Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Paul Hertz in Göttingen.

Über Z Urnen sei eine große Zahl N von Kugeln verteilt. Sei x der relative Inhalt einer Urne, d. h. die durch N dividierte Anzahl der in ihr enthaltenen Kugeln, und $\varphi(x)dx$ die durch Z dividierte Zahl von Urnen mit einem relativen Inhalt zwischen x und $x+dx$ (also die Wahrscheinlichkeit dafür, bei willkürlicher Wahl auf eine Urne mit einem solchen Inhalte zu treffen). Die Funktion $\varphi(x)$ ist anfangs gegeben; darauf wird willkürlich eine Kugel aus einer Urne in eine andere gelegt. Welche Funktion $\varphi(x)$ ist nun zu erwarten?

Wir wollen zunächst noch N beliebig (nicht nur sehr groß) annehmen, mit $X = xN$ die Zahl der Kugeln in einer Urne bezeichnen, mit $\Phi(X)$ die durch Z dividierte Anzahl Urnen vom Kugelgehalt X , mit $\Phi^*(X)$ dieselbe Größe nach der Umlegung und mit $\bar{\Phi}^*(X)$ ihren Mittelwert für alle Umlegungen¹⁾. Dann ist

$$(1) \quad \sum \Phi(X) = 1,$$

$$(2) \quad \sum \Phi(X) X = \frac{N}{Z}.$$

Nun benutzen wir, daß $\Phi(X)$ resp. $\bar{\Phi}^*(X)$ auch die Wahrscheinlichkeit bedeutet, bei willkürlichem Herausgreifen einer Urne vor resp. nach der Umlegung den Inhalt X anzutreffen. Es werde also nach der Umlegung eine Urne bezeichnet; dafür, daß diese den Inhalt X besitzt, gibt es drei Chancen:

1. Die gewählte Urne kann, vor der Umlegung den Inhalt X besessen haben; dann darf die Umlegung nichts an ihrem Inhalte geändert haben.

¹⁾ Dabei gelte für das Herausnehmen jede Kugel, für das Hineinlegen jede Urne als gleichberechtigt.

2. Man kann auf eine Urne getroffen sein, die vorher den Inhalt $X - 1$ hatte; dann muß die Umlegung eine neue Kugel in sie hineinbracht haben.

3. Die betreffende Urne hatte die Kugelzahl $X + 1$; es muß ihr dann also eine Kugel entzogen worden sein.

Die Umlegung selbst besteht aus zwei Teilprozessen: Die Kugel wird aus einer Urne herausgenommen und in eine andere hineingelegt. Dafür, daß eine vorbezeichnete Urne eine Kugel verliert, besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{X}{N}$ ²⁾, und dafür, daß einer gegebenen Urne eine Kugel zuerteilt wird, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{Z}$.

Dies alles berücksichtigend, erhält man:

$$\begin{aligned} (3) \quad \overline{\Phi^*(X)} &= \Phi(X) \left[\left(1 - \frac{X}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) + \frac{X}{N} \frac{1}{Z} \right] \\ &+ \Phi(X-1) \left[\left(1 - \frac{X-1}{N}\right) \frac{1}{Z} \right] \\ &+ \Phi(X+1) \left[\frac{X+1}{N} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) \right]. \end{aligned}$$

Man kann natürlich (3) auch ableiten, *ohne* zu benutzen, daß $\Phi(X)$ eine Wahrscheinlichkeit bedeutet: Versteht man unter $\Phi(X)Z$ lediglich die Anzahl von Urnen mit dem Inhalte X , und betrachtet eine Gesamtheit von sehr vielen Urnenscharen, denen allen dasselbe Zahlensystem $\Phi(1), \Phi(2), \Phi(3), \dots$ zukommt, so erhält man nach den Umlegungen eine neue Gesamtheit von Scharen mit verschiedenen Funktionen $\Phi^*(X)$. Der über die Gesamtheit genommene Mittelwert $\overline{\Phi^*(X)}$ wird aber durch die rechte Seite von (3) gegeben ³⁾.

Nun seien Z und N/Z sehr groß.

Setzen wir

$$(4) \quad \frac{X}{N} = x,$$

$$(5) \quad \Phi(X) = \varphi(x) dx = \varphi(x) \frac{1}{N},$$

$$(6) \quad \frac{1}{Z} = \alpha,$$

²⁾ Hierzu wie überhaupt zu der ganzen Problemstellung vgl. P. und T. Ehrenfest, Math.-naturw. Blätter Nr. 11 und 12 (1906); Phys. Zeitschr. 8 (1907), S. 311.

³⁾ Genauer: Man beweist mit Hilfe des Bernoullischen Theorems, daß bei wachsender Zahl der Urnenscharen in der Gesamtheit die Differenz von $\overline{\Phi^*(X)}$ und der rechten Seite von (3) mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit beliebig klein wird.

so ist zunächst nach (1) und (2)

$$(7) \quad \int \varphi(x) dx = 1,$$

$$(8) \quad \int \varphi(x) x dx = \alpha.$$

Ferner erhalten wir aus (3) bei Beschränkung auf Glieder von erster Ordnung in $\frac{1}{N}$

$$(9) \quad \overline{\varphi^*(x)} = \varphi + \frac{1}{N} \varphi + \frac{1}{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x - \alpha).$$

Bezeichnen wir also mit $\varphi(x, \tau)$ die nach τ Umlegungen im Mittel vorhandene Funktion, so ist

$$(10) \quad N \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x - \alpha).$$

Hier können wir noch setzen:

$$(11) \quad \frac{\tau}{N} = t,$$

$$(12) \quad \frac{x}{\alpha} = z = \zeta + 1,$$

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \psi(z) = \frac{1}{\alpha} \chi(\zeta),$$

so daß nach (7) und (8) gilt:

$$(14) \quad \int \psi(z) dz = 1; \quad \int \chi(\zeta) d\zeta = 1.$$

$$(15) \quad \int \psi(z) z dz = 1; \quad \int \chi(\zeta) \zeta d\zeta = 0.$$

Dann hat man

$$(16) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial z} (z - 1)$$

oder

$$(17) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi).$$

Wenn eine für $\zeta = \pm \infty$ verschwindende Funktion anfangs (14) genügt, so wird nach (17) $\int \frac{\partial \chi}{\partial t} d\zeta = 0$, also (14) auch weiterhin befriedigt.

Ebenso ist $\frac{\partial}{\partial t} \int \zeta \chi d\zeta = \int \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi) d\zeta = - \int \zeta \chi d\zeta$. Wenn also (15) anfangs erfüllt ist, so ist das auch weiterhin der Fall.

Wir setzen nun $\chi(\zeta, 0) = \chi_0(\zeta)$ und erhalten durch Integration von (17)

$$(18) \quad \chi = e^t \cdot \chi_0(\zeta e^t).$$

Denkt man sich also den Zustand der Urnenschar durch eine Verteilungskurve charakterisiert, deren Abszisse ζ ⁴⁾ und deren Ordinate χ ⁵⁾ ist, so kann man sagen:

Die Verteilungskurve einer Schar bleibt sich ähnlich. Die späteren Kurven gehen aus den früheren hervor durch Kompression der Ebene gegen die Ordinatenachse und Dehnung im selben Maßstabe von der Abszissenachse weg.

Eine so deformierte Kurve wird sich der Ordinatenachse immer enger anschließen, d. h. die Verteilung der Gleichverteilung zustreben. Obwohl sich also das Maximum immer mehr der Ordinatenachse nähert, braucht doch auf dieser selbst kein Maximum vorhanden zu sein. ' Ja, wenn die Kurve anfangs auf ihr ein Minimum (eine Einstülpung) besitzt, wird sich dieses dort dauernd erhalten.

Die Irreversibilität der Veränderung findet auch in dem Verhalten des Mittelwertes $\bar{\zeta}^2$ ihren Ausdruck. Nach (18) ist

$$(19) \quad \bar{\zeta}^2 = e^{-2t} \bar{\zeta}_0^2$$

oder

$$(20) \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\zeta}_0^2}{\bar{\zeta}^2}.$$

Es darf nicht vergessen werden, daß die Funktionen φ , ψ , χ nur durch Mittelwertbildung über Gesamtheiten von sehr vielen Urnenscharen gewonnen sind. Je größer t ist, desto mehr Scharen müssen zur Mittelwertbildung herangezogen werden. Umgekehrt, hält man die Zahl der Urnenscharen fest und läßt t unbegrenzt wachsen, so wird man auch wieder einmal die anfängliche Verteilungsfunktion antreffen.

Göttingen, den 5. Dezember 1919.

⁴⁾ Die Abweichung vom Normalinhalt, diesen als Einheit gesetzt.

⁵⁾ Die Dichte der relativen Häufigkeit.

(Angenommen 5. Dezember 1919.)