Sopra due teoremi di Dirichlet.

(Di ALBERTO MARIO BEDARIDA, a Genova.)

1. DIRICHLET, nella sua classica Memoria inserita nel volume n.º 24 del *Giornale di Crelle*: « Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes », ha dimostrato i due teoremi seguenti:

a) « Se D è un intero, razionale, positivo e non quadrato ed H è il numero delle classi di forme a coefficienti interi complessi, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante D , primitive di prima specie, ed h_1, h_2 sono i numeri delle classi di forme a coefficienti interi razionali, rispettivamente a determinante D e $-D$, primitive di prima specie; si ha: $H=2h_1h_2$ oppure $H=h_1h_2$ secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = -1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no ».

b) « Se D è un intero, razionale, positivo, il cui doppio non sia un quadrato, ed H è il numero delle classi di forme a coefficienti interi complessi, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante D , primitive di prima specie, ed h_1, h_2 sono i numeri delle classi di forme a coefficienti interi razionali, rispettivamente a determinante $2D$ e $-2D$, primitive di prima specie; si ha: $H=h_1h_2$ oppure $2H=h_1h_2$ secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - 2Du^2 = -1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no ».

Questi due teoremi chiudono la Memoria e, giustamente, sono considerati tra i più belli della teoria delle forme a coefficienti e variabili interi complessi, cioè della teoria delle forme aritmetiche di DIRICHLET. La loro dimostrazione risulta da considerazioni di Aritmetica analitica. I teoremi a) e b) furono inoltre dimostrati con considerazioni di Aritmetica pura da HILBERT, nella Memoria « Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper » (Math. Ann., 45 Bd.), come un'applicazione della teoria dei generi.

Noi ci proponiamo, nella presente Nota, di dimostrare come il teorema b) si possa ricondurre al teorema a), mediante considerazioni di *Aritmetica pura*, senza cioè ricorrere ai mezzi che offre la Teoria dei Numeri, quando vi si introducono considerazioni di Analisi. Precisamente, ciò risulterà, in modo

assai semplice, riprendendo alcuni studi sopra le forme aritmetiche di DIRICHLET, dal punto di vista dell'Aritmetica pura, dovuti al prof. BIANCHI e pubblicati nella Nota: *Sulle forme quadratiche a coefficienti ed a indeterminate complesse*; Acc. Lincei, Serie 4^a, vol. V, fasc. 8^o, pag. 589 ⁽¹⁾.

2. Si abbia un intero di GAUSS $D \equiv 0 \pmod{2}$, e sia H_1 il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante D , primitive (necessariamente di prima specie) ed H_2 il numero delle classi di forme di DIRICHLET, dello stesso determinante, a divisore $1+i$ (necessariamente non primitive): si tratta di determinare le relazioni tra i numeri H_1 ed H_2 ⁽²⁾.

Intanto, un teorema generale ⁽³⁾ ci assicura che H_2 è sempre un divisore di H_1 e che il quoziente intero è il numero delle forme di DIRICHLET a determinante D , primitive di prima specie, non equivalenti tra di loro, il cui primo coefficiente è un quadrato ρ^2 divisore di $(1+i)^2$.

Ora, i valori che ρ può avere sono: $\rho = 1$ e $\rho = 1+i$: al primo corrisponde la forma principale $f_1 \equiv (1, 0, D)$; al secondo, dovendo essere il coefficiente medio delle rispettive forme $\equiv 0 \pmod{2}$ oppure $\equiv 1+i \pmod{2}$, corrispondono le due forme:

$$f_2 \equiv \left((1+i)^2, 0, -\frac{D}{(1+i)^2} \right) \quad \text{ed} \quad f_3 \equiv \left((1+i)^2, 1+i, -\frac{D}{(1+i)^2} + 1 \right).$$

Si tratta di considerare di queste tre forme, quelle primitive di prima specie, e vedere quante di esse non sono equivalenti tra di loro. La f_1 , intanto, è sempre primitiva di prima specie. Distinguendo il determinante D , rispetto al modulo $(1+i)^3$, si ha che è $D \equiv (1+i)^2 \pmod{(1+i)^3}$ oppure $D \equiv 0 \pmod{(1+i)^3}$: consideriamo separatamente i due casi.

Sia $D \equiv (1+i)^2 \pmod{(1+i)^3}$. La forma f_2 è primitiva di prima specie, la f_3 non è tale. Ora, perchè le forme f_1 e f_2 siano equivalenti, in ordine ad

⁽¹⁾ Per quanto riguarda la nomenclatura adoperata nella presente Nota, noi rimandiamo il lettore al citato lavoro del prof. BIANCHI.

⁽²⁾ Se invece è $D \equiv 1 \pmod{2}$, le forme di DIRICHLET a determinante D ed a divisore $1+i$ sono necessariamente primitive ed in questo caso sono note le relazioni tra i numeri H_1 ed H_2 (cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 593, oppure LIPSCHITZ, *Zur Theorie der quadratischen Formen*, Crelle's Journal, 54 Bd.).

Nei casi $D \equiv i \pmod{2}$ oppure $D \equiv 1+i \pmod{2}$ non si hanno, manifestamente, forme a divisore $1+i$.

⁽³⁾ Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 591.

un noto teorema ⁽⁴⁾, occorre e basta che esistano due interi di GAUSS x e y , tali che soddisfino alle relazioni:

$$\begin{cases} x^2 - D y^2 = (1+i)^2 \\ x \equiv 0 \pmod{(1+i)^2}, \end{cases}$$

e ciò avviene quando e soltanto quando l'equazione di PELL:

$$x^2 - D y^2 = (1+i)^2 \quad (1)$$

sia solubile in numeri interi con x pari (y sarà con ciò, necessariamente, dispari). Le due forme f_1 ed f_2 sono allora ed allora soltanto, equivalenti tra di loro.

Sia $D \equiv 0 \pmod{(1+i)^3}$. La forma f_2 è primitiva di prima specie, la f_1 non è tale. Ora, medesimamente, le due forme f_1 ed f_3 saranno equivalenti tra di loro, quando e soltanto quando esistano due interi x e y per cui si abbia:

$$\begin{cases} x^2 - D y^2 = (1+i)^2 \\ x + (1+i)y \equiv 0 \pmod{(1+i)^2} \\ x \equiv 0 \pmod{(1+i)}. \end{cases}$$

Se questo sistema è verificato, l'equazione di PELL (1) è solubile, manifestamente in numeri interi, con x semipari (non pari) ed y dispari. Inversamente, se ciò avviene, il sistema precedente viene verificato. Dunque le forme f_1 ed f_3 sono equivalenti allora e allora soltanto che l'equazione di PELL (1) sia solubile con x semipari ed y dispari.

Le precedenti considerazioni ci offrono dunque il teorema seguente:

Se D è un intero pari ed H_1 è il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante D , primitive (necessariamente di prima specie) ed H_2 è il numero delle classi di forme di DIRICHLET dello stesso determinante, a divisore $1+i$ (necessariamente non primitive); si ha: per $D \equiv (1+i)^2 \pmod{(1+i)^3}$, $H_1 = H_2$ oppure $H_1 = 2 H_2$, secondo che l'equazione di PELL:

$$x^2 - D y^2 = (1+i)^2$$

è solubile oppure no in numeri interi x e y con x pari (e quindi sarà y dispari); per $D \equiv 0 \pmod{(1+i)^3}$, $H_1 = H_2$ oppure $H_1 = 2 H_2$ secondo che questa equazione di PELL è solubile oppure no in numeri interi x e y , con x semipari ed y dispari.

⁽⁴⁾ Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 590.

3. Si supponga ora che l'intero pari D sia razionale positivo e non quadrato.

Si ha allora subito che la (1) non è solubile con y dispari. Infatti, dividendo i due membri per $(1+i)^2$, si dedurrebbe:

$$x'^2 + i D' y^2 = 1 \quad (2)$$

ove con x'^2 e D' indichiamo i quozienti interi di x^2 per $(1+i)^2$ e di D per 2 e sarà $D' > 0$. Ora, ad una soluzione (x', y) della (2) corrisponde una soluzione $(x', i y)$ dell'equazione:

$$x'^2 - i D' y^2 = 1$$

ed inversamente; ma le soluzioni di questa equazione hanno la forma $x = u$ ed $y = (1-i)v$, essendo u e v entrambi interi, razionali, oppure entrambi interi, puramente complessi⁽⁵⁾; dunque nelle soluzioni della (1), nel caso attuale, y non può essere dispari.

Il teorema precedente ci conduce quindi al corollario:

Se D è un intero razionale positivo, pari e non quadrato, il numero H_1 delle classi di forme di DIRICHLET a determinante D , primitive (necessariamente di prima specie) è sempre il doppio del numero H_2 delle classi di forme di DIRICHLET dello stesso determinante a divisore $1+i$ (necessariamente non primitive).

4. Quest'ultimo risultato ci offre il modo di ricondurre, come si è detto, il teorema b) al teorema a).

Infatti: sia D un intero razionale, positivo, il cui doppio non sia un quadrato, H_1 il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante $2D$, primitive di prima specie, h_1 ed h_2 i numeri delle classi di forme di GAUSS rispettivamente $2D$ e $-2D$, primitive di prima specie.

Per il teorema a), abbiamo:

$$H_1 = 2 h_1 h_2 \text{ oppure } H_1 = h_1 h_2, \quad (3)$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - 2D u^2 = -1$ ammette soluzioni intere razionali oppure no.

Indichiamo con H il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante $2D$ ed a divisore $1+i$: tali forme, come già si è osservato, non

⁽⁵⁾ Cfr. DIRICHLET, op. cit., pag. 342.

possono essere primitive. È evidente, che queste classi di forme corrispondano biunivocamente alle classi di forme a determinante $-iD$, primitive di prima specie. Segue allora che il numero di tali classi è ancora H : d'altra parte questo numero H è pure il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante $+iD$, primitive di prima specie ⁽⁶⁾. Ora, per il corollario più sopra stabilito è sempre $2H = H_1$ e quindi, tenendo conto delle (3) sarà:

$$H = h_1 h_2 \text{ oppure } H = 2 h_1 h_2,$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - 2D u^2 = -1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no.

Il teorema b) è dunque ricondotto, per via puramente aritmetica, al teorema a).

⁽⁶⁾ Si noti che: *il numero delle classi di forme di DIRICHLET è lo stesso per determinanti di segno opposto*. Ciò si può vedere subito nel modo seguente, senza ricorrere alle considerazioni di Aritmetica analitica di DIRICHLET, della citata Memoria. Ad una forma a determinante $-D$ (D intero di GAUSS qualunque) (a, b, c) si faccia corrispondere la forma $(a, ib, -c)$ a determinante $-D$, e viceversa; la corrispondenza si estende subito dalle forme alle classi ed in modo biunivoco, poichè se:

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (m, n, l),$$

ove (m, n, l) è una forma a determinante D ed $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è una sostituzione aritmetica unimodulare, si avrà:

$$(a, ib, -c) \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\gamma & \delta \end{pmatrix} = (m, in, -l),$$

per le corrispondenti forme a determinante $-D$ ed inversamente: è dunque provato quanto si è asserito.