proportional der Geschwindigkeit ansteigt.

Zusammenfassung. Es wird die Anlaßzeit und die erforderliche Wärmekapazität des Anlaßwiderstandes für Nebenschluß- und Hauptschlußmotoren berechnet. Bei den letzteren wird Proportionalität zwischen Kraftfluß und Strom vorausgesetzt, um den Unterschied gegen den Nebenschlußmotor deutlicher zu machen. Die Untersuchungen werden für Stufenanlasser durchgeführt und durch Grenzübergang die entsprechenden Größen für stetiges Anlassen bestimmt. In Zahlenbeispielen wird der Unterschied im Verhalten der beiden Motoren gezeigt und die Größenordnung der Anlaßzeit und der Kapazität berechnet. Für die letztere wird außerdem ein Vergleich der abgeleiteten Formel mit der sonst üblichen gezogen. Ferner werden die beim Anlassen auftretenden Energiemengen graphisch dargestellt, berechnet und miteinander verglichen. Schließlich wird der Anlaßwirkungsgrad abgeleitet und für verschiedene Fälle zahlenmäßig berechnet.