loren hat. Eine Aufzählung von *Stahls* Arbeiten sowie der auf seine Veranlassung entstandenen Dissertationen hat *W. Detmer*, sein langjähriger Jenaer Amtsgenosse und Freund, in der Einleitung zu der Festschrift gegeben, welche Fachgenossen, Freunde und Schüler *Stahl* zu seinem 70. Geburtstag (21. Juni 1918) gewidmet haben.

Philosophische Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von *Hans Reichenbach*, Berlin-Lichterfelde.

I.

Gesetzlichkeit und Kausalität.

Die Unsicherheit, mit der über die Geltung der Wahrscheinlichkeitsgesetze geurteilt wird, liegt darin begründet, daß diese Gesetze einen Widerspruch zu dem anerkannten Erkenntnisverfahren der Physik zu enthalten scheinen. Es ist die grundsätzliche Methode der *Physik*, das beobachtbare Geschehen auf Abhängigkeiten zurückzuführen, das gegenwärtige Geschehen als Wirkung eines früheren und als Ursache eines folgenden darzustellen; die Kausalketten, die dabei entstehen, gelten als eindeutig-bestimmte Funktionalzusammenhänge, und auch dort, wo es nicht gelingt, derartige Kausalketten aufzufinden, wird an ihrer prinzipiellen Existenz und schließlichen Auffindbarkeit festgehalten. Im Gegensatz dazu macht die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* Aussagen über nicht-kausale Zusammenhänge, ja sie fordert sogar als Bedingung ihrer Gültigkeit die kausale Unabhängigkeit ihrer Objekte. Für das Würfelspiel z. B. wird vorausgesetzt, daß die einzelnen Würfe voneinander unabhängig erfolgen, die Kausalkette, die für jeden einzelnen Wurf zu seinem Resultat führt, wird gänzlich unbeachtet gelassen, und die entstehende Verteilung der Würfe wird ausdrücklich als eine Verteilung des Zufalls, ein „Spiel“ im Gegensatz zu dem kausal gebundenen Ablauf anderer Naturereignisse bezeichnet. So scheint es, als ob Wahrscheinlichkeit und Kausalität einander ausschließen, als ob sie die Fragestellung „Zufall oder Gesetz?“ in die Physik hineinragen und den Physiker zwingen, für das eine oder das andere sich zu entscheiden.

Es muß deshalb zu Beginn unserer Untersuchung darauf hingewiesen werden, daß eine derartige Alternative zu Unrecht konstruiert wird, daß ein unvereinbarer Gegensatz zwischen diesen Begriffen tatsächlich nicht besteht. Wenn auch die *kausale Abhängigkeit* methodische Voraussetzung der Physik ist, so ist sie doch keineswegs die einzig mögliche Form eines funktionellen Abhängigkeitsverhältnisses. Die Relation: „wenn *A* ist, so ist *B*“ besagt noch nicht, daß *A* die Ursache von *B* ist; der Ursachebegriff setzt vielmehr (außer dem zeitlichen Folgeverhältnis) noch quantitative Beziehungen voraus, derart, daß einem quantitativ bestimmten *A* stets ein quantitativ bestimmtes *B* entspricht. Wird z. B. die Anziehungs-

kraft der Sonne als die Ursache der Planetenbewegung bezeichnet, so bedeutet dies, daß die Größe dieser Kraft die Größen der Bewegung quantitativ bestimmt. Es sind aber noch andere funktionelle Relationen denkbar, z. B. „wenn *A* in einem Intervall α variiert, variiert *B* in dem Intervall β “; dafür braucht keineswegs vorausgesetzt zu werden, daß jedem Wert *A* innerhalb des Intervalls α ein bestimmter Wert *B* innerhalb des Intervalls β korrespondiert. Auch eine Aussage dieser Art würde ein Naturgesetz darstellen können, das allerdings kein Kausalgesetz wäre. Würde man neben den Kausalgesetzen noch Naturgesetze dieser zweiten Art formulieren, so wäre das kein Widerspruch. Denn die zweite Art der Gesetzlichkeit schließt ja die erste nicht aus; es ist z. B. durchaus möglich, daß innerhalb der Intervalle jedem bestimmten *A* ein bestimmtes *B* entspricht. Es gibt auch andere Möglichkeiten, z. B. daß zwischen *A* und *B* ein Kausalverhältnis nicht besteht, daß *A* eine ganz andere Größe *C* kausal korrespondiert und *B* eine andere Größe *D*, die beide von diesem Gesetz nicht berührt werden. Solange das Gesetz der zweiten Art die erste (kausale) Abhängigkeit nicht ausdrücklich ausschließt, solange auf jede widersprechende Voraussetzung über die Abhängigkeit innerhalb des Intervalls verzichtet wird, sind die beiden Arten der Gesetzlichkeit vereinbar.

Wenn also die Gesetze der Wahrscheinlichkeit von *anderer Art* sind als die Kausalgesetze, so folgt aus dieser Tatsache allein noch nicht, daß sie in einen *Widerspruch* zur Kausalität treten. Gesetzlichkeit ist ein allgemeinerer Begriff als Kausalität. Daß beim Würfeln ein Gesetz existiert, welches die Verteilung der Würfe bestimmt, ohne jedoch dem einzelnen Wurf eine Ursache zuzuordnen, ergibt keinen Widerspruch zum Kausalprinzip. Denn das Gesetz läßt es ganz offen, ähnlich wie wir es für die innerhalb des Intervalls variierende Größe formuliert haben, welche Größe dem einzelnen Wurf als Ursache zugeordnet werden muß. Im Gegenteil zweifelt niemand daran, daß für den Einzelwurf eine Kausalkette aufzeigbar ist, die gerade zu diesem bestimmten Resultat führen mußte; aber das wiederum ändert nichts an der Tatsache, daß die Gesamtheit der Würfe einem Verteilungsgesetz unterliegt. Man kann die Wahrscheinlichkeitsgesetze in dieser Form ausdrücken: „Wenn gewisse Bedingungen in bestimmten Grenzen variieren (z. B. die Fallzeit, die Rotationsgeschwindigkeit des Würfels usw.), so variieren andere Größen“ (die geworfenen Würfelseiten) innerhalb bestimmter Grenzen nach einem besonderen Gesetz.“ Der Verzicht auf die Aussage der Kausalität, der hierin liegt, bedeutet nicht ihre Negierung.

Es genügt allerdings nicht, zu zeigen, daß neben der Kausalgesetzlichkeit noch andere Gesetzlichkeiten der Natur möglich sind, die ihr nicht widersprechen. Es muß noch gezeigt werden, daß in der *speziellen Form* der Wahrscheinlichkeitsbeziehung, in dem „besonderen Gesetz“

der obigen Definition, kein Widerspruch zum Kausalprinzip enthalten ist. Wir sind, um dies durchzuführen, in einer glücklichen Lage; denn wir haben bereits in einer früheren Untersuchung¹⁾ die physikalischen Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgedeckt und kennen jenes besondere Gesetz. Wir konnten unter den Voraussetzungen diejenigen abtrennen, die gewöhnliche physikalische Erfahrungsergebnisse sind und im einzelnen mit den Methoden der wissenschaftlichen Beobachtung kontrolliert werden können; hierher gehören die räumliche Gleichheit gewisser Stücke (z. B. der Sektoren im Roulettespiel), die Unabhängigkeit der Einzelvorgänge (z. B. läßt es sich sehr einfach feststellen, ob zwei fallende Steine einander beeinflussen oder nicht), das Auftreten einer größeren Zahl störender Ursachen (in der Fehlertheorie). Wir konnten zeigen, daß neben diesen eine Voraussetzung übrig blieb, die nicht mit anderen physikalischen Methoden geprüft werden kann, die eine Gesetzmäßigkeit der Natur bedeutet und als Gesetz der Wahrscheinlichkeit angesehen werden kann. Wir formulierten sie als Hypothese der Wahrscheinlichkeitsfunktion, und da sie das eigentlich Problematische der Theorie enthält, brauchen wir nur diese Hypothese zu kritisieren, um zu einem Urteil über die ganze Theorie zu kommen. Wir werden die Untersuchung über die Widerspruchlosigkeit dieser Hypothese gegenüber dem Kausalprinzip sogleich durchführen, um damit die Möglichkeit der Wahrscheinlichkeitsgesetze darzutun. Erst danach werden wir dazu übergehen, auch ihre Notwendigkeit für die physikalische Erkenntnis aufzuzeigen.

II.

Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit in der Form der Hypothese von der Wahrscheinlichkeitsfunktion enthält keinen Widerspruch zum Kausalgesetz.

Was bedeutet das Prinzip der Wahrscheinlichkeitsfunktion? Es besagt (wir sprechen hier der Einfachheit halber nur von einer Veränderlichen und werden die Betrachtungen erst nachher auf mehrere Veränderliche ausdehnen, wodurch nichts Grundsätzliches geändert wird): wird eine physikalische Größe x unter einer gewissen Variation der Anfangsbedingungen wiederholt realisiert, so läßt sich die Häufigkeit ihrer Einzelwerte einer stetigen Kurve $\varphi(x)$ zuordnen durch den Ausdruck

$$\left(\frac{h}{N}\right)_{\lim N=\infty} = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

¹⁾ Reichenbach, Die physikalischen Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Naturwissenschaften 8, 46, 1920. Diese Arbeit entwickelt die axiomatischen Grundlagen der folgenden philosophischen Untersuchung; ihre Resultate werden deshalb vorausgesetzt werden.

Hierin begrenzen a bis b ein Intervall der Größe x , und h bedeutet die Anzahl der in das Intervall fallenden Werte und N die Gesamtzahl der Wiederholungen.

Problematisch ist zunächst, was unter Wiederholung „derselben Größe“ zu verstehen ist. Physikalisch realisierbar ist immer nur ein Vorgang; und so läßt sich auch nur ein Vorgang, ein zeitlicher Ablauf physikalischer Veränderungen, wiederholt verwirklichen. Die Beschreibung eines Vorganges vollziehen wir jedoch dadurch, daß wir die ihn bestimmenden Größen, Parameter, herausgreifen und deren Veränderung als Funktion der Zeit oder ihrer gegenseitigen Werte darstellen. So sind z. B. die den rotierenden Roulettezeiger bestimmenden Parameter außer dem (in Vielfachen von 360° gezählten) Umdrehungswinkel Ω noch die Länge des Zeigers, seine Masse, seine Reibung usw. Jeden dieser Parameter können wir als durch den wiederholten Vorgang wiederholt realisierte Größe betrachten, von jedem ließe sich eine der genannten Formel entsprechende Aussage machen. Wenn wir im Roulettespiel gerade den Umdrehungswinkel Ω herausgreifen, so geschieht dies lediglich aus Zweckmäßigkeitsgründen; diese Größe ist anschaulich sichtbar zu verfolgen, ihre Einteilung in Intervalle ist durch eine einfache geometrische Zeichnung, die farbigen Sektoren, unmittelbar gegeben und vermittelt eine anschauliche Darstellung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes¹⁾. Die Wahl der betrachteten Größe bietet also keine grundsätzlichen Schwierigkeiten; aber es kommt eine weitere Unbestimmtheit hinzu. Mit welchem Recht können wir eigentlich den Umdrehungswinkel Ω des Roulettezeigers als „dieselbe“ Größe bezeichnen, die wiederholt dargestellt wird? Wir wissen, daß die einzelnen Zahlenwerte dieses Winkels jedesmal verschieden sind. Allerdings können wir sagen, daß es stets dieselben Größen sind, die diesen Winkel bestimmen: die drehende Anfangskraft, die Masse des Zeigers, die Reibung der Achse. Aber das verschiebt nur das Problem: mit welchem Recht sind dies „dieselben“ Größen, wo doch auch ihr Zahlenwert schwanken muß, wenn verschiedene Werte Ω entstehen sollen? Denken wir uns, um von der Schwankungen der menschlichen Kraft, die der Zeiger dreht, unabhängig zu werden, einen Apparat konstruiert, der den Antrieb besorgt; er sei mit der größten Präzision ausgeführt, so daß wir die bestimmenden Größen so konstant wie nur möglich halten können. Denken wir uns sogar diesen Apparat durch einen Ingenieur von metaphysischer Geschicklichkeit bedient, so daß die genannten Größen wirklich jedesmal genau denselben Wert haben — niemand wird zweifeln, daß dennoch eine Variation des Winkels Ω eintreten wird. Das liegt daran, daß diese 3 Größen den Drehungsvorgang ja gar nicht allein bestimmen. Es gibt immer noch andere mitbestimmende Fak-

¹⁾ Vgl. S. 48 des genannten früheren Aufsatzes.

toren; der Luftwiderstand wird z. B. von Einfluß sein; wollte man ihn konstant halten, so müßten Druck, Temperatur und Feuchtigkeit konstant gehalten werden. Und gelänge selbst dies noch, gäbe es weitere Faktoren von noch kleinerem Einfluß, die Erschütterungen der Apparatur, die Anziehung benachbarter Massen — kurz, es ist ganz unmöglich, *sämtliche* Bedingungen quantitativ gleich zu reproduzieren. Wir wollen die Summe dieser unendlich vielen Faktoren den *irrationalen Rest der Bestimmungsstücke* nennen, ihre einzelnen Komponenten mögen als *Restfaktoren* bezeichnet werden. Danach wird es unmöglich sein, Ω jedesmal denselben Wert zu geben. Wenn es deshalb einen Sinn haben soll, von „demselben“ Winkel Ω zu reden, so darf diese Identität nicht durch quantitative Gleichheit bestimmt sein. Wir werden vielmehr angeben, daß, solange die Schwankungen der Apparatur innerhalb gewisser kleiner Grenzen liegen, der entstehende Drehungswinkel „derselbe“ sein soll, und in diesem Sinne können wir auch von Variationen „derselben“ Größe reden. Es ist dabei nicht gesagt, daß diese Schwankungen stets unter der Messungsgrenze liegen müssen; z. B. sind die Änderungen des Drehungswinkels Ω durchaus meßbar. Diese Definition hat allerdings nur vorläufigen Charakter und wird später durch eine genauere ersetzt werden.

Wir werden gleichzeitig dazu geführt, *was wir unter der Variation der Anfangsbedingungen zu verstehen haben*, die in obiger Definition erwähnt wurde. Es sind Schwankungen, die aus der Gesamtheit gemessener und ungemessener Bestimmungsstücke hervorgehen, die also stets deren irrationalen Rest enthalten. Wenn wir nach der Hypothese fordern, daß Ω durch eine stetige Funktion bestimmte Werte annimmt, so bedeutet dies, da Ω ein Produkt aller gemessenen und ungemessenen Faktoren darstellt, eine entsprechende Annahme über das *Zusammenwirken* sämtlicher unendlich vielen Bestimmungsstücke, daß nämlich dieses Zusammenwirken in eigentümlicher Weise eine *stetige* Verteilung der Größenwerte Ω erzeugt. Wir finden daher, daß die Hypothese der Wahrscheinlichkeitsfunktion eine Annahme darstellt über den irrationalen Rest der bestimmenden Faktoren einer Größe.

Diese Auffassung zeigt deutlich, daß ein Widerspruch zum Kausalprinzip nicht besteht. Dies bezieht sich ja gerade auf die *gemessenen* einzelnen Bestimmungsstücke, deren eindeutige Abhängigkeit es fordert; es kann über den *irrationalen Rest* nur die Aussage machen, daß er sich bei fortschreitender Analyse mehr und mehr in einzelne kausalabhängige Bestimmungsstücke auflösen muß, ohne doch je erschöpft zu sein. Die Wahrscheinlichkeitshypothese ist aber eine Aussage über die *Summe* sämtlicher Restfaktoren — und dies ist eine Frage, für die das Kausalprinzip nicht mehr zuständig ist. Es sind tatsächlich Aussagen über ganz verschiedene

Dinge, die diese beiden Prinzipien enthalten; beide können gleichzeitig Gesetze der Natur darstellen, ohne einander zu widersprechen.

Auch in der Unabhängigkeit der Einzelvorgänge, die von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefordert wird, liegt ein Widerspruch zum Kausalprinzip nicht enthalten. Wir sahen bereits in der genannten früheren Untersuchung, daß man richtiger nicht von Unabhängigkeit, sondern von verschwindendem Abhängigkeitsgrad zu reden hat, und dieser Begriff ist mit kausaler Abhängigkeit durchaus vereinbar. Unabhängigkeit zweier Vorgänge in diesem Sinne liegt vor, wenn die einen Vorgang bestimmenden Größen (Parameter) sich *nicht wesentlich* ändern, falls die den *anderen* Vorgang bestimmenden Größen andere Werte annehmen. So nennt man die Lage des Brennpunkts einer Linse unabhängig von der Lichtstärke, obgleich hier noch eine gewisse Abhängigkeit besteht, das von der Linse absorbierte Licht wird je nach seiner Stärke das Glas erwärmen, seine geometrischen Dimensionen verändern und dadurch den Brennpunkt verschieben; aber großen Änderungen der Lichtstärke entsprechen so geringe Änderungen der Brennpunktslage, daß man *praktisch* von Unabhängigkeit spricht. Auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung genügen derartig geringe Abhängigkeitsgrade. So sind z. B. zwei nebeneinander niederfallende Würfel als praktisch unabhängig zu betrachten, obgleich der von einem Würfel hervorgerufene Luftzug den anderen in seiner Bahn beeinflusst.

In diesem Zusammenhang sei noch über den Begriff des *Zufalls* eine Bemerkung gemacht. Man nennt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie sie z. B. das Würfeln ergibt, auch ein Werk des Zufalls, weil sie mit der kausalen Bestimmtheit der einzelnen Würfe nichts zu tun hat. Nach unserer Erklärung würde die Natur des Zufalls wesentlich in der Eigentümlichkeit der physikalischen Restfaktoren zu suchen sein, eine stetige Verteilung zu erzeugen. Damit diese Stetigkeit jene besondere Regelmäßigkeit der Verteilung einzelner Fälle erzeugt, muß, wie wir gesehen haben, noch eine Teilung in kleine Intervalle und die Klassifikation in einige Scharen hinzukommen⁴⁾; wir erinnern daran, daß einem kleinen Zuwachs $\Delta\Omega$ des Drehungswinkels im Roulette-spiel bereits ein neuer farbiger Sektor entspricht. Danach sind die Bedingungen des Zufalls gegeben, wenn *kleine* Änderungen der einen Größe *große* Änderungen anderer Größen zur Folge haben. (Kleine Änderungen von Ω haben sprunghafte Änderungen der getroffenen Farbe zur Folge, oder ein fallender Würfel macht eine große Zahl Umdrehungen mehr, wenn sich die Zeit des Niederfallens nur wenig vergrößert.) Man bemerkt den Gegensatz dieser Formulierung zur Definition der Unabhängigkeit; dort hatten umgekehrt große Änderungen einer Größe nur kleine

⁴⁾ Vgl. die Figur 1 in der genannten vorausgeschickten Untersuchung.

Änderungen einer anderen, zur Folge (z. B. große Änderungen der Lichtintensität erzeugen nur verschwindende Änderungen der Brennpunktslage). Dies ist auffällig, weil Zufall als Gegensatz zu kausaler Bestimmtheit auch häufig als Unabhängigkeit definiert wird. Es gibt hier offenbar 2 Möglichkeiten des Grenzübergangs; der durch die geringsten Abhängigkeitsgrade führt zum Begriff der Unabhängigkeit, der durch die höchsten Abhängigkeitsgrade zum Begriff des Zufalls. Beide, Zufall wie Unabhängigkeit, stellen Idealisierungen vor, die von der Wirklichkeit nicht erfüllt werden können, weil sie in ihrer Idee dem Kausalprinzip widersprechen. Als Grenzbegriffe haben sie einen Sinn, weil alle beliebigen Annäherungen an sie möglich sind; aber solange man nicht den Weg aufzeigt, der zu ihrer Grenze führt, bleibt die große Verschiedenheit dieser Begriffe unentdeckt.

III.

Das Prinzip der gesetzmäßigen Verteilung als notwendige Voraussetzung physikalischer Erkenntnis.

Nachdem wir gezeigt haben, daß das Gesetz der Wahrscheinlichkeit, in der Form der Hypothese der Wahrscheinlichkeitsfunktion, keinen Widerspruch zum Kausalgesetz enthält, neben diesem also *möglich* ist, soll jetzt seine *Notwendigkeit* für den physikalischen Erkenntnisbegriff in einem ganz anderen Zusammenhange dargetan werden. Wir müssen dazu auf den *Sinn des physikalischen Urteils* zurückgehen.

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Erkenntnisurteilen. In der ersten Art wird der Gegenstand als gedankliche Fiktion gesetzt, und Fiktionen werden miteinander durch das Urteil verbunden. Hierhin gehören die mathematischen Urteile. Ihre Gegenstände sind Fiktionen, künstliche Gebilde des Denkens; sie sind nicht wirkliche Gegenstände wie die erfahrbaren Dinge, die außerhalb des Denkens existieren, sondern gebildet erst durch gedankliche Konstruktionen, und alle Aussagen über sie bilden Relationen, die nur innerhalb des Denkens ihren Sinn haben. Wesentlich für diese Urteile ist daher, daß ihr Gegenstand genau bestimmt ist, durch die gedankliche Konstruktion erschöpfend definiert ist; die Relation, die in dem Urteil ausgesagt ist, kann daher alle Eigenschaften des Gegenstandes berücksichtigen und den Charakter unumstößlicher Gültigkeit erlangen. Der zwingende Charakter des mathematischen Urteils ist allgemein anerkannt; er liegt darin begründet, daß der Urteilsgegenstand gesetzt ist, und daß die Setzung durch das Denken eine erschöpfende Definition gestattet. Wir werden diese Klasse von Urteilen als *Setzungsurteile* bezeichnen.

Ihnen gegenüber stehen alle Urteile, deren Gegenstand in der natürlichen Wirklichkeit vorhanden ist. Zu ihnen gehören die physikalischen

Urteile. Das Wirkliche ist etwas grundsätzlich anderes als das Gedachte, etwas, das nicht weiter definiert werden kann — denn, das hieße wieder: gedacht —, das in seiner eigentümlichen Art nur erlebt werden kann. Wir erhalten von der Wirklichkeit außerhalb unseres Ich Kunde durch die Wahrnehmung der Sinne, und es ist daher charakteristisch für die natürlichen Gegenstände, daß sie auf Grund irgendeiner Wahrnehmung in unsern Begriffskreis gelangen. Dieser Zusammenhang kann auch indirekt sein; so hat noch niemand die uns abgewandte Seite des Mondes gesehen, aber ihre Existenz gilt als gesichert, weil sie mit anderen Wahrnehmungen — nämlich der der sichtbaren Seite — in einen gedanklichen Zusammenhang gebracht wird. Wir bemerken daran allerdings, daß in Aussagen über die Wirklichkeit gedankliche Relationen eingehen, und es muß näher untersucht werden, welcher Art dieser Zusammenhang ist; aber es bleibt bestehen, daß der Gegenstand selbst nicht eine Fiktion des Denkens, sondern etwas Denkfremdes, eine Gegebenheit darstellt. Wir werden diese zweite Klasse von Urteilen als *Wirklichkeitsurteile* bezeichnen.

Dem scheint zu widersprechen, daß man auch physikalische Urteile in die Form eines Bedingungssatzes kleiden kann: wenn die Sonne am Himmel steht, ist es warm. Aber es wäre ein Irrtum, zu glauben, daß mit der Aufstellung der Voraussetzung auch der Gegenstand gesetzt sei. Gesetzt ist nur die Annahme seiner Existenz; der Gegenstand Sonne bleibt dabei jener anschaulich aufzeigbare leuchtende Körper, den wir wahrnehmen können; er ist nicht durch die Setzung definiert, wie der mathematische Gegenstand. Sagen wir: „Wenn ein Peripheriewinkel auf dem Durchmesser steht, ist er ein rechter Winkel,“ so ist durch den Vordersatz der Winkel definiert; in ihm ist zu dem Begriff Peripheriewinkel, der selbst wieder durch eine Reihe solcher Sätze definiert ist¹⁾, noch ein Merkmal hinzugefügt, das mit den anderen zusammen den Gegenstand erschöpfend definiert. In dem genannten Urteil über die Sonne dagegen liegt in dem Vordersatz keine Bestimmung des Gegenstandes ausgesprochen, sondern die hypothetische Formulierung drückt lediglich den Gedanken aus, daß das Wirklichwerden des Nachsatzes an das Wirklichwerden des Vordersatzes gebunden ist. In beiden Urteilen bedeutet also die hypothetische Form etwas ganz anderes, und man darf sich nicht durch die *grammatische* Gleichheit irreführen lassen.

Man könnte versuchen, den physikalischen Gegenstand ebenfalls zu definieren, wie den mathematischen, indem man seine Bestimmungsstücke aufführt. Den Erdball etwa könnte man definieren als eine Kugel von bestimmter Abplattung; aber man kann den wirklichen Erdbal-

¹⁾ Vgl. hierzu die sehr klaren Ausführungen über implizite Definitionen in *Schlick*, Allgemeine Erkenntnislehre, S. 30. (Verlag Springer.)

damit nicht erschöpfen, denn dessen Form ist viel komplizierter, auch einer zeitlichen Änderung unterworfen, und man müßte sämtliche unendlich vielen Naturgesetze dazu aufführen, die dabei eine Rolle spielen. Das ist aber unmöglich. Würde man sich für die Definition auf die wesentlichen Merkmale beschränken und diese Definition in das Urteil einsetzen, würde man etwa das Urteil „die Erde erteilt den Körpern an ihrer Oberfläche die Beschleunigung 981“ umformen in das Urteil „eine Kugel von der bestimmten Masse m und dem bestimmten Radius r erteilt den Körpern an ihrer Oberfläche die Beschleunigung 981“, so ginge das Eigentümliche des physikalischen Urteils verloren, und der Satz wäre auf ein mathematisches Urteil reduziert. Wir haben immer nur die Wahl: entweder wir definieren die Gegenstände erschöpfend durch Bestimmungsstücke — dann wissen wir nichts über ihr Vorkommen in der Wirklichkeit —, oder wir verstehen darunter jene nur anschaulich aufzeigbaren physikalischen Dinge — dann verliert das Urteil den zwingenden Charakter des Mathematischen.

Dennoch benutzt die Physik ein ähnliches Verfahren. Wir wissen ja, daß sie zur Erklärung der Anziehungskraft der Erde den Satz über das Potential einer Kugel benutzt. Aber das Neue an ihrer Darstellung besteht nicht in der mathematischen Relation über das Kugelpotential, sondern darin, daß sie diese bestimmte mathematische Relation auf die *wirkliche*, natürliche Erde *anwendet*; dies ist das eigentlich Physikalische in ihren Sätzen. Sie vollzieht eine Zuordnung von mathematischen Relationen zu sinnlich gegebenen Gegenständen; darin besteht ihr Erkenntnisverfahren. Allerdings darf man sich diese Zuordnung nicht zu einfach vorstellen, als ob etwa die mathematische Kugel der Erdkugel zugeordnet würde. In dem Ausdruck Erdkugel ist die Zuordnung bereits vollzogen; die Erde ist letzten Endes auch nur eine Summe von sinnlichen Eindrücken, ein anschauliches Etwas, und diesem nur aufzeigbaren „dies da“ wird die mathematische Kugel zugeordnet. Darin besteht die physikalische Erkenntnis, daß in das Durcheinander der Wahrnehmungen eine bestimmte mathematische Struktur hineingedacht wird. Das, was man gewöhnlich physikalischen Gegenstand nennt, ist bereits eine solche zugeordnete mathematische Struktur; man muß sich klar sein, daß, wenn auch alle Sätze über physikalische Vorgänge mathematische Relationen zwischen verschiedenen mathematischen Strukturen sind, das eigentlich Physikalische daran immer nur bleibt, daß der dadurch gebildete mathematische Komplex bestimmten Wahrnehmungen zugeordnet ist. Die Gleichungssysteme der Physik stellen derartige Zuordnungen vor. So ist das System der Maxwell'schen Gleichungen den wirklichen Vorgängen zugeordnet, die wir mit dem Namen „elektrisch“ belegen, oder das System der Einsteinschen Gra-

vitationsgleichungen den wirklichen Vorgängen, die wir „mechanisch“ nennen.

Warum müssen wir nun gerade diese bestimmten Gleichungen diesen bestimmten anschaulichen Vorgängen zuordnen? Wir wissen, daß wir den Vorgang doch nicht durch die Gleichungen erschöpfen können. Warum wählen wir also nicht beliebige andere Gleichungen? Die Antwort lautet, daß es noch eine eigentümliche Tatsache gibt: daß sich nämlich die wirklichen Dinge *näherungsweise* verhalten wie die zugeordneten mathematischen Fiktionen. Obgleich die Erde keine Kugel ist, ist doch die für die Kugel berechnete Beschleunigung nahezu gleich der auf der Erde gemessenen. Dieses eigentümliche Faktum bildet die Basis aller physikalischen Urteile.

Näherung beruht auf einem Vergleich von Zahlen. Wesentlich für das physikalische Urteil ist darum, daß es Zahlen definiert, deren näherungsweise Geltung gemessen werden kann. Das scheint der gewöhnlichen Darstellung zu widersprechen, nach der die Physik Funktionalzusammenhänge aufsucht, nach der also nicht der Wert einer Größe, sondern das Gesetz ihrer Veränderung mit einer anderen Größe die physikalische Erkenntnis darstellt. So könnte man argumentieren, daß z. B. der Wert der Erdbeschleunigung $g = 981$ keine physikalische Erkenntnis bedeutet, sondern erst das Gesetz, das g als Funktion des Radius darstellt, in dem 981 nur ein Spezialwert ist. Es ist richtig, daß dieses Gesetz eine *kausale* Erkenntnis darstellt, denn wir haben schon früher konstatiert, daß der Sinn der *kausalen* Gesetzmäßigkeit in der quantitativen Abhängigkeit von Größen besteht. In jeder Funktion aber kommen gewisse *Konstanten* vor, und diese müssen zahlenmäßig bestimmt sein, wenn die Funktion definiert, wenn das Gesetz einen bestimmten Sinn haben soll. In der Funktion, die g in Abhängigkeit vom Erdradius darstellt, tritt die Gravitationskonstante k auf; diese muß zahlenmäßig genannt werden können, wenn das Kausalgesetz über g einen bestimmten definierten Sinn haben soll. Darum kann man die Bestimmung zahlenmäßiger Konstanten nicht außerhalb der eigentlichen Physik setzen; sie gehört ebenso zur Darstellung der Kausalgesetze, wie die Ermittlung der funktionellen Form. Auch die Größe g selbst spielt die Rolle solch einer Gesetzeskonstanten; in dem Fallgesetz $s = \frac{g}{2} t^2$ hat sie genau dieselbe Stellung, wie k in der Newtonschen Gravitationsformel. Ihr Zahlenwert muß bestimmt sein, wenn das Fallgesetz das wirkliche Verhalten der fallenden Körper darstellen soll.

Man kann diesen Gedanken so ausdrücken, daß das physikalische Urteil den Gegenständen der Wirklichkeit zweierlei zuordnet: erstens eine funktionelle Form, z. B. den fallenden Körpern die Form $s = \frac{g}{2} t^2$, und zweitens bestimmte Zahlen-

werte, z. B. $g = 981$. Daß eine funktionelle Form existiert, garantiert die Kausalität; kann sie aber auch garantieren, daß bestimmte Zahlenwerte für die Gruppe von Gegenständen existieren?

Es scheint, als ob sie auch dies vermag. Denn sie versucht, den bestimmten Zahlwert zu rechtefertigen, indem sie ihn wieder als kausal bestimmt darstellt, indem sie ihn selbst wieder zur Funktion anderer Größen macht. So stellt sie g als bestimmt durch den Wert des Erdradius dar; so löst sie auch die Gravitationskonstante k wieder in eine Funktion auf, indem sie in den allgemeineren Einsteinschen Gravitationsgleichungen diejenigen speziellen Umstände aufzeigt, die k gerade den Newtonschen Wert verleihen. In der Tat besteht darin das Erweiterungsverfahren der Erkenntnis, das die Kausalität benutzt. Aber wir müssen auf Grund der Überlegungen des vorigen Abschnittes erklären, daß das Kausalprinzip nicht hinreichend ist, um die bestimmte Größe spezieller Zahlwerte zu begründen. Wir zeigten dort, daß die Kausalität immer nur *einzelne* Bestimmungsfaktoren aufzeigen kann, daß aber in dem bestimmten Größenwert stets die Summe *unendlich vieler* Einflüsse enthalten ist, und gerade über diese Summe macht die Kausalität keine Angabe. Es wäre mit dem Kausalgesetz durchaus vereinbar, daß diese Summe beliebig große Werte annimmt, und daß bei jeder Messung für die Konstanten ganz verschiedene Werte entstehen, denn die vernachlässigten Restfaktoren könnten jederzeit von Einfluß werden und, selbst wieder nach streng kausalen Gesetzen, die Größe verändern. Wenn z. B. die Sonne plötzlich große Massen in Richtung auf die Erde ausschleuderte, würde der Wert von g geändert; auch vorher ist in $g = 981$ der Wert der Sonnenmasse enthalten, aber dort erscheint diese Masse unter der Summe der sehr kleinen „störenden“ Einflüsse, die einen wesentlichen Einfluß auf g nicht haben. Wir könnten dann allerdings für die Änderung von g wieder eine kausale Erklärung anführen. Aber dies erklärt nicht, warum die plötzliche Vergrößerung der störenden Einflüsse im allgemeinen unterbleibt, warum wir also von diesen absehen können und den wirklichen Körpern an der Erdoberfläche die Zahl 981 zuordnen dürfen. Es hat aber, um dies noch einmal zu wiederholen, auch keinen Sinn, das Gesetz hypothetisch zu formulieren, indem man sagt: Wenn der Einfluß der störenden Faktoren klein bleibt, gilt das Fallgesetz und die Zahl $g = 981$. Denn damit reduziert man das physikalische Urteil auf ein mathematisches; die wirkliche Erde ist nicht eine Kugel vom Radius r und der Masse m , sondern das nur aufzeigbare „dies da“, das wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, und das in die Gesamtheit der Naturvorgänge eingeordnet ist.

Woher stammt also das Recht, mit dem wir bestimmten wirklichen Dingen bestimmte Zahlenwerte zuordnen? Aus dem Kausalprinzip stammt es nicht. Es muß noch ein zweites Prinzip hinzu-

kommen, das eine Hypothese über das Auftreten bestimmter Zahlwerte und damit über die Einwirkung der Restfaktoren enthält. Dieses Prinzip ist die Hypothese der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß diese Hypothese in der Tat eine Annahme über die Summe der Restfaktoren darstellt. Sie besagt nämlich, daß allerdings jeder Wert für diese Summe möglich ist — darin liegt die Widerspruchslösung zum Kausalprinzip —, daß aber ein Gesetz für die Häufigkeit der Größenwerte existiert, daß einzelne Werte, die normalen Werte, sehr häufig vorkommen, und andere, die Extremwerte, verschwindend selten. In dem asymptotischen Verlauf der Kurve an ihren beiden Enden ist diese Aussage enthalten. Und die Hypothese besagt ferner, daß unendlich benachbarte Werte gleich häufig sind, daß man also jedem unendlich kleinen Intervall eine bestimmte relative Häufigkeit zuordnen kann; das war die Stetigkeitsforderung. Diese muß notwendig dazu kommen, denn sonst wäre das Gesetz nicht konstatierbar; wir können die Häufigkeit einzelner Zahlenpunkte nicht zählen, weil wir Größen als Zahlenpunkte nicht aufweisen, sondern nur in Grenzen einschließen können. Diese Hypothese ergibt eine geeignete Annahme über die Zahlenwerte der physikalischen Konstanten. Gäbe es eine restlos genaue Analyse der wirklichen Dinge, so müßte sich behaupten lassen (nach dem Kausalprinzip), daß der einmal bestimmte Größenwert sich zu jeder Zeit und an jedem Ort wiederfinden lassen müßte. Da die stetige Gleichheit des Größenwertes nicht behauptet werden kann, so ist die natürliche Verallgemeinerung, daß, wenn auch nicht *dieses*, so doch überhaupt ein *Gesetz* für seine Verteilung in Raum und Zeit existiert. Diese Annahme bedeutet das Prinzip der Wahrscheinlichkeitsfunktion; wir beachten dabei, daß es keine bestimmte Form für das Verteilungsgesetz vorschreibt, daß vielmehr Spezialformen, z. B. $f(x) = \text{konst.}$, aus der allgemeinen Voraussetzung und speziellen hinzukommenden Umständen erschlossen werden können. Das Prinzip folgt nicht aus dem Kausalprinzip, aber es widerspricht ihm auch nicht; es muß vielmehr zu dem Kausalprinzip hinzukommen, damit physikalische Erkenntnis als Zuordnung bestimmter Funktionalgesetze und Konstanten zu wirklichen Dingen überhaupt möglich ist.

Ein entsprechendes Gesetz gilt für die Häufigkeit von *Kombinationen* zweier Größenwerte; denn sind in einem Naturgesetz zwei oder mehr Konstanten enthalten, so muß, damit diese der betreffenden Gruppe wirklicher Dinge zugeordnet werden können, eine entsprechende Annahme über die Häufigkeit des Vorkommens dieser Kombination gemacht werden. So entsteht die Wahrscheinlichkeitsfunktion von mehreren Veränderlichen.

IV.

Die Parallelität von Kausalgesetzen und Wahrscheinlichkeitsgesetzen und die Unmöglichkeit ihrer empirischen Nachprüfung.

Wir haben damit die philosophische Stellung der Wahrscheinlichkeitsgesetze aufgezeigt; sie beruhen auf einem Erkenntnisprinzip, das dem der Kausalität durchaus parallel ist. Das Prinzip der gesetzmäßigen Verknüpfung alles Geschehens, welches die Kausalität darstellt, reicht zur Begründung der physikalischen Erkenntnis nicht aus. Es muß noch ein Prinzip hinzukommen, welches die Ereignisse gleichsam in der Querrichtung miteinander verbindet; dies ist das Prinzip der gesetzmäßigen Verteilung. Es läßt sich auch als Prinzip der Wahrscheinlichkeitsfunktion formulieren und ist identisch mit der Hypothese, die für die bekannten Wahrscheinlichkeitsmechanismen gemacht werden muß.

Von diesem Standpunkt aus löst sich auch eine Schwierigkeit, die uns zu Beginn unserer Untersuchungen unterlief. Wir warfen zu Anfang des Abschnitts II die Frage auf, mit welchem Recht wir eine physikalische Größe als dieselbe Größe in verschiedentlich wiederholten Vorgängen bezeichnen dürfen, wenn ihr Zahlwert doch jedesmal ein anderer ist. Wir begnügten uns dort mit der vorläufigen Antwort, daß die Abweichungen im Zahlwert innerhalb gewisser Grenzen liegen müssen; aber wir mußten weiterhin zugeben, daß auch sehr große Abweichungen gelegentlich möglich sind. Erst jetzt, nachdem wir die Stellung des Verteilungsprinzips zum physikalischen Erkenntnisbegriff dargestellt haben, sind wir in der Lage, eine genaue Antwort auf die Frage zu geben. Indem wir jetzt den geschilderten Zusammenhang umkehren, dürfen wir sagen, daß ein mathematischer Parameter dann ein und dieselbe physikalische Größe darstellt, wenn sich seine beobachteten Zahlwerte einer stetigen Verteilungsfunktion einfügen. Dies besagt, daß im allgemeinen die Abweichungen allerdings klein sind; es läßt aber auch gelegentliche große Abweichungen zu, wenn sie nur das Verteilungsschema nicht grundsätzlich stören. So löst sich das Identitätsproblem physikalischer Größen erst durch Einführung des Verteilungsgesetzes als Grundlage der wissenschaftlichen Einordnung.

Man kann die Frage aufwerfen, ob dieses Prinzip ein *Erfahrungsergebnis* zu nennen ist, in dem Sinne, in welchem wir die gewöhnlichen physikalischen Sätze als Produkte der Erfahrung betrachten. So ist z. B. das Energieprinzip ein Erfahrungsergebnis; Beobachtungen haben gelehrt, daß die physikalische Größe, die man Energie nennt, bei allen Vorgängen ihre Größe bewahrt. Das Gegenteil wäre auch denkbar: die Energie könnte z. B. auch dauernd wachsen; für eine andere physikalische Größe, die Entropie, gilt bekanntlich ein derartiges Gesetz. Ähnlich hat

man auch das Kausalprinzip als Resultat der Erfahrung hinstellen versucht. Man hat gesagt, alle unsere Beobachtungen lehren, daß jedes Geschehen seine Ursache und seine Wirkung hat, und weil dies in so vielen Fällen festgestellt ist, sei das allgemeine Gesetz der Kausalität aufgestellt worden. Jedenfalls sei Kausalität nicht *logisch notwendig*, es sei ebenso gut *denkbar*, daß dasselbe Geschehen verschiedene Wirkungen habe. Dies muß zweifellos zugegeben werden: *logisch notwendig* ist das Kausalprinzip nicht, und ebenso wenig ist das Verteilungsprinzip *logisch notwendig*, denn denkbar wäre es allerdings, daß das Naturgeschehen ganz regellos verlief. Aber es ist ein Irrtum, zu glauben, daß mit den beiden Kategorien „logisch notwendig“ und „empirisch“ die philosophischen Möglichkeiten erschöpft wären. Es ist das große Verdienst der *Kantschen Philosophie*, eine andere Fragestellung in das Erkenntnisproblem hineingetragen zu haben. Kant fragt: Welche Prinzipien sind dadurch ausgezeichnet, daß sie einen notwendigen Bestandteil der Naturerkenntnis ausmachen? Er nennt sie Bedingungen der Erkenntnis, weil sie Naturerkenntnis erst möglich machen, und die Frage nach der Stellung des Kausalgesetzes beantwortet er so: Allerdings ist es *denkbar*, daß das Naturgeschehen ohne funktionelle Abhängigkeiten verlief; aber wenn es eine *Erkenntnis der Natur* gibt, dann gilt das Kausalprinzip, denn ohne dieses ist Erkenntnis ihrem Sinne nach nicht möglich. Solche Prinzipien, die nicht *logisch notwendig* (analytisch) sind und dennoch für die Erfahrungserkenntnis notwendig gelten, nennt er synthetische Urteile apriori. Ihre Gültigkeit läßt sich nicht durch einzelne Beobachtungen, durch Empirie, bestätigen, sondern steht und fällt mit der Möglichkeit einer Erkenntnis überhaupt und muß wie diese ein transzendentes Faktum genannt werden. Wir könnten durchaus zu einer physikalischen Erkenntnis kommen, wenn das Energiegesetz nicht gilt; die Gleichungen würden dann eben anders lauten; aber ohne Geltung des Kausalgesetzes wäre Erkenntnis unmöglich, weil wir überhaupt keine quantitativen Funktionalbeziehungen aufstellen könnten. Dieser Unterschied ergibt eine neue Klassifikation der Naturgesetze; er zeichnet unter ihnen einige als apriori gültig aus. In gleichem Sinne müssen wir jetzt, die Kantschen Gedanken fortführend, das Verteilungsgesetz ein *apriorisches Prinzip der Erkenntnis* nennen. Denn es ist ebenfalls eine notwendige Voraussetzung der Erkenntnis, und wir dürfen sagen: Wenn es eine physikalische Erkenntnis gibt, dann gilt das Prinzip der Verteilung.

Die Auflösung, welche der Wahrscheinlichkeitsbegriff durch die Formulierung als Prinzip der Verteilung oder Prinzip der Wahrscheinlichkeitsfunktion erfährt, stellt die beobachteten Regelmäßigkeiten in neuem Lichte dar. Wir verstehen jetzt, warum man physikalische Gesetze als nur *wahrscheinlich* gültig bezeichnet: weil man eine

Aussage über ihre spezielle Form im Einzelfall nicht machen kann, weil nur für ihre wiederholte Realisierung sich eine Häufigkeitsaussage machen läßt, die aber den Zahlwert des Einzelfalls unbestimmt läßt. Die sogenannte philosophische Wahrscheinlichkeit der Geltung von Naturgesetzen wird durch das Prinzip der Wahrscheinlichkeitsfunktion mit der physikalischen Wahrscheinlichkeit zusammengeführt. Wir verstehen andererseits, warum die Regelmäßigkeiten der Verteilung, die man als Gesetze der physikalischen Wahrscheinlichkeit in den Zufallsspielen, in der Fehlertheorie usw. beobachtet hat, immer wieder auftreten müssen, und warum sie sich von den gewöhnlichen physikalischen Gesetzen bei allen Untersuchungen immer wieder unterscheiden mußten. Zwar hat man mancherlei Theorien über diese Regelmäßigkeiten aufgestellt, aber ohne sie recht begründen zu können; man merkte nicht, daß man auf ein Erkenntnisprinzip gestoßen war, das nur erkenntniskritisch beurteilt werden kann, das einzelne Erfahrungen nicht bestätigen oder widerlegen können, weil es viel tiefer, im Wesen der Erkenntnis, seinen Sinn hat. Von hier aus müssen alle Versuche, die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung experimentell zu untersuchen, lächerlich erscheinen. Derartige Versuche sind allerdings gemacht worden; so hat ein Forscher einmal mit Würfeln 120 000 Würfe ausgeführt, um zu erfahren, ob wirklich Gleichverteilung entstünde. Das überraschende Resultat war, daß eine Würfelseite häufiger vorgekommen war als die anderen — der experimentelle Kritiker aber hat daraus geschlossen, daß der Würfel einen exzentrischen Schwerpunkt hatte, und nicht, daß die Wahrscheinlichkeitsgesetze falsch wären. Es ist bezeichnend, daß dieser Forscher gar nicht fähig war, sich dem apriorischen Zwänge des Prinzips zu widersetzen. Es geht hier wie mit dem Kausalprinzip: stoßen wir auf einen widersprechenden Tatbestand, so ändern wir nicht das Prinzip, sondern die spezielle Form, die wir ihm zur Erklärung des Tatbestandes gegeben hatten. Für beide, Kausalprinzip und Verteilungsprinzip, ist dies immer möglich. In diesem Zusammenhange müssen auch die Versuche *Marbes*¹⁾, die statistischen Regelmäßigkeiten durch Beobachtungen zu widerlegen und durch rhythmische Gesetze zu ersetzen, aussichtslos erscheinen. *Marbe* könnte, falls er solche Rhythmen nachweist, immer nur schließen, daß in den speziellen Verhältnissen des betrachteten Gegenstandes besondere Bedingungen für das Auftreten der Rhythmen vorhanden sind. Es gibt derartige Gegenstände, z. B. in der Psychologie, wo die Aufmerksamkeit eine Funktion des Erfolges ist²⁾; hier ist die Bedingung der Unabhängigkeit der Einzelvorgänge, die wir als spe-

zielle Bedingung der Gleichwahrscheinlichkeit aufstellten, nicht erfüllt, und daher ändert sich die spezielle Art der Gesetzmäßigkeit. Aber die *Marbeschen* Untersuchungen sind nicht einmal wahrscheinlichkeitstheoretisch zulänglich; das hat *R. v. Mises*³⁾ in äußerst gründlicher Weise nachgewiesen, so daß die philosophische Kritik diese Untersuchungen übergehen darf, weil sie nicht einmal methodisch hinreichend ausgeführt sind.

Die philosophische Betrachtung hat uns dazu geführt, die Wahrscheinlichkeitsgesetze als objektive Gesetze des Naturgeschehens anzusehen, die der Stellung von Kausalgesetzen durchaus analog ist. Wir dürfen deshalb in ihnen nicht mehr Verlegenheitsgesetze sehen, Auswege, die sich der Physiker sucht, wenn ihm eine genauere Kenntnis der Zusammenhänge fehlt. *Laplace* hat den Gedanken geäußert, daß ein Menschenwesen von vollkommener Intelligenz keine Wahrscheinlichkeitsgesetze mehr benutzen würde, sondern das gesamte Geschehen durch Kausalgesetze beherrschte. Wir müssen bemerken, daß ein solches überintelligentes Wesen sehr unpraktisch vorgehe, wenn es jeden einzelnen Wurf eines Würfelspiels genau berechnete und auf die Gesetzmäßigkeit, die in der Gleichverteilung der Seiten liegt, verzichtete. Denn an diesem Tatbestand könnte auch das klügste Verstandeswesen nichts ändern, auch seine genau berechneten Würfe würden sich dem Verteilungsschema einordnen. *Es heißt auf einen Teil der Naturbeschreibung verzichten, wenn man sich auf Kausalgesetze beschränkt. *Planck* hat in seinem bekannten Vortrage über dynamische und statistische Gesetzmäßigkeit diese Doppelheit der Methode ausführlich gezeigt; wir können sie jetzt philosophisch verstehen, weil wir die parallele Bedeutung der beiden Prinzipien der Verknüpfung und der Verteilung für den Erkenntnisbegriff nachgewiesen haben. Unsere Kritik ordnet die Wahrscheinlichkeitsgesetze als gleichberechtigten Zweig in die Physik ein.

Wir verdanken dieses Resultat der Verbindung zweier Forschungsmethoden; der axiomatischen Methode, welche uns zur präzisen Formulierung des Axioms der Anwendbarkeit von Wahrscheinlichkeitsgesetzen führte, und der kritischen Methode, welche die Stellung dieses Axioms zum Erkenntnisbegriff untersuchte. Allerdings konnten wir diese Methoden nur für die Physik durchführen, und über die Geltung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in anderen Gebieten, z. B. der Psychologie, der Soziologie, lassen sich deshalb definitive Urteile noch nicht fällen. Aber wir dürfen mit aller Voraussicht annehmen, daß für die andern nicht empirisches Gesetz ist, was für die eine sich als philosophisches Prinzip enthüllt; und es scheint, als ob der Vorsprung der Physik hier wie in anderen Problemen allein in der höheren Stufe ihrer mathematischen Form begründet liegt.

¹⁾ *K. Marbe*, Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916.

²⁾ Vgl. meine Besprechung über *Sterzinger*, Zur Psychologie und Naturphilosophie der Geschicklichkeitsspiele, Die Naturwissenschaften 7, 644, 1919.

³⁾ *R. v. Mises*, *Marbes* Gleichförmigkeit in der Welt. Die Naturwissenschaften 7, 168, 1919.