

Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung).

Von

HERMANN WEYL in Göttingen.

Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	441
§ 1. Beziehungen der Eigenwerte zweier Kerne $K'$ , $K''$ zu den Eigenwerten der Summe $K' + K''$ . Approximation eines Kerns durch bilineare Kombination von endlichvielen Funktionen einer Variablen . . . . .	443
§ 2. Invarianz der asymptotischen Eigenwertverteilung gegenüber Addition von Kernen mit dünnerer Eigenwertverteilung: Eigenwerte eines stetig differenzierbaren Kerns . . . . .	448
§ 3. Asymptotisches Gesetz der Eigenwerte der gewöhnlichen Schwingungsgleichung in der Ebene, für die Randbedingungen $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . . . . .	456
§ 4. Analoge Untersuchungen für die allgemeine sich selbst adjungierte Differentialgleichung. . . . .	463
§ 5. Modifikationen, die bei Übertragung des Beweises auf den dreidimensionalen Raum vorgenommen werden müssen . . . . .	466
§ 6. Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung. . . . .	469

Einleitung.

Methoden von solcher Allgemeinheit wie die *Theorie der Integralgleichungen* haben, wenn man sie auf physikalische Probleme — die Integralgleichungen auf Schwingungsvorgänge — anwendet, ihre Aufgabe damit nicht erschöpft, daß sie ermöglichen, in jedem konkreten Einzelfall die Erscheinungen bis in ihre letzten Details rechnerisch zu verfolgen — nur die einfachsten und am einfachsten zu realisierenden solcher Einzelfälle dürfen ja vom physikalischen Standpunkt ein besonderes Interesse beanspruchen, und die erweisen sich oft speziellen Ansätzen direkter zugänglich —; vielmehr sollen diese Methoden, wenn ich nicht irre, vor allem das leisten — was kein spezieller Ansatz zu leisten vermag —: *die einem*

großen Komplex von Erscheinungen gemeinsamen Züge ausfindig zu machen. In diesem Sinne habe ich mir in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe gestellt, mit den Methoden der Integralgleichungstheorie folgenden Satz zu beweisen: *Schwingungsvorgänge, deren Gesetzmäßigkeit sich in einer linearen Differentialgleichung vom Typus der gewöhnlichen Schwingungsgleichung ausdrückt, besitzen, unabhängig von der geometrischen Gestalt und physikalischen Beschaffenheit der (als endlich ausgedehnt vorausgesetzten) Räume, in denen sie sich abspielen, im Gebiet der hohen Schwingungszahlen alle wesentlich ein und dasselbe „Spektrum“.* Außer den mathematisch einfachsten Randbedingungen (welche das Verschwinden der Amplitude oder ihrer normalen Ableitung am Rande verlangen) betrachte ich wegen ihres physikalischen Interesses als weiteres Beispiel (§ 6) die *Hohlraumstrahlung*, die sich in einem beliebig gestalteten, von einer vollkommen spiegelnden Hülle eingeschlossenen Vakuum ausbildet, und weise nach, daß die Dichtigkeit, mit der die Spektrallinien hier im Gebiet der hohen Frequenzen aufeinanderfolgen, dem Volumen des Hohlraums proportional, im übrigen aber (asymptotisch gesprochen) von der Gestalt der begrenzenden Hülle unabhängig ist. Dieser Satz ist erforderlich, um die Jeanssche Strahlungstheorie (bei deren Begründung sich ihr Urheber auf einen parallelepipedischen Hohlraum beschränkte) allgemein durchführen zu können.\*)

Die einfachen, für alle Kerne gültigen Resultate des § 1 sind es, welche die Inangriffnahme der bezeichneten Untersuchungen ermöglichen; sie bestimmen eindeutig den Weg, auf welchem der Beweis zu führen ist. Im § 2 werden jene Sätze dazu verwendet, die asymptotische Verteilung der Eigenwerte solcher Kerne festzustellen, wie sie in den folgenden Abschnitten eine Rolle spielen werden. §§ 3—6 enthalten die Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen, namentlich auf die gewöhnliche Schwingungsgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$ , für den Fall von zwei und drei unabhängigen Variablen.\*\*)

\*) Außer der Originalarbeit von Jeans (Phil. Mag. 1905, 6. Ser., 10, p. 91—98) vgl. den Vortrag von H. A. Lorentz auf dem Internationalen Mathematiker-Kongresse in Rom 1908. Lorentz hat auch (in dem vierten seiner Göttinger Vorträge „Über alte und neue Fragen der Physik“) den hier in § 6 bewiesenen Satz als eine aus physikalischen Gründen plausible Vermutung ausgesprochen. Über die einfachsten Fälle, in denen sich der Beweis durch direkte Berechnung der Eigenwerte erbringen läßt, handelt die Leidener Dissertation von Fräulein Reudler. Das analoge Problem im Gebiet der Akustik (das in der vorliegenden Arbeit gleichfalls seine Erledigung findet) hat A. Sommerfeld auf der Naturforscher-Versammlung zu Königsberg 1910 [Physikalische Zeitschrift 11 (1910), S. 1061] aufgeworfen.

\*\*) Eine kurze Note über den Gegenstand dieser Arbeit habe ich bereits in den Göttinger Nachrichten (math.-phys. Klasse, Sitzung vom 25. Febr. 1911) veröffentlicht.

## § 1.

**Beziehungen der Eigenwerte zweier Kerne  $K'$ ,  $K''$  zu den Eigenwerten der Summe  $K' + K''$ . Approximation eines Kerns durch bilineare Kombination von endlichvielen Funktionen einer Variablen.**

Die Betrachtungen dieses und des nächsten Paragraphen beziehen sich auf lineare Integralgleichungen, deren Kerne symmetrisch sind und von solcher Art, daß für sie die gewöhnliche Fredholm-Hilbertsche Theorie gültig ist. Wir machen also für den symmetrischen Kern

$$K(s, t) = K(t, s) \quad (a \leq s \leq b)$$

etwa die Voraussetzung, daß das Integral

$$\int_a^b \int_a^b K^2 ds dt$$

endlich sein soll. An Stelle der einen Variablen  $s$  und der einen Variablen  $t$  kann auch je eine Reihe von Variablen  $s_1 s_2 \dots s_h$ , bez.  $t_1 t_2 \dots t_h$ , d. h. je ein Punkt ( $s$ ) bez. ( $t$ ) in einem Raum von  $h$  Dimensionen treten. Beide Punkte ( $s$ ) und ( $t$ ) variieren dann in demselben Gebiet  $J$  des  $h$ -dimensionalen Raumes; für  $ds$  oder  $dt$  hat das Volumelement dieses Raumes einzutreten, und die Integrationen erstrecken sich, statt über das Intervall  $(ab)$ , immer über das gegebene Gebiet  $J$ . Der Einfachheit des Ausdrucks halber operieren wir aber im folgenden zunächst nur mit einer Variablen  $s$  und einer Variablen  $t$ .

Die Eigenwerte von  $K(s, t)$  bezeichne ich, indem ich sie nach der Größe ihres absoluten Betrages anordne, mit\*)

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \dots \quad (|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots);$$

in dieser Reihe soll jeder Eigenwert so oft vertreten sein, als seine Vielfachheit angibt.

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \dots$$

möge das System der zugehörigen normierten Eigenfunktionen sein (die nur soweit vorhanden sind, als noch  $\alpha_k \neq 0$  ist); es bestehen also die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_k \varphi_k(s) - \int_a^b K(s, t) \varphi_k(t) dt &= 0, \\ \int_a^b \varphi_k^2 ds &= 1, \quad \int_a^b \varphi_h \varphi_i ds = 0 \quad (h \neq i), \end{aligned}$$

\*) Besitzt  $K$  nur endlichviele, etwa  $m$  Eigenwerte  $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_m}$ , so setzen wir  $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = 0$ ; eine entsprechende Festsetzung gilt für die auf S. 444 eingeführten Größenreihen  $\bar{x}, \bar{y}$ .

und jede Eigenfunktion des Kerns  $K$  setzt sich aus endlichvielen der Funktionen  $\varphi_\lambda(s)$  linear zusammen. Ferner ist

$$\iint_a^b K^2 ds dt = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \dots \text{ in inf.}$$

Die nicht-negativen unter den Zahlen  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  bezeichne ich in der Reihenfolge, wie sie in dieser Reihe auftreten, mit

$$\overset{+}{\kappa}_1, \overset{+}{\kappa}_2, \dots \quad (\overset{+}{\kappa}_1 \geq \overset{+}{\kappa}_2 \geq \dots)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen mit

$$\overset{+}{\varphi}_1(s), \overset{+}{\varphi}_2(s), \dots$$

Die nicht-positiven unter den  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  heißen  $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \dots$  und die zugehörigen Eigenfunktionen  $\bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \dots$ . Auf die hier festgesetzte Numerierung beziehen sich auch Ausdrücke wie diese: erster Eigenwert ( $\frac{1}{\kappa_1}$ ), reziproker  $n^{\text{ter}}$  positiver Eigenwert ( $\overset{+}{\kappa}_n$ ) usw.

Ferner setze ich

$$[K]_n^+ = \overset{+}{\kappa}_1 \overset{+}{\varphi}_1(s) \overset{+}{\varphi}_1(t) + \overset{+}{\kappa}_2 \overset{+}{\varphi}_2(s) \overset{+}{\varphi}_2(t) + \dots + \overset{+}{\kappa}_n \overset{+}{\varphi}_n(s) \overset{+}{\varphi}_n(t), \quad ([K]_0^+ = 0).$$

Für alle Funktionen  $x(s)$ , für welche  $\int_a^b x^2 ds \leq 1$  ist, erfüllt die zu  $K(s, t)$  gehörige quadratische Integralform

$$K\langle x \rangle = \iint_a^b K(s, t) x(s) x(t) ds dt$$

die Ungleichung

$$K\langle x \rangle \leq \overset{+}{\kappa}_1.$$

Das Reziproke des ersten positiven Eigenwertes von  $K - [K]_n^+$  ist  $\overset{+}{\kappa}_{n+1}$ .

Haben wir es mit verschiedenen Kernen zu tun, so unterscheiden wir sie durch obere Indizes:  $K', K'', K^*$  usw. Die Größen  $\kappa, \varphi(s)$ , usw., welche zu diesen Kernen gehören, werden dann durch dieselben, oben angehängten Kennzeichen unterschieden.

Die Resultate dieses Paragraphen beruhen auf dem folgenden einfachen Lemma. Ist  $k_n(s, t)$  irgendeine bilineare symmetrische Kombination

$$\sum_{p, q=1}^n k_{pq} \Phi_p(s) \Phi_q(t) \quad (k_{pq} = k_{qp})$$

aus  $n$  beliebigen quadratisch integrierbaren\*) Funktionen  $\Phi_p(s)$ , so ist der

\*) D. h.  $\int \Phi_p^2 ds$  soll endlich sein.

erste positive Eigenwert von  $K - k_n$  nicht größer als der  $(n+1)^{\text{te}}$  positive Eigenwert von  $K$ .

Beweis. Ich bilde durch lineare Kombination der Eigenfunktionen  $\psi_1^+(s), \psi_2^+(s), \dots, \psi_{n+1}^+(s)$  von  $K$  eine Funktion  $x(s)$ :

$$x(s) = x_1 \psi_1^+(s) + x_2 \psi_2^+(s) + \dots + x_{n+1} \psi_{n+1}^+(s),$$

welche die  $n$  linearen Gleichungen

$$\int_a^b x(s) \Phi_p(s) ds = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllt; dabei kann ich eine solche Normierung vornehmen, daß

$$\int_a^b x^2 ds \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

wird. Für diese spezielle Funktion  $x(s)$  kommt

$$\int_a^b k_n(s, t) x(t) dt = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \{K(s, t) - k_n(s, t)\} x(s) x(t) ds dt &= \int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) x(t) ds dt \\ &= \bar{x}_1 x_1^2 + \bar{x}_2 x_2^2 + \dots + \bar{x}_{n+1} x_{n+1}^2 \geq \bar{x}_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bereits bewiesen.

Eine erste wichtige Folgerung formulieren wir als

Satz I. Für die Summe  $K$  zweier Kerne  $K', K''$  ist

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{x}_{m+n+1} &\leq \bar{x}'_{m+1} + \bar{x}''_{n+1}, & (2) \quad \bar{x}_{m+n+1} &\geq \bar{x}'_{m+1} + \bar{x}''_{n+1}, \\ (3) \quad |\bar{x}_{m+n+1}| &\leq |\bar{x}'_{m+1}| + |\bar{x}''_{n+1}|. \end{aligned}$$

Beweis. Aus den für alle  $x(s)$ , deren Quadratintegral  $\leq 1$  ist, gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K'(s, t) x(s) x(t) ds dt &\leq \bar{x}'_1, \\ \int_a^b \int_a^b K''(s, t) x(s) x(t) ds dt &\leq \bar{x}''_1 \end{aligned}$$

folgt durch Addition

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) x(t) ds dt \leq \bar{x}'_1 + \bar{x}''_1,$$

also insbesondere für  $x(s) = \overset{+}{\varphi}_1(s)$ :

$$\overset{+}{x}_1 \leq \overset{+}{x}'_1 + \overset{+}{x}''_1.$$

Wenden wir diesen Schluß, statt auf  $K'$  und  $K''$ , auf

$$K' - [K']_m^+ \quad \text{und} \quad K'' - [K'']_n^+$$

an, so erhalten wir für den ersten positiven Eigenwert von

$$K^* = K - \{[K']_m^+ + [K'']_n^+\}$$

die Ungleichung

$$\overset{+}{x}_1^* \leq \overset{+}{x}'_{m+1} + \overset{+}{x}''_{n+1}.$$

Da aber nach unserem Lemma

$$\overset{+}{x}_1^* \geq \overset{+}{x}_{m+n+1}$$

ist, ergibt sich daraus (1).

Die Ungleichung (2) folgt aus (1), wenn wir diese auf den Kern  $-K = (-K') + (-K'')$  anwenden.

(3) ist eine Folgerung aus (1) und (2). Sind unter den Zahlen  $x'_1, \dots, x'_m$  nämlich  $m^+$  positive,  $m^-$  negative enthalten und unter den Zahlen  $x''_1, \dots, x''_n$  im ganzen  $n^+$  positive und  $n^-$  negative, so gibt es nach (1) und (2) höchstens  $m^+ + n^+$  Zahlen  $\overset{+}{x}$ , welche  $> |x'_{m+1}| + |x''_{n+1}|$  sind, und unter den Zahlen  $\bar{x}$  finden sich höchstens  $m^- + n^-$ , deren absoluter Betrag oberhalb dieser Grenze liegt. Insgesamt kommen unter den absoluten Beträgen der  $x$  also höchstens  $(m^+ + n^+) + (m^- + n^-)$ , d. i. höchstens  $m + n$  vor, die diese Grenze übersteigen. Daraus folgt (3).

Wählt man insbesondere  $K' = K - k_n$ ,  $K'' = k_n$  und beachtet, daß der  $(n+1)^{\text{te}}$  reziproke Eigenwert von  $k_n$  gewiß  $= 0$  ist, so schließt man aus I. den (das Lemma, von welchem wir ausgingen, verallgemeinernden)

**Satz II.** *Der  $m^{\text{te}}$  positive Eigenwert von  $K - k_n$  ist nicht größer als der  $(n+m)^{\text{te}}$  positive Eigenwert von  $K$ ; der  $m^{\text{te}}$  negative Eigenwert von  $K - k_n$  ist nicht kleiner als der  $(n+m)^{\text{te}}$  negative Eigenwert von  $K$ ; der absolute Betrag des  $m^{\text{ten}}$  Eigenwerts von  $K - k_n$  ist nicht größer als der absolute Betrag des  $(n+m)^{\text{ten}}$  Eigenwerts von  $K$ .*

Der letzte Teil dieses Satzes liefert insbesondere das Resultat, daß die Quadratsumme der reziproken Eigenwerte von  $K - k_n$

$$\geq x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots$$

ist, und damit den auf anderem Wege schon von E. Schmidt bewiesenen\*)

\*) Math. Ann. 63 (1907), S. 467 ff. Man darf wohl behaupten, daß der hier gegebene Beweis tiefer in das Wesen der Sache eindringt als der Schmidtsche; hier zeigt sich nämlich: der wahre Grund dafür, daß die Quadratsumme der reziproken Eigenwerte von  $K - k_n$  größer ist als die Quadratsumme  $x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots$ , ist der, daß jedes einzelne Glied jener ersten Quadratsumme größer ist als das entsprechende Glied

Satz III. Sucht man  $K(s, t)$  mittels solcher Kerne  $k_n(s, t)$ , welche durch bilineare Kombination von höchstens  $n$  Funktionen  $\Phi_p(s)$  entstehen, zu approximieren, so läßt sich der Wert des Fehlerintegrals

$$\int_a^b \int_a^b \{K(s, t) - k_n(s, t)\}^2 ds dt$$

nicht unter

$$\varkappa_{n+1}^2 + \varkappa_{n+2}^2 + \dots$$

herabdrücken.

Aus I. ergeben sich auch solche Sätze wie dieser: daß, wenn der Kern  $K$ , um den es sich handelt, noch in stetiger Weise von einem Parameter  $\alpha$  abhängt,  $\bar{\varkappa}$  und  $\bar{\nu}$  stetig mit  $\alpha$  variieren. Dabei genügt es, die stetige Abhängigkeit des Kernes  $K = K(s, t | \alpha) = K\alpha$  von  $\alpha$  lediglich in dem Sinne zu verlangen, daß

$$\lim_{\alpha' = \alpha} \int_a^b \int_a^b (K\alpha' - K\alpha)^2 ds dt = 0$$

sein soll. Um den Beweis zu führen, nehme man in den Ungleichungen von Satz I. für  $K'$  den Kern  $K\alpha$ , für  $K''$  dagegen  $K\alpha' - K\alpha$ , und setze  $n = 0$ .

Satz IV. Bildet man aus  $K$  mittels einer abteilungsweise stetigen Funktion  $p(s)$ , die den Bedingungen

$$0 \leq p_0 \leq |p(s)| \leq P_0 \quad (p_0, P_0 \text{ Konstante})$$

genügt, den Kern  $K' = K(s, t)p(s)p(t)$ , so gilt

$$\bar{\varkappa}_n \cdot p_0^2 \leq \bar{\varkappa}'_n \leq \bar{\varkappa}_n \cdot P_0^2.$$

Zum Beweise reicht es offenbar aus, die zweite dieser Ungleichungen, und zwar unter der Annahme  $P_0 = 1$ , darzutun. Ist  $x(s)$  irgendeine stetige Funktion, deren Quadratintegral  $\leq 1$  ist, so übersteigt unter dieser Annahme auch das Quadratintegral von  $p(s)x(s)$  niemals den Wert 1, und also ist

$$\int_a^b \int_a^b \{K(s, t) - \bar{\varkappa}_1 \bar{\varphi}_1(s) \bar{\varphi}_1(t) - \dots - \bar{\varkappa}_n \bar{\varphi}_n(s) \bar{\varphi}_n(t)\} \cdot p(s)x(s) \cdot p(t)x(t) \cdot ds dt \leq \bar{\varkappa}'_{n+1}.$$

Der reziproke erste positive Eigenwert von

$$K(s, t)p(s)p(t) - \sum_{h=1}^n \bar{\varkappa}_h \cdot p(s) \bar{\varphi}_h(s) \cdot p(t) \bar{\varphi}_h(t)$$

der zweiten Summe. E. Schmidts Satz bezieht sich übrigens auf beliebige (unsymmetrische) Kerne; aber auch unser Beweis läßt sich auf diesen allgemeineren Fall so gleich übertragen.

ist also  $\leq \bar{x}_{n+1}^+$ , und daraus gestattet das Lemma, die zu beweisende Ungleichung zu erschließen.

Satz V. Ist  $(a_1, b_1)$  ein in  $(ab)$  enthaltenes Intervall, so ist der  $n^{\text{te}}$  positive, zu dem Kern

$$K(s, t) \quad (a_1 \leq \frac{s}{t} \leq b_1)$$

gehörige Eigenwert nicht kleiner als der  $n^{\text{te}}$  positive, zu

$$K(s, t) \quad (a \leq \frac{s}{t} \leq b)$$

gehörige, und der  $n^{\text{te}}$  negative zum Intervall  $(a_1, b_1)$  gehörige Eigenwert nicht größer als der  $n^{\text{te}}$  negative zum Intervall  $(ab)$  gehörige.

Diese Behauptung ist ein spezieller Fall von Satz IV. Um das zu erkennen, braucht man nur diejenige Funktion  $p(s)$  zu bilden, die im Intervall  $(a_1, b_1)$  den Wert 1, außerhalb dieses Intervalls den Wert 0 besitzt. — Lassen wir also das zugrunde gelegte Intervall, das bisher  $(ab)$  war, kontinuierlich zusammenschrumpfen, so fliehen die Eigenwerte  $\lambda$  vom Punkte  $\lambda = 0$  fort. Daß dieser Prozeß stetig vor sich geht, ist durch die Bemerkungen auf S. 447 gewährleistet. Zieht das Intervall sich schließlich auf einen Punkt zusammen, so konvergieren alle Eigenwerte gegen  $(+ \text{ oder } -) \infty$ .

## § 2.

### Invarianz der asymptotischen Eigenwertverteilung gegenüber Addition von Kernen mit dünnerer Eigenwertverteilung. Eigenwerte eines stetig differenzierbaren Kerns.

Aus den eben hergeleiteten Sätzen ergeben sich mannigfache Folgerungen über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, wie hier an einem zwar speziellen, aber für die nachfolgenden Untersuchungen über Differentialgleichungen sehr wichtigen Beispiel gezeigt werden soll.

Satz VI. Gilt für die positiven Eigenwerte von  $K'$  das Gesetz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{x}_n^+ = 1,$$

hingegen für die positiven wie negativen Eigenwerte von  $K''$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n'' = 0,$$

so haben die positiven Eigenwerte von  $K = K' + K''$  asymptotisch die gleiche Verteilung wie die von  $K'$ , d. h. es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{x}_n^+ = 1.$$



Beweis. Es sei  $h$  eine feste ganze positive Zahl. Aus Satz I. folgt

$$x_{(h+1)n+j}^+ \leq x_{hn+j}' + x_{n+1}'' \quad \left( \begin{array}{l} n \text{ beliebig;} \\ j = 1, 2, \dots, h \end{array} \right).$$

Die Voraussetzungen ergeben demnach

$$\limsup_{n=\infty} n x_n^+ \leq \frac{h+1}{h}.$$

Wenden wir andererseits Satz I. auf  $K' = K + (-K'')$  an, so kommt

$$x_{(h+1)n+j}' \leq x_{hn+j}^+ - x_{n+1}'',$$

und daraus folgt

$$\liminf_{n=\infty} n \cdot x_n^+ \geq \frac{h}{h+1}.$$

Da  $h$  jede noch so große ganze Zahl bedeuten kann, muß in der Tat

$$\lim_{n=\infty} n x_n^+ = 1$$

sein.

Falls man durch irgendwelche einfache Reihenentwicklungen (Taylorsche Reihe, Fouriersche Reihe oder dergl.) eine gute Annäherung an den gegebenen Kern  $K(s, t)$  mit Hilfe eines Kernes von dem Art  $k_n(s, t)$  erlangt hat, liefert der Schmidtsche Satz eine Abschätzung der Quadratsumme  $x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots$  und damit auch von  $|x_n|$  nach oben. Wir beweisen z. B.

Satz VII. Ist  $K(s, t)$  im ganzen Quadrat  $a \leq s, t \leq b$  (einschließlich des Randes) stetig nach  $t$  differenzierbar, so ist

$$\lim_{n=\infty} n^{1/2} x_n = 0.$$

Wir teilen das Intervall  $a \leq s \leq b$  ebenso wie  $a \leq t \leq b$  je in  $n$  gleiche Teile. Dadurch zerfällt das Quadrat  $a \leq s, t \leq b$  in  $n^2$  gleiche Quadrate. Die Wertunterschiede von  $\frac{\partial K}{\partial t}$  in jedem einzelnen dieser Quadrate seien dem absoluten Betrage nach  $\leq \varepsilon_n$ ; nach Voraussetzung können wir diese Zahl  $\varepsilon_n$  für jedes  $n$  so wählen, daß  $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$  wird. In jedem der  $n^2$  kleinen Quadrate wählen wir einen Punkt, doch so, daß in zwei Quadraten, die symmetrisch in bezug auf die Diagonale  $s = t$  zueinander liegen, symmetrische Punkte gewählt sind; insbesondere müssen wir also in einem von dieser Diagonale durchschnittenen Quadrat den zu wählenden Punkt auf der Diagonale annehmen. Ist  $q$  eines der  $n^2$  Quadrate und  $s_0, t_0$  der in ihm gewählte Punkt, so entwickeln wir  $K(s, t)$  im Bereich dieses Quadrates nach Potenzen von  $s - s_0, t - t_0$ , wobei wir freilich die Taylorreihe schon mit den linearen Gliedern abbrechen. Wir bekommen dann, wenn  $A, B, C$  die Werte von  $K, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}$  im Punkte  $s_0, t_0$  bedeuten, in  $q$ :

$$(4) \quad |K(s, t) - [A + B(s - s_0) + C(t - t_0)]| \leq 2\varepsilon_n \frac{b-a}{n}.$$

Wir bezeichnen mit  $\Phi_h(s)$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) die  $n$  Funktionen, welche in je einem der  $n$  gleichen Teilintervalle von  $(ab)$  den Wert 1, in den übrigen

den Wert 0 haben, und mit  $\Phi_{n+h}(s)$  ( $h=1, 2, \dots, n$ ) die  $n$  Funktionen, welche in je einem der  $n$  Teilintervalle  $= s$ , in den übrigen  $= 0$  sind. (4) läßt sich dann so deuten, daß wir  $K(s, t)$  durch einen aus den  $2n$  Funktionen  $\Phi_h(s)$  ( $h=1, \dots, 2n$ ) in symmetrischer Weise bilinear kombinierten Kern  $k_{2n}(s, t)$  soweit angenähert haben, daß (abgesehen vielleicht von denjenigen Punkten  $(s, t)$ , die auf den Teilungslinien liegen) überall

$$|K(s, t) - k_{2n}(s, t)| \leq \frac{2\varepsilon_n}{n}(b-a),$$

also jedenfalls

$$\int_a^b \int_a^b (K - k_{2n})^2 ds dt \leq \frac{4\varepsilon_n^2}{n^2}(b-a)^4$$

ist. Mithin liefert Satz III.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots) = 0.$$

Nun ist aber

$$x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots \text{ in inf. } \geq x_{n+1}^2 + \dots + x_{2n}^2 \geq n x_{2n}^2,$$

folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 x_n^2 = 0.$$

Man kann die Voraussetzungen dieses Satzes dahin erweitern, daß man stetige Differenzierbarkeit des Kernes nur im Innern des Quadrates verlangt, außerdem aber die Konvergenz des über das ganze Quadrat zu erstreckenden Integrals von  $\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)^2$  fordert. Wir benutzen dabei den

Hilfssatz\*): Ist  $u(s, t)$  irgendeine im Innern des Quadrates  $0 \leq s, t \leq c$  nach beiden Argumenten stetig differenzierbare Funktion, für welche

$$\int_0^c \int_0^c u ds dt = 0$$

ist, so ist

$$\int_0^c \int_0^c u^2 ds dt \leq \frac{c^2}{\pi^2} \int_0^c \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} ds dt.$$

Dieser Hilfssatz gibt darüber Auskunft, wie weit sich in einem Quadrat eine willkürliche, stetig differenzierbare Funktion  $v$  mittels einer Konstanten  $v_0$  annähern läßt, wenn als Maß der Annäherung das Quadratintegral des Fehlers benutzt wird. Die beste derartige Annäherung erhält man nämlich, falls man für die Konstante  $v_0$  den Mittelwert von  $v$  annimmt. Dann erfüllt  $u = v - v_0$  die Voraussetzung des Hilfssatzes, und es kommt

$$\int_0^c \int_0^c (v - v_0)^2 ds dt \leq \frac{c^2}{\pi^2} \int_0^c \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \right\} ds dt.$$

\*) Er ist die Verallgemeinerung einer von Scheeffer für Funktionen  $u$  von einer Variablen aufgestellten Ungleichung.

Daß der Grad der erreichbaren Annäherung von den Werten der 1. Differentialquotienten abhängig ist, ist selbstverständlich; das Wesentliche des Hilfssatzes liegt darin, daß lediglich das *Integral über die Quadratsumme* der beiden 1. Differentialquotienten auftritt.

Um den Beweis zu führen, stellt man sich das Variationsproblem, das Dirichletsche Integral

$$\iint_0^c \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} ds dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\iint_0^c u^2 ds dt = 1, \quad \iint_0^c u ds dt = 0$$

zu einem Minimum zu machen. Wenn dieses Variationsproblem eine Lösung besitzt (Dirichletsches Prinzip), so muß die Lösung  $u$  einer Differentialgleichung von der Form

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma u = 0 \quad (\gamma \text{ konstant})$$

genügen und die normale Ableitung von  $u$  am Rande des Quadrates verschwinden. Der kleinste, von 0 verschiedene, zu dieser Randbedingung gehörige Eigenwert  $\gamma$  von (5) ist aber  $\gamma = \frac{\pi^2}{c^2}$ . Indem man die willkürliche Funktion  $u$  in eine Fouriersche Cosinnsreihe\*)

$$u = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi}{c} s \cos \frac{n\pi}{c} t \quad (A_{00} = 0)$$

entwickelt, kann man diesen Gedankengang vom Dirichletschen Prinzip (dessen Zulässigkeit hier vielleicht zu Zweifeln Anlaß gäbe) unabhängig machen. Man erhält dann nämlich die Identitäten

$$\begin{aligned} \iint_0^c u^2 ds dt &= \frac{c^2}{4} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} A_{mn}^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{n \neq 0} A_{0n}^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{m \neq 0} A_{m0}^2, \\ \iint_0^c \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} ds dt &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} A_{mn}^2 (m^2 + n^2) + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n \neq 0} A_{0n}^2 n^2 \\ &\quad + \frac{\pi^2}{2} \sum_{m \neq 0} A_{m0}^2 m^2. \end{aligned}$$

\*) D. h. nach den zu der angegebenen Randbedingung gehörigen Eigenfunktionen von (5).

Ein analoger Satz gilt auch, wenn wir das Quadrat von der Seitenlänge  $c$  durch ein beliebiges Rechteck ersetzen. In dem in der Ungleichung auftretenden Faktor  $\frac{c^2}{\pi^2}$  hat man dann unter  $c$  die größere der beiden Seitenlängen des Rechtecks zu verstehen.

Um den Hilfssatz auf  $K(s, t)$  anzuwenden, teilen wir wieder das Quadrat  $\Omega: a \leq s, t \leq b$  in  $n^2$  gleiche Quadrate. In jedem einzelnen dieser Quadrate  $q$  können wir  $K(s, t)$  durch seinen Mittelwert  $C_q$  so gut annähern, daß

$$\iint_q (K(s, t) - C_q)^2 ds dt \leq \frac{(b-a)^2}{n^2 \pi^2} \iint_q \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 \right\} ds dt$$

wird. Dadurch ist  $K(s, t)$  in ganz  $\Omega$  durch symmetrisch-bilineare Kombination der oben eingeführten  $n$  Funktionen  $\Phi_h(s)$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) soweit approximiert, daß das Quadratintegral des Fehlers

$$\leq \frac{(b-a)^2}{n^2 \pi^2} \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 \right\} ds dt = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2(b-a)^2}{\pi^2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 ds dt = \frac{2A}{n^2}$$

ausfällt. Daraus würde zunächst mit

$$n^2(\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \dots) \leq 2A$$

folgen. Man kann aber in  $\Omega$  ein kleineres konzentrisches Quadrat  $\Omega^*$  zeichnen, sodaß  $\Omega$  in  $\Omega^*$  und einen schmalen Rahmen  $\mathfrak{R} = \Omega - \Omega^*$  zerfällt. Während  $n$  über alle Grenzen wächst, soll  $\Omega^*$  nicht geändert werden. Für diejenigen Quadrate  $q$ , welche in  $\Omega^*$  liegen, können wir dann wie früher die Annäherung weiter treiben, indem wir außer der Konstanten auch noch die linearen Glieder der Taylorreihe berücksichtigen. Wir erhalten dann

$$\limsup_{n=\infty} n^2(\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \dots) \leq \frac{2(b-a)^2}{\pi^2} \iint_{\mathfrak{R}} \left( \frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 ds dt,$$

und da der Rahmen  $\mathfrak{R}$  von vornherein beliebig schmal genommen werden konnte, muß in der Tat

$$\lim_{n=\infty} n^2(\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \dots) = 0 \quad \text{und folglich} \quad \lim_{n=\infty} n^{1/2} \alpha_n = 0$$

sein.\*)

Analoge Untersuchungen lassen sich im zweidimensionalen Falle anstellen. Es sei

$$K(s_1 s_2, t_1 t_2) \left[ \begin{array}{l} (s_1 s_2) \text{ in } J \\ (t_1 t_2) \text{ in } J \end{array} \right]$$

\*) Wir wären hier durch Benutzung der Fourierschen an Stelle der Taylorsche Reihe etwas rascher zum Ziele gekommen. Wir brauchen aber die im Text gewählte Beweisführung zur Erledigung des zweidimensionalen Falls.

ein symmetrischer Kern, für den in ganz  $JJ$  die Differentialquotienten  $\frac{\partial K}{\partial t_1}, \frac{\partial K}{\partial t_2}$  stetig sind.  $JJ$  bedeutet denjenigen abgeschlossenen Bereich im vierdimensionalen  $s_1 s_2, t_1 t_2$ -Raum, der durch die Bedingungen

$$(s_1 s_2) \text{ in } J, \quad (t_1 t_2) \text{ in } J$$

definiert ist. Wir wollen zunächst voraussetzen, daß  $J$  aus endlichvielen, etwa  $\Lambda$ , kongruenten Quadraten zusammengesetzt ist. Indem wir jedes dieser Quadrate in  $n^2$  gleiche kleinere Quadrate einteilen und diese Teilung sowohl in der  $(s_1 s_2)$ -, als auch in der  $(t_1 t_2)$ -Ebene ausführen, geht daraus eine Einteilung von  $JJ$  in  $\Lambda^2 n^4$  kongruente (vierdimensionale) Würfel hervor. In jedem dieser Würfel wählen wir unter Wahrung der Symmetrie in bezug auf die „Diagonale“  $(s_1 s_2) = (t_1 t_2)$  einen Punkt  $(s_1^0 s_2^0 t_1^0 t_2^0)$  und entwickeln  $K$  im Bereiche dieses Würfels nach Potenzen von  $s_1 - s_1^0, s_2 - s_2^0, t_1 - t_1^0, t_2 - t_2^0$ , brechen diese Entwicklung aber bereits mit den linearen Gliedern ab. Dadurch gelingt es,  $K$  durch symmetrisch-bilineare Kombination von  $3\Lambda n^2$  Funktionen soweit zu approximieren, daß das über ganz  $JJ$  erstreckte Quadratintegral des Fehlers  $\leq \frac{\varepsilon_n^2}{n^2}$  ( $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ) wird. Es ist also

$$\lim_{n=\infty} n(x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots) = 0, \quad \lim_{n=\infty} n x_n = 0.$$

Indem wir unsern Hilfssatz auf vier Dimensionen übertragen, gelangen wir zu dem Ergebnis, daß für das Bestehen dieser Limesgleichung nur erforderlich ist, daß die Differentialquotienten  $\frac{\partial K}{\partial t_1}, \frac{\partial K}{\partial t_2}$  im Innern von  $JJ$  stetig sind, wenn außerdem das über ganz  $JJ$  zu erstreckende Integral von  $\left(\frac{\partial K}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t_2}\right)^2$  konvergiert.

Ist die Begrenzung von  $J$  kein „Treppenpolygon“, so müssen wir  $J$  durch Quadrate auszuschöpfen und uns mit dem Exhaustionsrest durch irgendwelche Schätzungen abzufinden suchen. Ich nehme an, daß die Begrenzung von  $J$  aus einer rektifizierbaren Kurve von der Länge  $L$  besteht. Wir überdecken die ganze  $s_1 s_2$ -Ebene in der bekannten Weise mit einem Quadratnetz von der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$ . Den „Exhaustionsrest“  $R_n$ , welcher von  $J$  nachbleibt, wenn man alle ganz im Innern von  $J$  gelegenen Quadrate des Quadratnetzes entfernt, hat einen Flächeninhalt  $\leq \frac{4L}{n}$ .\*) Wenn der Kern  $K$  in ganz  $JJ$  zwischen endlichen Grenzen läge, würde also

$$n^2 \cdot \iint_{R_n} \iint_{R_n} K^2 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2$$

\*) Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse (2<sup>e</sup> éd., Paris 1893), I, S. 107, oder S. 455 dieser Arbeit.

absolut für alle  $n$  unterhalb einer festen Schranke bleiben. Ich will hier nur voraussetzen, daß

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \iint_{R_n} \iint_{R_n} K^2 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 = 0$$

ist.

Statt eines Quadratnetzes von der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$  bediene ich mich jetzt eines solchen von der Länge  $\frac{1}{n^2}$ . Die ganz innerhalb  $J$  gelegenen Quadrate dieser Einteilung, deren Anzahl höchstens  $J \cdot n^4$  ist, lassen sich, wie sogleich näher ausgeführt werden wird, derart zu Rechtecken mit lauter Seitenlängen  $\leq \frac{1}{n}$  zusammenfassen, daß sich die Anzahl solcher Rechtecke höchstens auf  $(J + 8L)n^2$  beläuft. Diese Rechtecke bezeichne ich in irgendwelcher Numerierung mit  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Zur Vereinfachung der Schreibweise denke ich mir  $J + 8L \leq 1$ . Nunmehr spalte ich  $K$  in einer von dem Index  $n$  abhängigen Weise in zwei Teile

$$K = K^{(n)} + \overset{*}{K}^{(n)}:$$

$\overset{*}{K}^{(n)}$  soll, wenn  $(s_1 s_2), (t_1 t_2)$  beide in dem Exhaustionsrest  $R_{n^2}$  gelegen sind, mit  $K$  übereinstimmen, für alle andern Wertequadrupel  $(s_1 s_2, t_1 t_2)$  aber  $= 0$  sein. Es ist also

$$\left(\overset{*}{K}_1^{(n)}\right)^2 + \left(\overset{*}{K}_2^{(n)}\right)^2 + \dots = \iint_{R_{n^2}} \iint_{R_{n^2}} K^2 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2,$$

folglich

$$n^4 \cdot \left(\overset{*}{K}_{n^2}^{(n)}\right)^2 \leq n^2 \cdot \iint_{R_{n^2}} \iint_{R_{n^2}} K^2 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2$$

und zufolge der Voraussetzung (6), in der wir  $n$  durch  $n^2$  ersetzen,

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \overset{*}{K}_{n^2}^{(n)} = 0.$$

Um  $K^{(n)}$  anzunähern, bedienen wir uns der Funktion  $\Phi_i(s_1 s_2)$ , die in  $q_i$  gleich 1, im übrigen  $= 0$  ist, und einer Funktion  $\Psi_i(s_1 s_2)$ , die, falls  $(s_1 s_2)$  in  $R_{n^2}$  gelegen ist, durch den Mittelwert

$$\frac{\iint_{q_i} K(s_1 s_2, t_1 t_2) dt_1 dt_2}{\iint_{q_i} dt_1 dt_2}$$

erklärt wird und für andere Punkte  $(s_1 s_2)$  gleich Null ist. Dann wird nach unserm (auf Rechtecke übertragenen) Hilfssatz für alle  $(s_1 s_2)$  in  $R_{n^2}$ :

$$\iint_{q_i} \{K(s_1 s_2, t_1 t_2) - \Psi_i(s_1 s_2)\}^2 dt_1 dt_2 \leq \frac{1}{\pi^2 n^2} \iint_{q_i} \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t_2}\right)^2 \right\} dt_1 dt_2,$$

mithin

$$\begin{aligned} & \iint_{R_{n^2}} \iint_{q_i} \{K(s_1 s_2, t_1 t_2) - \Psi_i(s_1 s_2)\}^2 dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 \\ & \leq \frac{1}{\pi^2 n^2} \iint_{R_{n^2}} \iint_{q_i} \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t_2} \right)^2 \right\} dt_1 dt_2 ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Wenden wir die vierdimensionale Verallgemeinerung jenes Hilfssatzes auf die Parallelepipede  $q_i q_k$  im Raum von vier Dimensionen an, so stellt sich heraus, daß wir durch symmetrisch-bilineare Kombination der höchstens  $2n^2$  Funktionen  $\Phi_i(s_1 s_2)$ ,  $\Psi_i(s_1 s_2)$  den Kern  $K^{(n)}$  soweit annähern können, daß das Integral des Fehlerquadrats

$$\leq \frac{2}{\pi^2 n^2} \iint_{J'} \iint_{J'} \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t_2} \right)^2 \right\} dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 = \frac{2A}{n^2}$$

wird. Demnach ist

$$(8) \quad 2n^2 \cdot (\kappa_{4n^2}^{(n)})^2 \leq \frac{2A}{n^2}, \quad |\kappa_{4n^2}^{(n)}| \leq \frac{\sqrt{A}}{n^2}.$$

Durch die gleiche Schlußweise, wie sie uns zum Beweis von Satz VI diente, erhalten wir aus (7) und (8) die Ungleichung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n |\kappa_n| \leq 4\sqrt{A}.$$

Es braucht nicht noch einmal auseinandergesetzt zu werden, wie man daraus auch die schärfere Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \kappa_n = 0$$

gewinnen kann.

Wohl aber bleibt noch die Konstruktion der Rechtecke  $q_i$  zu beschreiben. Zunächst nehme man eine Einteilung in Quadrate von der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$  vor; die ganz im Innern von  $J$  gelegenen dieser Quadrate rechne man zu den Rechtecken  $q_i$ ; ihre Anzahl ist höchstens  $Jn^2$ . Die Anzahl derjenigen Quadrate der  $\frac{1}{n}$ -Teilung aber, welche Punkte mit der Randkurve  $\mathfrak{C}$  von  $J$  gemein haben, ist höchstens  $4Ln$  (wir setzen dabei  $n \geq \frac{3}{L}$  voraus). Bildet man nämlich\* die ganze Zahl

$$m = [Ln] + 1$$

und teilt  $\mathfrak{C}$  in  $m$  gleiche Bogen (deren Länge also  $= \frac{L}{m} < \frac{1}{n}$  ist), so kann ein einzelner dieser Bogen höchstens mit je vier Quadraten Punkte gemein haben. Da ferner von den höchstens vier Quadraten, in die ein solcher Teilbogen eintritt, mindestens eines mit einem derjenigen Quadrate identisch

ist, in die der nächstfolgende Teilbogen eintritt, brauchen wir pro Teilbogen auf höchstens drei Quadrate zu rechnen. Die gesuchte Anzahl der an  $\mathcal{C}$  anstoßenden Quadrate ist also

$$\leq 3m \leq 3Ln + 3 \leq 4Ln.*)$$

Wir betrachten jetzt ein einzelnes der Quadrate  $Q$  von der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$ , das Punkte mit  $\mathcal{C}$  gemein hat, und nehmen mit ihm eine feinere Teilung in Quadrate von der Seitenlänge  $\frac{1}{n^2}$  vor, die in  $n$  Schichten von je  $n$  Quadraten übereinander liegen. Ich entferne von diesen kleineren Quadraten alle diejenigen — ihre Anzahl heiße  $H$  —, welche an  $\mathcal{C}$  stoßen. Dadurch, daß aus einer einzelnen Schicht  $h$  Quadrate entfernt werden, zerfällt diese Schicht in höchstens  $h + 1$  Rechtecke. Der Rest, der von  $Q$  nach Entfernung der  $H$  kleinen Quadrate nachbleibt, besteht daher aus höchstens  $H + n$  Rechtecken, von denen wir jetzt nur diejenigen als Rechtecke  $q_i$  beibehalten, die im Innern von  $J$  liegen. Führen wir diesen Prozeß für alle Randquadrate  $Q$  der  $\frac{1}{n}$ -Teilung aus, so bekommen wir aus diesen höchstens

$$\sum_q H + n \cdot \sum_q 1 \leq 4Ln^2 + n \cdot 4Ln = 8Ln^2$$

Rechtecke  $q_i$ .

Es ändert an unseren Betrachtungen nichts, wenn  $J$  nicht von einer einzigen Kurve begrenzt, sondern ein von endlichvielen rektifizierbaren geschlossenen Linien berandeter mehrfach zusammenhängender Bereich ist.

Auch kann man untersuchen, welche schärferen Aussagen sich über die Verteilung der Eigenwerte machen lassen, falls der Kern nicht nur einmal, sondern zweimal, dreimal usf. differenzierbar ist.\*\*) Ich beschränke mich jedoch hier auf dasjenige, was zum Studium der Eigenwertverteilung von Differentialgleichungen 2. Ordnung erforderlich ist.

### § 3.

#### Asymptotisches Gesetz der Eigenwerte der gewöhnlichen Schwingungsgleichung in der Ebene, für die Randbedingungen

$$u = 0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Satz VIII. *Es sei  $J$  ein von endlichvielen geschlossenen rektifizierbaren Kurven begrenztes ebenes Gebiet vom Flächeninhalt  $J$ . Die zu diesem Ge-*

\*) Diese Überlegung rührt von Herrn C. Jordan her, l. c. S. 107.

\*\*) Vgl. meine oben zitierte Note in den Göttinger Nachrichten.



biet  $J$  und der Randbedingung  $u = 0$  gehörigen Eigenwerte  $\lambda_n$  der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

wachsen, wenn man sie ihrer Größe nach anordnet, mit dem Index  $n$  so ins Unendliche, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{J}{4\pi}$$

wird.

Es sei gestattet, in diesem Paragraphen die innerhalb  $J$  variierenden Punkte nicht mit  $(s_1, s_2)$ ,  $(t_1, t_2)$  wie bisher, sondern mit  $(xy)$ ,  $(\xi\eta)$  zu bezeichnen.  $\Delta u$  ist der Differentialausdruck  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Die Eigenwerte  $\lambda_n$ , welche sämtlich positiv sind, sind zugleich Eigenwerte eines symmetrischen Kerns

$$\frac{1}{2\pi} G(xy, \xi\eta) \quad [(xy) \text{ in } J, (\xi\eta) \text{ in } J],$$

der zu  $J$  gehörigen „Greenschen Funktion 1. Art“. Dieselbe existiert für jedes beliebige, ganz im Endlichen gelegene Gebiet  $J$ , wie man in bekannter Weise zeigt, indem man  $J$  etwa durch Bereiche  $J^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots$ , in inf.), deren jeder nur aus endlichvielen Quadraten besteht, ausschöpft. Schreiben wir

$$G = \lg \frac{1}{r} - A, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

so ist für jeden festen, innerhalb  $J$  gelegenen Punkt  $(xy)$   $A$  hinsichtlich  $(\xi\eta)$  eine in  $J$  reguläre Potentialfunktion, deren Randwerte mit denen von  $\lg \frac{1}{r}$  übereinstimmen. Nehmen wir an (was ja offenbar keine Einschränkung ist), daß die Entfernung irgend zweier Punkte von  $J$  stets  $< 1$  ist, so muß  $\lg \frac{1}{r}$  eine Majorante von  $G$ , d. h.

$$(9) \quad 0 \leq G < \lg \frac{1}{r}, \quad 0 < A \leq \lg \frac{1}{r}$$

sein. Beschreibt man um den festen Punkt  $(xy)$  einen Kreis  $\mathfrak{k}$  vom Radius  $\varrho_1$ , dessen Peripherie noch ganz innerhalb  $J$  liegt, so ist diejenige Funktion  $w$  von  $(\xi\eta)$ , welche außerhalb dieses Kreises  $= \lg \frac{1}{r}$ , im Innern von  $\mathfrak{k}$  aber konstant, nämlich  $= \lg \frac{1}{\varrho_1}$  ist, eine in  $J$  überall stetige, mit abteilungsweise stetigen ersten Differentialquotienten versehene Funktion, welche dieselben Randwerte wie  $A$  besitzt. Folglich ist nach dem Dirichletschen Prinzip

$$\begin{aligned} \iint_J \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta &< \iint_J \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta \\ &= \iint_{\mathfrak{k}} \frac{d\xi d\eta}{r^2} \leq 2\pi \cdot \lg \frac{1}{\varrho_1}. \end{aligned}$$

Bezeichnet  $\varrho = \varrho(xy)$  die kürzeste Entfernung des Punktes  $(xy)$  vom Rande des Gebietes  $J$ , so haben wir damit die Ungleichung

$$(10) \quad \iint \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \leq 2\pi \lg \frac{1}{\varrho}.$$

Wenn man Bedenken trägt, diese Schlußweise auf das Gebiet  $J$  selbst anzuwenden, so ist sie doch für Bereiche von der Art  $J^{(n)}$  sicher zulässig, und das genügt bereits, um die Ungleichung (10) herzuleiten.

Sie lehrt, daß die wesentliche Voraussetzung, um aus § 2 für die reziproken Eigenwerte  $\alpha_n$  von  $A$  die Limesgleichung

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha_n = 0$$

erschließen zu können, — nämlich die Voraussetzung, daß das Integral

$$\iint \iint \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta dx dy \left( \leq 2\pi \iint \lg \frac{1}{\varrho} dx dy \right)$$

konvergiert, — hier erfüllt ist. Aber auch die akzessorische Bedingung (6) trifft für den Kern  $A$  zu. Spaltet man nämlich das über den Exhaustionsrest  $R_n$  erstreckte Integral

$$\iint_{R_n} A^2 d\xi d\eta \leq \iint_{R_n} (\lg r)^2 d\xi d\eta$$

so in zwei Teile, daß man zuerst über den innerhalb des Kreises  $|r| \leq \frac{1}{n}$ , darauf über den außerhalb dieses Kreises gelegenen Teil von  $R_n$  integriert, so ergibt sich

$$\iint_{R_n} A^2 d\xi d\eta \leq \frac{\pi}{n^2} \left[ \frac{1}{2} + (\lg n)^2 \right] + (\lg n)^2 \iint_{R_n} d\xi d\eta \leq M \frac{(\lg n)^2}{n},$$

wo die Konstante  $M$  weder von  $n$  noch von der Lage des Punktes  $(xy)$  abhängt. Folglich wird

$$\iint_{R_n} \iint_{R_n} A^2 d\xi d\eta dx dy \leq 4LM \left( \frac{\lg n}{n} \right)^2.$$

Um also Satz VIII zu beweisen, können wir zufolge der oben bewiesenen Limesgleichung (11) und dem Wortlaut des Satzes VI den Kern  $\frac{1}{2\pi} G(xy, \xi\eta)$  durch den einfacheren

$$\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} [(xy) \text{ in } J, (\xi\eta) \text{ in } J]$$

ersetzen. Die reziproken positiven Eigenwerte dieses Kerns bezeichne ich

mit  $\ddot{x}_n$ , oder, wo die Abhängigkeit vom Gebiete  $J$  zum Ausdruck kommen soll, mit  $\ddot{x}_n(J)$ . Wir haben zu zeigen, daß

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ddot{x}_n = \frac{J}{4\pi}$$

ist.

Sind  $J'$ ,  $J''$  zwei je aus endlichvielen kongruenten Quadraten bestehende Gebiete, von denen das eine,  $J'$ , in  $J$  enthalten ist, während das andere,  $J''$ ,  $J$  umfaßt, so ist nach Satz V.

$$\ddot{x}_n(J') \leq \ddot{x}_n(J) \leq \ddot{x}_n(J'')$$

Wenn nun die Tatsache (12) für Gebiete  $J$ , die aus endlichvielen kongruenten Quadraten bestehen, erwiesen ist, so wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n(J') = \frac{J'}{4\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n(J'') = \frac{J''}{4\pi},$$

also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n(J) \geq \frac{J'}{4\pi}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n(J) \leq \frac{J''}{4\pi}.$$

Da wir aber dafür Sorge tragen können, daß sich die Flächeninhalte  $J'$ ,  $J''$  um beliebig wenig von  $J$  unterscheiden, so muß dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n(J) = \frac{J}{4\pi}$$

sein. Wir dürfen also beim Beweise von (12) annehmen, daß  $J$  aus endlichvielen kongruenten Quadraten  $q_i$  besteht. Die Seitenlänge der  $q_i$  können wir dabei = 1 setzen; dann bedeutet  $J$  ihre Anzahl.

Wir spalten jetzt  $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r}$  in mehrere Teile:

$$\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} = K^{(0)} + \sum K^{(h_i)}$$

$K^{(0)}$  ist =  $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r}$ , wenn  $(xy)$ ,  $(\xi\eta)$  in einem und demselben der  $J$  Quadrate  $q$  gelegen sind, sonst = 0.  $K^{(h_i)}$  ( $1 \leq h < i \leq J$ ) ist =  $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r}$ , wenn  $(xy)$  in  $q_h$ ,  $(\xi\eta)$  in  $q_i$  oder  $(xy)$  in  $q_i$ ,  $(\xi\eta)$  in  $q_h$  liegt, sonst = 0. Wenn die Quadrate  $q_h$  und  $q_i$  nicht aneinanderstoßen, ist selbstverständlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ddot{x}_n^{(h_i)} = 0$$

(die  $\ddot{x}_n^{(h_i)}$  nehmen mit wachsendem  $n$  dann sogar stärker ab als jede noch so hohe Potenz von  $\frac{1}{n}$ ). Diese Limesgleichung besteht aber auch, wenn  $q_h$ ,  $q_i$  aneinandergrenzen. Dazu ist nur die Feststellung nötig, daß das Integral

$$\iint_{q_h} \iint_{q_i} \left\{ \left( \frac{\partial \lg r}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lg r}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta dx dy = \iint_{q_h} \iint_{q_i} \frac{1}{r^2} d\xi d\eta dx dy$$

konvergiert. Können wir für  $K^{(o)}$  die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \chi_n^{(o)} = \frac{J}{4\pi}$$

erweisen, so wäre damit auch die Richtigkeit von Satz VIII. dargetan.

Nun ist aber klar: wenn

$$\chi_1^{(oo)}, \chi_2^{(oo)}, \chi_3^{(oo)}, \dots$$

die Reihe der reziproken positiven Eigenwerte des Kernes

$$(13) \quad \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} \quad (0 \leq x, y \leq 1)$$

ist, so lautet die Reihe  $\chi_1^{(o)}, \chi_2^{(o)}, \dots$ , so:

$$\underbrace{\chi_1^{(oo)}, \chi_1^{(oo)}, \dots, \chi_1^{(oo)}}_{J \text{ mal}}, \quad \underbrace{\chi_2^{(oo)}, \chi_2^{(oo)}, \dots, \chi_2^{(oo)}}_{J \text{ mal}}, \quad \underbrace{\chi_3^{(oo)}, \chi_3^{(oo)}, \dots, \chi_3^{(oo)}}_{J \text{ mal}}, \dots$$

Daher kommt alles darauf an, einzusehen, daß

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \chi_n^{(oo)} = \frac{1}{4\pi}.$$

Bezeichnet  $g$  die zu dem Einheitsquadrat und der Randbedingung  $u=0$  gehörige Greensche Funktion, so werden die Eigenwerte von  $\frac{1}{2\pi}g$ , jeder in seiner richtigen Vielfachheit, durch die Formel

$$\pi^2(m^2 + n^2) \quad \left[ \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right]$$

geliefert. Würde  $\chi_n^{(oo)}$  den reziproken  $n^{\text{ten}}$ . (positiven) Eigenwert von  $\frac{1}{2\pi}g$  bedeuten, so ergäbe sich aus dieser Darstellung auf Grund einer bekannten einfachen „zahengeometrischen“ Betrachtung das asymptotische Gesetz (14). Da aber die Differenz

$$\lg \frac{1}{r} - g = a$$

die Eigenschaft besitzt, daß das sowohl nach  $\xi\eta$  als nach  $xy$  über das Einheitsquadrat erstreckte Integral von

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta}\right)^2$$

konvergiert, so ändert der Umstand, daß in Wahrheit  $\chi_n^{(oo)}$  die reziproken positiven Eigenwerte von (13) bedeutet, nichts an dieser Tatsache (14). Damit ist Satz VIII. bewiesen.

Von anderen Randbedingungen will ich hier noch diejenige besprechen, welche verlangt, daß die normale Ableitung am Rande  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$

ist, und dabei annehmen, daß die Randkurve  $\mathfrak{C}$  des Gebietes  $J$  stetige Krümmung besitzt. Die zugehörige Greensche Funktion zweiter Art

$$H = \lg \frac{1}{r} + B$$

wird bestimmt, indem man für ein festes  $(xy)$   $B$  als eine solche reguläre Potentialfunktion der Variablen  $(\xi\eta)$  in  $J$  wählt, daß die nach der (inneren) Normalen  $n$  genommene Ableitung von  $B$  gleich der um  $\frac{2\pi}{L}$  vermehrten normalen Ableitung von  $\lg r$  ist, und eine dabei zur Verfügung bleibende additive Konstante so nimmt, daß das um  $\mathfrak{C}$  erstreckte Randintegral von  $H$ ,  $\int_{\mathfrak{C}} H(xy; s) ds = 0$  wird. Dann ist  $B$  symmetrisch, und man findet

$$\begin{aligned} \iint_J \left\{ \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta &= - \int_{\mathfrak{C}} B(xy; s) \frac{\partial B}{\partial n_s}(xy; s) ds \\ &= - \int_{\mathfrak{C}} B(xy; s) \left[ \frac{2\pi}{L} + \frac{\partial \lg r}{\partial n_s}(xy; s) \right] ds. \end{aligned}$$

Da

$$\int_{\mathfrak{C}} \left| \frac{\partial \lg r}{\partial n_s}(xy; s) \right| ds,$$

die totale Schwankung („variation totale“) des zum Punkt  $(xy)$  als Pol gehörigen Azimuts auf  $\mathfrak{C}$ , für alle  $(xy)$  unterhalb einer endlichen Grenze liegt, und für Punkte  $(\xi\eta) = s$  auf dem Rande

$$B(xy; s) = \lg \frac{1}{r}(xy; s) + E(xy; s)$$

gilt, wo  $E$  für alle  $s$  und alle  $(xy)$  endlich bleibt\*), ergibt sich hieraus eine Ungleichung

$$\iint_J \left\{ \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta < M \cdot \lg \frac{2}{\rho},$$

in der  $\rho$  wieder der kürzesten Abstand des Punktes  $(xy)$  von  $\mathfrak{C}$  und  $M$  eine von  $(xy)$  unabhängige Konstante ist. Ferner gilt\*)

$$\begin{aligned} B(xy; \xi\eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{C}} \lg r(xy; s) \frac{\partial \lg r}{\partial n_s}(\xi\eta; s) ds + E_1(xy; \xi\eta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{C}} \lg r(\xi\eta; s) \frac{\partial \lg r}{\partial n_s}(xy; s) ds + E_1(xy; \xi\eta), \end{aligned}$$

wo  $E_1(xy; \xi\eta)$  in ganz  $JJ$  beschränkt bleibt. Da sich unser früheres  $\mathcal{A}$

\*) E. E. Levi, Gött. Nachr., 16. Mai 1908.

in derselben Weise darstellen läßt, schließen wir hieraus für  $B$  eine Ungleichung der Form

$$|B| < M_1 + \lg \frac{1}{r},$$

wobei  $M_1$  weder von  $(xy)$  noch von  $(\xi\eta)$  abhängt. Diese Abschätzungen genügen, um zu erkennen, daß die Eigenwerte von  $H$  in ihrer asymptotischen Verteilung mit denjenigen von

$$\lg \frac{1}{r} [(xy) \text{ in } J, (\xi\eta) \text{ in } J]$$

übereinstimmen, und der Satz VIII. bleibt also unverändert gültig, wenn die Randbedingung  $u = 0$  durch  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  ersetzt wird.

Von diesem Resultat machen wir noch eine Anwendung auf die Fragestellung des § 2. Sind

$$\psi_0(s_1 s_2) = \frac{1}{\sqrt{J}}, \psi_1(s_1 s_2), \psi_2(s_1 s_2), \dots$$

die zu  $\Delta u + \mu u = 0$ , dem Gebiet  $J$  der  $(s_1 s_2)$ -Ebene und der Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  gehörigen normierten Eigenfunktionen, in derjenigen Reihenfolge geschrieben, wie sie zu den wachsend geordneten Eigenwerten  $\mu_0 = 0, \mu_1, \mu_2, \dots$  gehören, so werden die sämtlichen, zu der analogen Differentialgleichung und der analogen Randbedingung für das Gebiet  $JJ$  des vierdimensionalen  $s_1 s_2 t_1 t_2$ -Raumes berechneten Eigenwerte und Eigenfunktionen durch die Formeln

$$\mu_h + \mu_i, \quad \psi_h(s_1 s_2) \psi_i(t_1 t_2) \quad [h, i = 0, 1, 2, \dots]$$

geliefert. Bilden wir

$$c_{hi} = \iiint\int K(s_1 s_2 t_1 t_2) \psi_h(s_1 s_2) \psi_i(t_1 t_2) ds_1 ds_2 dt_1 dt_2,$$

so wird

$$(15) \quad \iiint\int \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial s_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial s_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial t_2} \right)^2 \right\} ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 \\ = \sum_{(h,i)} c_{hi}^2 (\mu_h + \mu_i),$$

$$(16) \quad \iiint\int \left\{ \sum_{h,i=0}^n c_{hi} \psi_h(s_1 s_2) \psi_i(t_1 t_2) \right\}^2 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 = \sum_{h,i=0}^{\infty} c_{hi}^2 - \sum_{h,i=0}^n c_{hi}^2.$$

Indem wir die Konvergenz von (15) berücksichtigen, folgt daraus, daß die mit  $\mu_{n+1}$  multiplizierte linke Seite von (16) mit wachsendem  $n$  gegen Null konvergiert, und da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi n}{\mu_n} = J$$

ist, ergibt sich für die reziproken Eigenwerte  $\kappa_n$  von  $K$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\kappa_{n+1}^2 + \kappa_n^2 + \dots) = 0.$$

Dieser Beweis, der die Voraussetzung (6) von § 2 als überflüssig erscheinen läßt, ist jedoch nur unter der Voraussetzung einer Randkurve  $\mathcal{C}$  mit stetiger Krümmung stringent und macht übrigens von den Resultaten des § 2 für den besonderen Kern  $B(xy; \xi\eta)$  Gebrauch.

#### § 4.

### Analoge Untersuchungen für die allgemeine sich selbst adjungierte Differentialgleichung.

Wir wenden uns zum Studium der Eigenwerte der allgemeinen sich selbst adjungierten linearen Differentialgleichung vom elliptischen Typus:

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\lambda k - q) u = 0.$$

$p, q, k$  sind Funktionen, die in ganz  $J$  einschließlich des Randes stetig sind und außerdem soll  $p > 0, k > 0$  sein.\* Wir wollen  $p$  als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen. Als Randbedingung nehmen wir  $u = 0$ . Die zweckmäßigste Art, die Greensche Funktion des Differentialausdrucks

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) - qu$$

zu bestimmen, besteht in der Einführung von  $v = u\sqrt{p}$ . So erhält man nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{p}} L(u) \equiv \Delta v - v \left( \frac{q}{p} + \frac{\Delta\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right),$$

und der rechts stehende Differentialausdruck ist dadurch, daß die ersten Differentialquotienten  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  nicht vorkommen, besonders bequem. Ich setze zur Abkürzung

$$\frac{q}{p} + \frac{\Delta\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = l(xy).$$

Hat  $G(xy, \xi\eta)$  die frühere Bedeutung als Greensche Funktion von  $\Delta u$ , so lösen wir jetzt die folgende Integralgleichung für die Unbekannte  $\Gamma(xy, \xi\eta)$ :

\* Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf dann auch  $q \geq 0$  angenommen werden; dann sind die Eigenwerte von (17) alle positiv.

$$(18) \quad \Gamma(xy, \xi\eta) + \frac{1}{2\pi} \iint G(xy, \xi\eta) l(xy) \Gamma(\xi\eta, \xi\eta) d\xi d\eta = G(xy, \xi\eta).$$

Dann ist

$$(19) \quad \frac{1}{2\pi} \Gamma(xy, \xi\eta) \sqrt{\frac{k(xy)}{p(xy)} \cdot \frac{k(\xi\eta)}{p(\xi\eta)}} \quad [(xy) \text{ in } J, (\xi\eta) \text{ in } J]$$

ein Kern, der die gleichen Eigenwerte  $\lambda = \lambda_n$  besitzt wie die Differentialgleichung (17). Für diese wollen wir das asymptotische Gesetz

$$(20) \quad \lim_{n=\infty} \frac{4\pi n}{\lambda_n} = \iint \frac{k(xy)}{p(xy)} dx dy$$

beweisen.

Aus der Gleichung (18) folgt — was weiter unten noch genauer ausgeführt werden soll —, daß der mit  $n$  multiplizierte  $n^{\text{te}}$  reziproke Eigenwert von  $\Gamma - G$  und also auch (s. Satz IV) das  $n$ -fache des  $n^{\text{ten}}$  reziproken Eigenwerts von

$$(\Gamma - G) \sqrt{\frac{k(xy)}{p(xy)} \cdot \frac{k(\xi\eta)}{p(\xi\eta)}}$$

mit  $n = \infty$  gegen Null konvergiert, sodaß beim Beweis von (20) der Kern (19) durch

$$\frac{1}{2\pi} G \cdot \sqrt{\frac{k(xy)}{p(xy)} \cdot \frac{k(\xi\eta)}{p(\xi\eta)}}$$

und schließlich durch

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi} \left( \lg \frac{1}{r(xy, \xi\eta)} \right) \sqrt{\frac{k(xy)}{p(xy)} \cdot \frac{k(\xi\eta)}{p(\xi\eta)}}$$

ersetzt werden darf. Die reziproken positiven Eigenwerte dieses Kerns (21) will ich hier mit  $\lambda_n^+$  bezeichnen.

Um das asymptotische Gesetz der  $\lambda_n^+$  abzuleiten, stützen wir uns auf Satz IV. Wir teilen  $J$  in eine endliche Anzahl kleiner Bereiche  $J_i$ .  $m_i$  und  $M_i$  mögen das Minimum bez. Maximum der Funktion  $\frac{k}{p}$  in  $J_i$  bedeuten.  $K^{(i)}$  bezeichne denjenigen Kern, der mit (21) übereinstimmt, falls  $(xy), (\xi\eta)$  beide in  $J_i$  liegen, der sonst aber = 0 ist. Die Summe  $\sum_i K^{(i)}$  bezeichne ich mit  $K^*$ . Das  $n$ -fache des  $n^{\text{ten}}$  reziproken Eigenwerts von  $K - K^*$  konvergiert gegen Null. Nach den Untersuchungen von § 3 und Satz IV. ist andererseits

$$\limsup_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^{+(i)} \leq M_i J_i, \quad \liminf_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^{+(i)} \geq m_i J_i.$$

Die Reihe der reziproken positiven Eigenwerte  $\lambda_n^{+*}$  von  $K^*$  kommt zu Stande, indem wir die sämtlichen  $\lambda_n^{+(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ihrer Größe nach anordnen. Infolgedessen ist



$$\limsup_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^* \leq \sum_i M_i J_i, \quad \liminf_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^* \geq \sum_i m_i J_i$$

und, gemäß der Bemerkung über die Eigenwerte von  $K - K^*$ , auch

$$\limsup_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^\dagger \leq \sum_i M_i J_i, \quad \liminf_{n=\infty} 4\pi n \cdot \lambda_n^\dagger \geq \sum_i m_i J_i.$$

Diese Ungleichungen gelten für jede noch so feine Teilung in Bereiche  $J_i$ , obwohl  $\lambda_n^\dagger$  von einer solchen Teilung gänzlich unabhängig ist, und folglich muß

$$\lim_{n=\infty} 4\pi n \lambda_n^\dagger = \iint_J \frac{k(xy)}{p(xy)} dx dy$$

sein. Wir haben damit das Resultat:

Satz IX. Die zu dem Gebiet  $J$  und der Randbedingung  $u = 0$  gehörigen Eigenwerte  $\lambda_n$  der Differentialgleichung (17) vom elliptischen Typus genügen, ihrer Größe nach angeordnet, der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{4\pi n}{\lambda_n} = \iint_J \frac{k(xy)}{p(xy)} dx dy.$$

Der Nachweis dafür, daß der  $n^{\text{te}}$  reziproke Eigenwert von  $\Gamma - G$  stärker gegen Null geht als  $\frac{1}{n}$ , läßt sich sehr schön so erbringen. Sind  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots$  die zu  $\Delta u$ , dem Gebiet  $J$  und der Randbedingung  $u = 0$  gehörigen Eigenwerte und  $\varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \dots$  die zugehörigen normierten Eigenfunktionen, bilden wir ferner

$$-\psi_n(xy) = \iint_J \varphi_n(\xi\eta) l(\xi\eta) \Gamma(\xi\eta, xy) d\xi d\eta,$$

so ist

$$\Gamma - G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(xy) \psi_n(\xi\eta)}{\lambda_n^0}.$$

Wir approximieren  $\Gamma - G$  durch

$$\sum_{v=1}^n \frac{\varphi_v(xy) \psi_v(\xi\eta)}{\lambda_v^0};$$

das Quadratintegral des Restes ist dann gleich

$$(22) \quad \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{\iint_J \psi_r^2 d\xi d\eta}{(\lambda_r^0)^2},$$

und weil

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \psi_{\nu}^2 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\nu}^2 = \iint_J \{l(x,y) \Gamma(x,y, \xi\eta)\}^2 dx dy$$

ist, fällt jenes Integral

$$\leq \frac{M}{(2^n)^2} \quad [M = \iint_J \iint_J \{l(x,y) \Gamma(x,y, \xi\eta)\}^2 dx dy \cdot d\xi d\eta]$$

aus, konvergiert also mit wachsendem  $n$  mindestens so stark gegen Null wie  $\frac{1}{n^2}$ , und der  $n^{\text{te}}$  reziproke Eigenwert von  $\Gamma - G$  geht demnach mindestens so stark wie  $\frac{1}{n^2}$  gegen Null.

Statt Differentialausdrücke in einem ebenen Gebiet  $J$  kann man auch solche auf einer geschlossenen Fläche definierten Differentialausdrücke untersuchen\*). Die Überlegungen werden dann sogar in gewisser Beziehung, da die vom Rand des Gebietes  $J$  herrührenden Schwierigkeiten zum Fortfall kommen, noch vereinfacht.

§ 5.

**Modifikationen, die bei Übertragung des Beweises auf den dreidimensionalen Raum vorgenommen werden müssen.**

Wenn auch im Vorhergehenden darauf Bedacht genommen ist, nur solche Methoden zu verwenden, die sich auf drei Dimensionen übertragen lassen, so müssen doch, wenn wir jetzt zum Raum übergehen, an einigen Punkten des Beweisganges Modifikationen vorgenommen werden, die der Erwähnung wert scheinen. Die wichtigste ist diese: Im dreidimensionalen Fall hat die zu  $\Delta u$ , einem Gebiet  $J$  des  $xyz$ -Raumes und der Randbedingung  $u = 0$  gehörige Greensche Funktion  $G$  die Form:

$$G(xyz, \xi\eta\xi) = \frac{1}{r} - A(xyz, \xi\eta\xi) \quad [r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}],$$

aber das Integral

$$\iiint_J \iiint_J \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 \right\} d\xi d\eta d\xi \cdot dx dy dz$$

konvergiert jetzt nicht. Freilich läßt sich auch hier noch die innere Integration nach  $\xi\eta\xi$  ausführen und ergibt einen Wert\*\*)

\*) Vgl. R. König, Math. Ann. 71 (1911), S. 184 ff. (Habilitationsschrift); Hilbert, Gött. Nachr., math.-phys. Klasse, 1910, S. 362 ff.

\*\*) Bei dieser Abschätzung ist wieder angenommen, daß die Entfernung irgend zweier in  $J$  gelegener Punkte  $< 1$  ist.

$$\leq 4\pi \cdot \frac{1}{\rho},$$

wo  $\rho = \rho(xyz)$  die kürzeste Entfernung des inneren Punktes  $(xyz)$  vom Rande des Gebietes  $J$  bedeutet. Von der Berandung von  $J$  wollen wir voraussetzen, daß sie in dem folgenden Sinne eine endliche Oberfläche besitzt\*): bedeutet  $J_n$  die Menge derjenigen Punkte von  $J$ , für die  $\rho \geq \frac{1}{n}$  ist, so soll das Volumen von  $J - J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  sein\*\*). Daraus kann man schließen, daß

$$\iiint_{J_n} \frac{dx dy dz}{\rho} = O(\lg n)$$

ist. Denn zerlegt man  $J$  in lauter dünne Schalen:

$$S_1 = J_{2^1}, S_2 = J_{2^2} - J_{2^1}, S_3 = J_{2^3} - J_{2^2}, \dots,$$

so gilt für deren Volumina

$$S_{n+1} \leq J - J_{2^n} = O\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

und da in  $S_{n+1} : \rho \geq \frac{1}{2^{n+1}}$  ist, wird

$$\iiint_{S_{n+1}} \frac{dx dy dz}{\rho} = O(1), \quad \iiint_{J_{2^n}} \frac{dx dy dz}{\rho} = \sum_{v=1}^n \iiint_{S_v} = O(n).$$

Umsomehr gilt also

$$\Theta_n \equiv \iiint_n \iiint_{J_n} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta}\right)^2 \right\} d\xi d\eta d\zeta \cdot dx dy dz = O(\lg n).$$

Die Exhaustion mittels kleiner Würfel muß etwas anders vorgenommen werden als im zweidimensionalen Fall. Bei irgendeiner Würfeinteilung betrachten wir jetzt nur einen solchen Würfel, der samt den 26 an ihn anstoßenden ganz im Innern von  $J$  liegt, als einen „nicht am Rande liegenden“. Als Kantenlänge legen wir zunächst  $\frac{1}{n^2}$  zugrunde. Die Anzahl der nicht am Rande liegenden inneren Würfel ist dann  $< Jn^6$ , die Anzahl der am Rande liegenden (soweit sie überhaupt Punkte mit  $J$  gemein haben)  $= O(n^4)$ . Mit jedem dieser am Rande liegenden Würfel

\*) Vgl. Minkowski, Über die Begriffe Länge, Oberfläche, Volumen; Jahresber. D. Math.-Ver. 9, S. 115; Gesammelte Abhandlungen II, S. 122.

\*\*) Man sagt nach Landau, eine von  $n$  abhängige Größe sei  $= O\left(\frac{1}{n}\right)$ , wenn ihr absoluter Betrag  $\leq \text{Const.} \cdot \frac{1}{n}$  ist.

nehmen wir eine feinere Teilung in Würfel von der Kantenlänge  $\frac{1}{n^3}$  vor. Diejenigen der so erhaltenen Würfel einer  $\frac{1}{n^3}$ -Teilung, die nicht am Rande liegen, lassen sich (analog wie in § 2) zu  $O(n^6)$  Parallelepipeden mit Kantenlängen  $\leq \frac{1}{n^2}$  zusammenfassen. Zum Exhaustionsrest  $R_n$  rechnen wir alle Punkte von  $J$ , die einem am Rande liegenden Würfel der  $\frac{1}{n^3}$ -Teilung angehören; das Volumen dieses Restes ist also  $= O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .  $J - R_n$  ist ganz in  $J_n$  und a fortiori ganz in  $J_{n^{12}}$  enthalten.

Wir spalten  $A$  in einer von  $n$  abhängigen Weise in drei Teile

$$A = A^{(n)} + A^{*(n)} + A^{**}:$$

$A^{**}$  ist  $= A$ , wenn einer der Punkte  $(xyz)$ ,  $(\xi\eta\zeta)$  oder beide zugleich in  $J - J_{n^{12}}$  gelegen sind, sonst  $= 0$ ;  $A^{*(n)}$  ist  $= A$ , wenn beide Punkte  $(xyz)$ ,  $(\xi\eta\zeta)$  sowohl in  $J_{n^{12}}$  als auch in  $R_n$  gelegen sind, sonst  $= 0$ . Nach der Methode, die wir in § 2 auf den Teil  $K^{(n)}$  des Kernes  $K$  angewendet haben, bekommen wir für die reziproken Eigenwerte  $\alpha^{(n)}$  von  $A^{(n)}$  eine Ungleichung der Form

$$\left(\alpha_{N+1}^{(n)}\right)^2 + \left(\alpha_{N+2}^{(n)}\right)^2 + \dots \leq \frac{2}{\pi^2 n^4} \cdot \Theta_{n^{12}} = O\left(\frac{\lg n}{n^4}\right);$$

$N$  ist zur Abkürzung für  $Cn^6$  geschrieben, wo  $C$  eine gewisse ganze positive, von  $n$  unabhängige Zahl bedeutet. Mithin wird

$$\alpha_{2N}^{(n)} = O\left(\frac{\sqrt{\lg n}}{n^5}\right).$$

Um

$$\iiint_{R_n^3} A^2 d\xi d\eta d\zeta \leq \iiint_{R_n^3} \frac{1}{r^2} d\xi d\eta d\zeta$$

zu berechnen, zerlegen wir  $R_n$  so in zwei Teile, daß in dem einen beständig  $r \leq \frac{1}{n}$ , in dem andern  $r > \frac{1}{n}$  ist:

$$\iiint_{R_n^3} A^2 d\xi d\eta d\zeta \leq \frac{4\pi}{n} + n^2 \iiint_{R_n^3} d\xi d\eta d\zeta = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ersetzen wir  $n$  durch  $n^4$ , so kommt

$$\iiint_{J - J_{n^{12}}} A^2 d\xi d\eta d\zeta \leq \iiint_{R_{n^{12}}} A^2 d\xi d\eta d\zeta = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt für die Quadratsummen der reziproken Eigenwerte  $\alpha^{(n)}$  und  $\alpha^{**}$  von  $A^{(n)}$  bez.  $A^{**}$ :

$$\left(\alpha_1^{*(n)}\right)^2 + \left(\alpha_2^{*(n)}\right)^2 + \dots = \iiint \iiint \left(A^{*(n)}\right)^2 d\xi d\eta d\zeta \cdot dx dy dz = O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\left(\alpha_1^{***(n)}\right)^2 + \left(\alpha_2^{***(n)}\right)^2 + \dots = \iiint \iiint \left(A^{***(n)}\right)^2 d\xi d\eta d\zeta \cdot dx dy dz = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Die beiden Quadratsummen sind größer als  $N \cdot \left(\alpha_N^{*(n)}\right)^2$ , bez.  $N \cdot \left(\alpha_N^{***(n)}\right)^2$ , und wir können daher schließen:

$$\alpha_N^{*(n)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \alpha_N^{***(n)} = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Im ganzen ergibt sich für die reziproken Eigenwerte  $\alpha$  des Kernes  $A$  die Abschätzung

$$|\alpha_{4N}| \leq |\alpha_{2N}^{(n)}| + |\alpha_N^{*(n)}| + |\alpha_N^{***(n)}| = O\left(\frac{\sqrt{\lg n}}{n^{5/6}}\right),$$

$$\alpha_n = O\left(\frac{\sqrt{\lg n}}{n^{5/6}}\right).$$

Also ist jedenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{5/6} \alpha_n = 0.$$

Auf diese Limesgleichung gestützt, können wir jetzt das in § 3 geschilderte Verfahren ohne wesentliche Abänderung wiederholen und bekommen den

**Satz XI:** Die zu der Randbedingung  $u = 0$  in einem Gebiet  $J$  des dreidimensionalen Raumes vom Volumen  $J$  gehörigen Eigenwerte  $\lambda = \lambda_n$  der Schwingungsgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  erfüllen, der Größe nach angeordnet, die Beziehung

$$\left(\frac{6\pi^2 n}{J}\right)^2 \sim \lambda_n^3$$

[in dem Sinne, daß der Quotient der rechten und linken Seite mit wachsendem  $n$  gegen 1 konvergiert]; dabei ist angenommen, daß  $J$  von einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen mit endlicher Oberfläche begrenzt wird.

Bei der Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  gilt, wenigstens für einen von stetig gekrümmten Oberflächen begrenzten Raum  $J$ , derselbe Satz.

## § 6.

### Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung.

Das Problem der Strahlungstheorie, von dem in der Einleitung die Rede war, führt auf eine kompliziertere Randwertaufgabe, als wir sie bisher behandelt haben. Es sei  $J$  das Innere einer geschlossenen Oberfläche, von der wir der Einfachheit halber annehmen, daß sie ausnahmslos dreimal stetig differenzierbar ist; d. h. die Umgebung jedes Punktes der Oberfläche

läßt sich mit einem Isothermensystem  $u, v$  bedecken, sodaß in dieser Umgebung die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  des variablen Punktes auf der Oberfläche dreimal stetig differenzierbare Funktionen von  $u, v$  werden und im Ausdruck des Linienelements  $ds^2 = e(dw^2 + dv^2)$  daselbst  $e \neq 0$  ist\*). Wir denken uns jetzt  $J$  als einen von Materie entblößten Hohlraum, die begrenzende Oberfläche als einen vollkommenen Spiegel; wir wollen die spektralen Bestandteile derjenigen Strahlungen, die in einem solchen Hohlraum möglich sind, berechnen.

Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  wird im Innern  $J$  den Gleichungen

$$\Delta \mathfrak{E} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

$$[t = \text{Zeit; Lichtgeschwindigkeit} = 1]$$

genügen. Am Rande ist  $\mathfrak{E}$  normal und folglich (wegen  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ )  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}$  tangential gerichtet. Um einfache Schwingungen zu ermitteln, machen wir unter Verwendung einer Konstanten  $\nu$  (der zu bestimmenden Frequenz) den Ansatz  $\mathfrak{E} = e^{i\nu t} \cdot \mathbf{u}(xyz)$ . Dann gelten für den von  $t$  unabhängigen Vektor  $\mathbf{u}$  mit den Komponenten  $U, V, W$  die Beziehungen:

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{u} + \nu^2 \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0: \text{ innerhalb } J, \\ \mathbf{u} \text{ normal} \quad \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \text{ tangential} \right): \text{ an der Oberfläche.} \end{cases}$$

Die positiven Eigenwerte  $\lambda = \nu^2$  dieses Problems (es gibt übrigens keine andern als positive; vgl. die Anm. auf S. 474) bezeichne ich mit  $\lambda_n = \nu_n^2$ , wobei natürlich wieder in der Reihe  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  jeder Eigenwert so oft anzuführen ist, als die Anzahl der zu ihm gehörigen linear unabhängigen vektoriiellen Eigenfunktionen („Eigenvektoren“)  $\mathbf{u}$  beträgt.

Vernachlässigen wir zunächst die Relation  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , so haben wir das folgende Problem vor uns [ $\alpha, \beta, \gamma$  bedeuten die Richtungskosinus der inneren Normalen]:

$$(II) \quad \begin{cases} \Delta U + \lambda^* U = 0, \quad \Delta V + \lambda^* V = 0, \quad \Delta W + \lambda^* W = 0: \text{ in } J, \\ U:V:W = \alpha:\beta:\gamma, \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta \frac{\partial V}{\partial n} + \gamma \frac{\partial W}{\partial n} = 0: \text{ am Rande.} \end{cases}$$

Die Eigenwerte dieses Problems wollen wir mit  $\lambda_n^*$  bezeichnen. Die Eigenwerte von

$$(III) \quad \Delta u + \lambda' u = 0 \text{ in } J, \quad u = 0 \text{ am Rande}$$

\*) Diese Definition ist offenbar von der Wahl des Isothermensystems unabhängig. — Statt des Inneren  $J$  einer solchen Oberfläche könnten wir auch einen mehrfach zusammenhängenden Bereich betrachten, der von einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen begrenzt wird.

mögen an dieser Stelle  $\lambda'_n$  heißen. Ich behaupte: die Reihe der  $\lambda_n^*$  besteht aus den  $\lambda_n$  und  $\lambda'_n$  zusammengenommen; umgekehrt erhalte ich also die  $\lambda_n$  aus der Reihe  $\lambda_n^*$ , indem ich aus dieser die  $\lambda'_n$  (die darin sicher alle vorkommen) fortstreiche. In der Tat: Ist  $\lambda^*$  kein Eigenwert von (III), so folgt aus (II), daß  $\varphi = \text{div } \mathbf{u}$  identisch verschwindet; denn  $\varphi$  genügt der Gleichung  $\Delta \varphi + \lambda^* \varphi = 0$  und hat am Rande von  $J$  zufolge der für  $\mathbf{u}$  gültigen Randbedingungen die Werte 0. War hingegen  $\lambda^*$  etwa ein  $h$ -facher Eigenwert von (III) und sind  $u = \varphi_1, \dots, \varphi_h$  die zugehörigen Eigenfunktionen, so definieren die Gleichungen

$$\mathbf{u}_1 = -\text{grad } \varphi_1, \dots, \mathbf{u}_h = -\text{grad } \varphi_h,$$

aus denen

$$\text{div } \mathbf{u}_1 = \lambda^* \cdot \varphi_1, \dots, \text{div } \mathbf{u}_h = \lambda^* \cdot \varphi_h$$

folgt,  $h$  linear unabhängige zu  $\lambda^*$  gehörige Eigenvektoren des Problems (II). Ist  $j (\geq h)$  die Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda^*$  von (II), so können wir  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$  durch  $j - h$  weitere Eigenvektoren  $\mathbf{u}_{h+1}, \dots, \mathbf{u}_j$ , die den Bedingungen  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  genügen, zu einem vollen System der dem Eigenwert  $\lambda^*$  entsprechenden Eigenvektoren von (II) ergänzen. Eine lineare Kombination derselben ist offenbar dann und nur dann ein Eigenvektor von (I), falls  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$  gar nicht vorkommen.  $\lambda^*$  ist demnach ein  $(j - h)$ -facher Eigenwert des Problems (I).

Wir werden beweisen, daß (II) dreimal so viel, mithin (I) doppelt so viel Eigenwerte wie (III) besitzt. Man könnte deshalb sagen, daß die Gleichung  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  von den übrigen unter (I) verzeichneten Bedingungen nicht unabhängig, sondern „zu  $\frac{2}{3}$ “ eine Folgerung aus diesen ist.

Von nun an beschäftigen wir uns also nur noch mit dem Problem (II). Mit  $p, p'$  bezeichne ich variable Punkte in  $J$ , mit  $dp, dp'$  die an den Stellen  $p, p'$  befindlichen Volumelemente.  $o, o'$  bedeuten stets Punkte der  $J$  begrenzenden Oberfläche,  $do, do'$  die zugehörigen Oberflächenelemente,  $n_o, n_{o'}$  die zugehörigen (inneren) Normalen. Das einfache  $f$  dient zur Bezeichnung von Integrationen, die sich über den ganzen Hohlraum  $J$ , bez. über die ganze Oberfläche erstrecken sollen. Wir führen (II) auf eine Integralgleichung zurück, indem wir zunächst die inhomogenen Gleichungen

$$\Delta U = -4\pi A, \quad \Delta V = -4\pi B, \quad \Delta W = -4\pi C$$

bei gegebenem, in  $J$  stetigem Vektorfeld  $(A, B, C)$  unter den in (II) geforderten Randbedingungen in der folgenden Form zu integrieren suchen:

$$U(p) = \int G_{xx}(pp') A(p') dp' + \int G_{xy}(pp') B(p') dp' + \int G_{xz}(pp') C(p') dp',$$

$$V(p) = \int G_{yx}(pp') A(p') dp' + \int G_{yy}(pp') B(p') dp' + \int G_{yz}(pp') C(p') dp',$$

$$W(p) = \int G_{zx}(pp') A(p') dp' + \int G_{zy}(pp') B(p') dp' + \int G_{zz}(pp') C(p') dp'.$$

Die  $\lambda_n^*$  und zugehörigen  $(U, V, W)$  sind zugleich Eigenwerte und Eigenfunktionentripel des „Greenschen Tensors“

$$\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix},$$

der den sechs Symmetriebedingungen

$$\begin{aligned} G_{xx}(pp') &= G_{xx}(p'p), & G_{yy}(pp') &= G_{yy}(p'p), & G_{zz}(pp') &= G_{zz}(p'p), \\ G_{yz}(pp') &= G_{zy}(p'p), & G_{zx}(pp') &= G_{xz}(p'p), & G_{xy}(pp') &= G_{yx}(p'p) \end{aligned}$$

Genüge leisten wird und den wir auch unter Benutzung der gewöhnlichen zu (III) gehörigen Greenschen Funktion  $G$  mit

$$(23) \quad \begin{pmatrix} G + A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & G + A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & G + A_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wollen.

Wir haben jetzt zweierlei zu erledigen:

- 1) den Greenschen Tensor zu konstruieren,
- 2) nachzuweisen, daß der zweite Summand in (23), der Tensor  $A$ , die Verteilung der Eigenwerte asymptotisch nicht beeinflußt.

*Aufgabe 1.* Für ein festes  $p'$  ist der Vektor

$$\mathfrak{A}_x = (A_{xx}, A_{yx}, A_{zx})$$

ein hinsichtlich  $p$  innerhalb  $J$  reguläres Vektorpotential, das am Rande die Bedingungen

$$\begin{aligned} A_{xx}(op') : A_{yx}(op') : A_{zx}(op') &= \alpha(o) : \beta(o) : \gamma(o), \\ \alpha(o) \frac{\partial}{\partial n_o} A_{xx}(op') + \beta(o) \frac{\partial}{\partial n_o} A_{yx}(op') + \gamma(o) \frac{\partial}{\partial n_o} A_{zx}(op') \\ &= -\alpha(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G(op') \end{aligned}$$

zu erfüllen hat. Wir finden hier die Aufgabe vor, ein in  $J$  reguläres Vektorpotential  $\mathfrak{u} = (u, v, w)$  derart zu bestimmen, daß am Rande  $u : v : w = \alpha : \beta : \gamma$  wird und  $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial v}{\partial n} + \gamma \frac{\partial w}{\partial n}$  gleich einer gegebenen Funktion  $f(o)$ . Zur Lösung dieser Aufgabe denken wir uns  $\mathfrak{u}$  durch eine normal gerichtete einfache und eine tangential gerichtete Doppelbelegung erzeugt; d. h. wir machen den Ansatz



$$(24) \quad \begin{cases} u(p) = \int \frac{1}{r(p\sigma)} \alpha(\sigma) \mathsf{T}(\sigma) d\sigma + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \frac{1}{r(p\sigma)} \right) \xi(\sigma) d\sigma, \\ v(p) = \int \frac{1}{r(p\sigma)} \beta(\sigma) \mathsf{T}(\sigma) d\sigma + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \frac{1}{r(p\sigma)} \right) \eta(\sigma) d\sigma, \\ w(p) = \int \frac{1}{r(p\sigma)} \gamma(\sigma) \mathsf{T}(\sigma) d\sigma + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \frac{1}{r(p\sigma)} \right) \xi(\sigma) d\sigma. \end{cases}$$

$\xi, \eta, \xi; \mathsf{T}$  bedeuten geeignet zu wählende Belegungsfunktionen, von denen die drei ersten durch die Relation

$$(25) \quad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\xi = 0$$

verknüpft sein sollen.

Die Randbedingung

$$u : v : w = \alpha : \beta : \gamma,$$

die wir unter Verwendung einer neuen Unbekannten  $\tau$  so schreiben:

$$u(\sigma) = \alpha(\sigma) \tau(\sigma), \quad v(\sigma) = \beta(\sigma) \tau(\sigma), \quad w(\sigma) = \gamma(\sigma) \tau(\sigma),$$

ergibt

$$(26_1) \quad 2\pi\xi(\sigma) + \int \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \alpha(\sigma') \mathsf{T}(\sigma') d\sigma' + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_{\sigma'}} \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \right) \xi(\sigma') d\sigma' = \alpha(\sigma) \tau(\sigma)$$

und zwei ganz entsprechende Gleichungen (26<sub>2</sub>), (26<sub>3</sub>) für  $\eta$  und  $\xi$ . Wir multiplizieren diese Gleichungen bez. mit  $\alpha, \beta, \gamma$  und addieren; so kommt mit Rücksicht auf (25)\*:

$$\tau(\sigma) = \int \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \sum \alpha(\sigma) \alpha(\sigma') \cdot \mathsf{T}(\sigma') d\sigma' + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_{\sigma'}} \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \right) \sum \alpha(\sigma) \xi(\sigma') d\sigma'.$$

Durch Einsetzen in (26<sub>1,2,3</sub>) erhalten wir drei Integralgleichungen für die vier Unbekannten  $\mathsf{T}; \xi, \eta, \xi$ . Die erste lautet

$$(27_1) \quad \begin{aligned} 2\pi\xi(\sigma) + \int \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \{ [1 - \alpha^2(\sigma)] \alpha(\sigma') - \alpha(\sigma) \beta(\sigma) \beta(\sigma') - \alpha(\sigma) \gamma(\sigma) \gamma(\sigma') \} \mathsf{T}(\sigma') d\sigma' \\ + \int \frac{\partial}{\partial n_{\sigma'}} \frac{1}{r(\sigma\sigma')} \{ [1 - \alpha^2(\sigma)] \xi(\sigma') - \alpha(\sigma) \beta(\sigma) \eta(\sigma') - \alpha(\sigma) \gamma(\sigma) \xi(\sigma') \} d\sigma' = 0; \end{aligned}$$

die beiden andern (27<sub>2</sub>), (27<sub>3</sub>) sind analog gebaut. Die Kerne, an welche hier  $\xi(\sigma'), \eta(\sigma'), \xi(\sigma')$  gebunden sind, werden bei  $\sigma' = \sigma$  von 1. Ordnung unendlich; hingegen bleibt der mit  $\mathsf{T}(\sigma')$  multiplizierte Kern auch bei  $\sigma' = \sigma$  beschränkt. Die Relation (25) ist umgekehrt eine Folge der Gleichungen (27<sub>1,2,3</sub>).

Eine vierte Integralgleichung erhalten wir aus

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial v}{\partial n} + \gamma \frac{\partial w}{\partial n} = f(\sigma).$$

\*)  $\Sigma$  bedeutet eine Summation über drei Komponenten, von denen nur die erste hingeschrieben ist.

Ihre Formulierung bereitet jedoch Schwierigkeiten, da der Kern  $\frac{\partial^2}{\partial n_o \partial n_o} \frac{1}{r(o o')}$  auftritt, der bei  $o' = o$  von 3. Ordnung unendlich wird, und zwar ist bis auf Glieder, die nur von 2. Ordnung unendlich werden,

$$\frac{\partial^2}{\partial n_o \partial n_o} \frac{1}{r(o o')} \sim \frac{1}{r^3(o o')}.$$

Glücklicherweise erscheint jedoch dieser Ausdruck mit dem Faktor

$$\sum \alpha(o) \xi(o') = \sum [\alpha(o) - \alpha(o')] \xi(o')$$

versehen, wodurch die Ordnung des Unendlichwerdens um 1 erniedrigt wird. Die betreffenden Integrale haben daher (wir werden das nachher noch genauer feststellen) einen Sinn, wenn für sie der sog. Cauchysche Hauptwert genommen wird:

$$(27) \quad -2\pi T(o) + \int \left( \frac{\partial}{\partial n_o} \frac{1}{r(o o')} \right) \sum \alpha(o) \alpha(o') \cdot T(o') d o' \\ + \int \left( \frac{\partial^2}{\partial n_o \partial n_o} \frac{1}{r(o o')} \right) \sum \alpha(o) \xi(o') d o' = f(o).$$

Wir formen diese Gleichung dadurch um, daß wir für  $\xi(o')$ ,  $\eta(o')$ ,  $\zeta(o')$  die in (27<sub>1,2,3</sub>) angegebenen Integralausdrücke einsetzen. Dann verwandelt sich (27) in eine Integralgleichung (27\*), in der (wie bald bewiesen werden soll) nur noch Kerne vorkommen, die für  $o' = o$  von höchstens 1. Ordnung unendlich werden.

Auf das Gleichungssystem (27<sub>1,2,3</sub>), (27\*) lassen sich die Fredholmschen Sätze anwenden, und wir bekommen vier Belegungsfunktionen, wie wir sie wünschen — falls die entsprechenden homogenen Integralgleichungen außer  $T = \xi = \eta = \zeta = 0$  keine Lösung besitzen. Diese Bedingung ist aber erfüllt. Sind nämlich  $T; \xi, \eta, \zeta$  Lösungen der homogenen Integralgleichungen, so liefern uns die Gleichungen (24) ein sowohl im Innern als auch im Äußern der Oberfläche reguläres Vektorpotential  $\mathbf{u}$  mit den Komponenten  $u, v, w$ . Dabei würde das im Innern herrschende Vektorpotential  $\mathbf{u}$  an der Oberfläche verschwindende Tangentialkomponenten und seine normale Ableitung daselbst eine verschwindende Normalkomponente besitzen. Daraus folgt, daß im Innern identisch  $\mathbf{u} = 0$  ist. Denn zufolge der angegebenen Eigenschaften wird

$$\int \left\{ \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^2 \right\} d p = - \int \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot d o = 0,$$

also  $\mathbf{u} = \text{const.} = \mathbf{c}$ . Das würde sich, falls  $\mathbf{c} \neq 0$  wäre, nicht mit der Tatsache vertragen, daß  $\mathbf{u}$  an der Oberfläche normale Richtung besitzt.\*)

\*) Damit ist gezeigt, daß  $\lambda^* = 0$  kein Eigenwert des Problems (II) ist; ebenso leicht erkennt man, daß (II) keine negativen Eigenwerte besitzt.

Da die Doppelbelegung, aus der  $u$  entspringt, tangential gerichtet war, durchsetzt die Normalkomponente von  $u$  die Oberfläche stetig. Darnach hat das im Äußern herrschende Potential  $u$  an der Oberfläche eine verschwindende Normalkomponente. Ebenso ergibt sich, daß die Tangentialkomponenten der normalen Ableitung des äußeren Potentials an der Oberfläche  $= 0$  sind. Diese Randbedingungen haben zur Folge, daß auch im Äußern identisch  $u = 0$  sein muß. Da  $u$  sonach zu beiden Seiten der Oberfläche dieselben Werte hat, wird  $\xi = \eta = \zeta = 0$ ; da auch die normale Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  keinen Sprung erleidet, gilt  $T = 0$ .

Wir haben noch den Beweis dafür nachzuholen, daß die Kerne der Gleichung (27\*) höchstens von 1. Ordnung unendlich werden. Dazu haben wir lediglich die Funktionen

$$(28) \quad \int \frac{\alpha(o) - \alpha(o')}{r^3(o o')} \frac{1}{r(o' o'')} d o'$$

und

$$(29) \quad \int \frac{\alpha(o) - \alpha(o')}{r^3(o o')} \cdot \frac{\partial}{\partial n_{o''}} \frac{1}{r(o' o'')} d o'$$

zu betrachten. Die Existenz des Cauchyschen Hauptwerts von

$$\int \frac{\alpha(o) - \alpha(o')}{r^3(o o')} d o'$$

ergibt sich, wenn wir die Umgebung von  $o$  auf der Fläche mit einem regulären Isothermensystem bedecken, mit Rücksicht auf die der Fläche auferlegten Differenzierbarkeitsbedingungen daraus, daß die Cauchyschen Hauptwerte der etwa über  $u^2 + v^2 \leq 1$  zu erstreckenden Integrale

$$\iint \frac{u \, du \, dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}, \quad \iint \frac{v \, du \, dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

$\left[ \iint = \lim_{\epsilon=0} \iint_{\epsilon^2 \leq u^2 + v^2 \leq 1} \right]$  existieren (nämlich  $= 0$  sind).

Für (28) können wir schreiben

$$\frac{1}{r(o o'')} \int \frac{\alpha(o) - \alpha(o')}{r^2(o o')} d o' + \int \frac{\alpha(o) - \alpha(o')}{r^3(o o')} \left[ \frac{1}{r(o' o'')} - \frac{1}{r(o o'')} \right] d o'.$$

Der erste Summand wird bei  $o'' = o$  von 1. Ordnung unendlich, der zweite ist wegen

$$\left| \frac{1}{r(o' o'')} - \frac{1}{r(o o'')} \right| \leq \frac{r(o o'')}{r(o' o'') r(o o'')}$$

dem absoluten Betrage nach

$$\leq \frac{\text{Const.}}{r(o o'')} \int \frac{d o'}{r(o o') r(o'' o')}.$$

Das letzte Integral wird für  $o'' = o$  nur logarithmisch unendlich.

Um den entsprechenden Schluß auf (29) anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_{o''}} \frac{1}{r(o'o'')} - \frac{\partial}{\partial n_{o''}} \frac{1}{r(o'o'')} \right| \leq \text{Const.} \frac{r(o'o)}{r(o'o'') r(o'o'')}.$$

Wir brauchen lediglich Punkte  $o, o', o''$  zu betrachten, die so nahe beieinander liegen, daß sie alle drei einem Flächenstück angehören, welches sich mit einem regulären Isothermensystem  $u, v$  überdecken läßt\*), und zwar mögen dem Punkte  $o''$  die Werte  $u = 0, v = 0$ , dem Punkte  $o$  die Werte  $u, v$ , dem Punkte  $o'$  die Werte  $u', v'$  entsprechen.  $to, to'$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) seien diejenigen Punkte auf der Fläche, deren isotherme Koordinaten  $tu, tv$  bez.  $tu', tv'$  sind. Bezeichnen wir mit  $x_u, x_v$  die 1. Differentialquotienten von  $x(o) = x(u, v)$ , so können wir setzen

$$\sum [x(o) - x(o'')] \alpha(o'') = u \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to) dt + v \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to) dt.$$

Man notiere jetzt die folgende Reihe von Größen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_{o''}} \frac{1}{r(o'o'')} &= \frac{\sum [x(o') - x(o'')] \alpha(o'')}{r^3(o'o'')}, \\ \frac{\sum [x(o) - x(o'')] \alpha(o'')}{r^2(o'o'') r(o'o'')} &= \frac{u' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to') dt + v' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to') dt}{r^2(o'o'') r(o'o'')}, \\ \frac{u' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to) dt + v' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to) dt}{r^2(o'o'') r(o'o'')} &, \\ \frac{u' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to) dt + v' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to) dt}{r(o'o'') r^2(o'o'')} &, \\ \frac{u' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to) dt + v' \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to) dt}{r(o'o'') r^2(o'o'')} &= \frac{\sum [x(o) - x(o'')] \alpha(o'')}{r(o'o'') r^2(o'o'')}, \\ \frac{\sum [x(o) - x(o'')] \alpha(o'')}{r^3(o'o'')} &= \frac{\partial}{\partial n_{o''}} \frac{1}{r(o'o'')}. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$\left| \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_u(to) dt \right| \leq \text{Const.} r(o'o''),$$

$$\left| \int_0^1 \sum \alpha(o'') x_v(to) dt \right| \leq \text{Const.} r(o'o'')$$

\*) Dadurch erscheint das Flächenstück auf ein Gebiet einer auf rechtwinklige Koordinaten  $u, v$  bezogenen Ebene abgebildet; wir dürfen noch voraussetzen (indem wir uns ev. auf ein Teilgebiet beschränken), daß dieses Bildgebiet konvex ist.

ist (wobei auch  $o$  durch  $o'$  ersetzt werden darf), und ferner gleichmäßig in  $t$

$$|x_u(t_o) - x_u(t_{o'})|, |x_v(t_o) - x_v(t_{o'})| \leq \text{Const. } t \cdot r(o_o'),^*$$

so erkennt man, daß die Differenz von je zwei aufeinanderfolgenden Größen dieser Reihe — und daher auch die Differenz des ersten und letzten Gliedes, wie wir zeigen wollten — dem absoluten Betrage nach

$$\leq \text{Const. } \frac{r(o_o')}{r(o_o')r(o''_o)}$$

ist.

*Aufgabe 2.* Die nunmehr vollständig gelöste Randwertaufgabe aus der Potentialtheorie war für uns nur ein Hilfsmittel, um den Tensor  $A$  zu konstruieren. Nehmen wir für  $f(o)$  die Funktion

$$f(o_p) = -\alpha(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G(o_p'),$$

so ergeben sich Belegungsfunktionen  $\Gamma(o_p)$ ;  $\xi(o_p)$ ,  $\eta(o_p)$ ,  $\zeta(o_p)$ , die noch von  $p'$  abhängen werden, und aus ihnen nach (24) der Vektor  $u(p) = \mathfrak{A}_x(pp')$ . Da

$$|f(o_p)| \leq \frac{\text{Const.}}{r^2(o_p)}, \quad \int |f(o_p)| d\omega < 4\pi$$

ist, folgt aus den Integralgleichungen (27<sub>1,2,3</sub>), (27\*) in einfacher Weise\*\*)

$$|\Gamma(o_p)| \leq \frac{\text{Const.}}{r^2(o_p)}, \quad \int |\Gamma(o_p)| d\omega \leq \text{Const.};$$

$$|\xi(o_p)|, |\eta(o_p)|, |\zeta(o_p)| \leq \text{Const.}$$

„Const.“ bedeutet: unabhängig von  $o$  und  $p'$ . Es bezeichne  $P = P(pp')$  das Minimum

$$\min. \{r(p_o) + r(p'_o)\},$$

welches zustande kommt, wenn bei festem  $p$ ,  $p'$  der Punkt  $o$  die ganze Oberfläche durchläuft. Die gewonnenen Ungleichungen zeigen, wenn man sie in (24) zur Berechnung von  $u = \mathfrak{A}_x$  einträgt, daß der 2. Summand in diesen Formeln für alle  $p, p'$  absolut  $\leq \text{Const.}$ , der 1. aber  $\leq \frac{\text{Const.}}{P(pp')}$  bleibt.

Diese Abschätzung des 1. Summanden erhält man, wenn man das Integrationsgebiet, das aus der ganzen Oberfläche besteht, in zwei Teile zerlegt: der erste Teil [1] besteht aus allen Punkten  $o$  [wenn solche überhaupt vorhanden sind], deren Entfernung von  $p$  kleiner ist als  $\frac{P}{2}$ ; für diese  $o$  ist zugleich  $r(p'_o) > \frac{P}{2}$ . Da für beliebiges  $\varepsilon$

\*) Um dies zu zeigen, hat man in der Bildebene die Punkte  $t_o, t_{o'}$  durch eine geradlinige Strecke zu verbinden; vgl. die Fußnote auf der vorigen Seite.

\*\*) Vgl. E. E. Levi, Gött. Nachr., 16. Mai 1908.

$$\int_{(r(p_0) < \varepsilon)} \frac{do}{r(p_0)} \leq \text{Const. } \varepsilon$$

ist (Const. heißt hier: unabhängig von  $p$  und  $\varepsilon$ ), so wird für den ersten Teil [1]

$$\left| \int_{[1]} \frac{1}{r(p_0)} \alpha(o) \Gamma(o p') do \right| \leq \frac{\text{Const.}}{P^2} \int_{[1]} \frac{do}{r(p_0)} \leq \frac{\text{Const.}}{P}.$$

Für den Rest [2] der Oberfläche gilt

$$\left| \int_{[2]} \frac{1}{r(p_0)} \alpha(o) \Gamma(o p') do \right| \leq \frac{2}{P} \int |\Gamma(o p')| do \leq \frac{\text{Const.}}{P}.$$

Wir finden also

$$|\mathfrak{A}_x(pp')| \leq \frac{\text{Const.}}{P(pp')}.$$

Diese Ungleichung, welche zum Ausdruck bringt, daß  $\mathfrak{A}_x$  nur unendlich wird, wenn  $p, p'$  gegen denselben Randpunkt konvergieren, dürfen wir für unsere Zwecke durch die weit weniger scharfe

$$(30) \quad |\mathfrak{A}_x(pp')| \leq \frac{\text{Const.}}{r(pp')}$$

ersetzen.

Das Integral

$$\int \left\{ \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial z} \right|^2 \right\} dp$$

ist

$$\begin{aligned} &= - \int \mathfrak{A}_x(o p') \cdot \frac{\partial}{\partial n_o} \mathfrak{A}_x(o p') do \\ &= \int \alpha(o) \frac{\partial}{\partial n_o} G(o p') [\alpha(o) A_{xx}(o p') + \beta(o) A_{yx}(o p') + \gamma(o) A_{zx}(o p')] do, \end{aligned}$$

also wegen  $\frac{\partial}{\partial n_o} G(o p') > 0$

$$\leq \int |\mathfrak{A}_x(o p')| \cdot \frac{\partial}{\partial n_o} G(o p') do.$$

Nennen wir den kürzesten Abstand des Punktes  $p'$  von der Oberfläche wie früher  $\varrho(p')$ , so folgt daraus

$$(31) \quad \int \left\{ \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathfrak{A}_x(pp')}{\partial z} \right|^2 \right\} dp \leq 4\pi \cdot \frac{\text{Const.}}{\varrho(p')},$$

wo Const. dieselbe Konstante bezeichnet wie in der Ungleichung (30). Aus (30) und (31), und weil entsprechende Ungleichungen für die beiden andern den Tensor A konstituierenden Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_y &= (A_{xy}, A_{yy}, A_{zy}), \\ \mathfrak{A}_z &= (A_{xz}, A_{yz}, A_{zz}) \end{aligned}$$

gelten, schließen wir nach der in § 5 auseinandergesetzten Methode, daß (23) asymptotisch die gleiche Eigenwertverteilung hat wie

$$\begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte des letzteren Tensors aber sind dieselben wie die von  $G$  — mit dem einen Unterschied jedoch, daß die Vielfachheit eines jeden Eigenwerts von  $G$  zu verdreifachen ist. Da nach § 5 die Anzahl der unterhalb  $\Lambda$  gelegenen Eigenwerte von  $\frac{1}{4\pi} G$  asymptotisch (für  $\lim \Lambda = \infty$ ) durch  $\frac{J}{6\pi^2} \cdot \Lambda^{3/2}$  gegeben wird, so findet sich jetzt die entsprechende für das Problem (II) berechnete Anzahl asymptotisch  $= \frac{J}{2\pi^2} \cdot \Lambda^{3/2}$ . Die Anzahl der Frequenzen  $\nu_n \leq N$ , welche den stehenden elektrischen Schwingungen [Problem (I)] entsprechen, ist demnach asymptotisch  $= \frac{J}{3\pi^2} \cdot N^3$ . Auf jede solche Frequenz  $\nu_n$ , mit andern Worten: auf jede Spektrallinie des Hohlraumspektrums kommen gemäß der Formel

$$\mathcal{G} = \mathbf{u}(xyz) \cdot (a_1 \cos \nu t + a_2 \sin \nu t)$$

zwei Freiheitsgrade. Damit sind wir am Ziel und können das Resultat folgendermaßen zusammenfassen.

Satz XII. *Das Spektrum der in einem beliebigen Hohlraum  $J$  mit vollkommen spiegelnden Wänden herrschenden Strahlung ist so geartet, daß die Zahl der Spektrallinien, deren Frequenz unterhalb  $\nu$  liegt, mit  $\nu$  in demselben Maße ansteigt, wie die 3. Potenz von  $\nu$ . Genauer gesagt, konvergiert das Verhältnis dieser Anzahl zu  $\nu^3$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen die Grenze*

$$\frac{\text{Volumen von } J}{3\pi^2 c^3} \quad [\text{Lichtgeschwindigkeit} = c].$$

(Die spiegelnden Wände werden in mathematischer Hinsicht als geschlossene, dreimal stetig differenzierbare Flächen vorausgesetzt.)

Göttingen, den 7. Mai 1911.