ÜBER WINKELTREUE UND STRECKENTREUE ABBILDUNG AN EINEM PUNKTE UND IN DER EBENE.

Von **Robert Remak** (Berlin).

Adunanza del 27 luglio 1913

EINLEITUNG.

Es sei die komplexe von 0 verschiedene Zahl

$$a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

in der GAUSS'schen Zahlenebene durch einen Punkt dargestellt. Die Entfernung dieses Punktes vom Nullpunkte ist

$$|a| = r.$$

Die Strecke 0 ... a bildet mit der Axe der positiven reellen Zahlen den Winkel α . Ich will setzen

$$\operatorname{sgn} a = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

(Lies Signum a). Für reelle a ist $\operatorname{sgn} a$ gleich dem Vorzeichen von a . Diese Grösse ist also nur von der Richtung der Strecke 0 ... a abhängig. Es ist für alle $a \neq 0$

$$a = \operatorname{sgn} a \cdot |a|,$$

$$|\operatorname{sgn} a| = 1,$$

ferner

$$\operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} (ab).$$

Diese Gleichung gilt allgemein, wenn man formal setzt

$$\operatorname{sgn} 0 = 0.$$

Durch eine Funktion

$$u = f(\zeta)$$

wird die ζ -Ebene auf die u -Ebene abgebildet. Ich spreche hier und im Folgenden stets von Funktionen im allgemeinsten Sinne: jedem Werte ζ ist ein Wert u zugeordnet. Den Funktionen kommen keine weiteren Eigenschaften (der Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw.) zu, als die jedesmal ausdrücklich erwähnten. Es wird sich gerade darum handeln, eine Reihe von Bedingungen daraufhin zu untersuchen, ob man aus ihnen schliessen kann, dass die ihnen genügende Funktion eine *analytische* ist.

Es bieten sich nun zwei Möglichkeiten einer Definition der Streckentreue an einem Punkte $\zeta = \zeta_0$. Entweder man verlangt nur, dass die Länge aller von ζ_0 *ausgehenden* hinreichend kleinen Strecken mit beliebiger Genauigkeit in einem festen Verhältnis zur Länge der entsprechenden Strecken der u -Ebene stehen, oder man verlangt dasselbe für *alle* Strecken, deren beide Endpunkte in hinreichender Nähe von ζ_0 liegen. Die erste Forderung lautet:

$$(1) \quad \lim_{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0} \frac{|f(\zeta_1) - f(\zeta_0)|}{|\zeta_1 - \zeta_0|} = m,$$

wo m eine reelle positive Zahl. Die zweite Forderung lautet:

$$(2) \quad \lim_{\substack{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0 \\ \zeta_2 \rightarrow \zeta_0}} \frac{|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)|}{|\zeta_2 - \zeta_1|} = m.$$

Hierin, wie in allen folgenden Doppellimites sei zulässig, dass *einer* der beiden Werte ζ_1 oder ζ_2 gleich ζ_0 .

Analog kann man für die Winkeltreue verlangen, dass nur alle von ζ_0 *ausgehenden* hinreichend kleinen Strecken mit beliebiger Genauigkeit einen festen Winkel gegen die entsprechenden Strecken der u -Ebene bilden, oder man verlangt dasselbe für *alle* Strecken, deren beide Endpunkte in hinreichender Nähe von ζ_0 liegen. Die erste Forderung lautet:

$$(3) \quad \lim_{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0} \frac{\operatorname{sgn}(f(\zeta_1) - f(\zeta_0))}{\operatorname{sgn}(\zeta_1 - \zeta_0)} = s,$$

wo $|s| = 1$. Die zweite Forderung lautet:

$$(4) \quad \lim_{\substack{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0 \\ \zeta_2 \rightarrow \zeta_0}} \frac{\operatorname{sgn}(f(\zeta_2) - f(\zeta_1))}{\operatorname{sgn}(\zeta_2 - \zeta_1)} = s.$$

Wenn (1) und (3) gleichzeitig existieren, so ist

$$(5) \quad \lim_{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0} \frac{f(\zeta_1) - f(\zeta_0)}{\zeta_1 - \zeta_0} = m \cdot s,$$

es existiert also der gewöhnliche Differentialquotient. Wenn (2) und (4) gleichzeitig existieren, so ist

$$(6) \quad \lim_{\substack{\zeta_1 \rightarrow \zeta_0 \\ \zeta_2 \rightarrow \zeta_0}} \frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} = m \cdot s.$$

Ich will in diesem Falle sagen, $f(\zeta)$ besitze an der Stelle $\zeta = \zeta_0$ einen erweiterten Differentialquotienten. Entsprechend bezeichne ich die Limites (1) mit « gewöhnlicher absoluter Differentialquotient », (2) mit « erweiterter absoluter Differentialquotient », (3) mit « gewöhnlicher Signum-Differentialquotient », (4) mit « erweiterter Signum-Differentialquotient ». Durch Kombination aller dieser Voraussetzungen ergibt sich fol-

gendes Schema, in dem jedesmal diejenigen der Limites (1) bis (6) bezeichnet sind, deren Existenz vorausgesetzt wird.

		Der Signum-Differentialquotient existiere		
		gar nicht	gewöhnlich	erweitert
Der absolute Differentialquotient existiere	gar nicht	*	(3) (C)	(4) (F)
	gewöhnlich	(1) (B)	(5) (D)	(5) (4) (H)
	erweitert	(2) (E)	(5) (2) (G)	(6) (A)

Natürlich folgt aus der Existenz von (5) die von (1) und (3), aus der von (2) die von (1), aus der von (4) die von (3), schliesslich aus der von (6) die von (1) bis (5); allgemein begreift jede der obigen neun Voraussetzungen die darüber-, die links danebenstehenden und die gleichzeitig darüber und weiter links stehenden Voraussetzungen in sich.

Das erste Feld enthält überhaupt keine Voraussetzungen, braucht also nicht weiter betrachtet zu werden. Im ersten Teile dieser Arbeit will ich die Existenz der übrigen acht Limites an einem Punkte betrachten; ein System geeigneter Beispiele wird zeigen, dass man aus der Existenz keines dieser acht Limites auf die Existenz eines im Schema weiter rechts oder weiter unten stehenden Limes schliessen kann. Ueberraschend erscheint dies Resultat besonders für die Voraussetzungen (2) und (4), denn ein unendlich kleines in der Nähe von z gelegenes Dreieck wird im Falle (2) auf ein entsprechendes mit proportionalen Seiten, im Falle (4) auf ein entsprechendes mit gleichen Winkeln abgebildet. Man sollte also erwarten, dass man durch Anwendung des entsprechenden Ähnlichkeitssatzes der elementaren Geometrie im Falle (2) von der Streckentreue auf die Winkeltreue, im Falle (4) von der Winkeltreue auf die Streckentreue schliessen kann. Tatsächlich ist dieser Schluss nicht zulässig.

Im zweiten Teile dieser Arbeit, der bis auf wenige wiederbenutzte Gleichungen vom ersten Teile unabhängig ist, werde ich die Existenz derselben Limites an allen Stellen eines einfach zusammenhängenden, abgeschlossenen Gebietes voraussetzen. Für den Fall der Voraussetzung (5) hat Herr GOURSAT ¹⁾ bewiesen, dass die Funktion eine analytische sein muss.

¹⁾ E. GOURSAT: a) *Démonstration du théorème de CAUCHY* [Acta Mathematica, Bd. IV (1884), S. 197-200]; b) *Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après CAUCHY* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. I (1900), S. 14-16]. — Ferner behandeln den gleichen Gegenstand: c) E. H. MOORE, *A simple proof of the fundamental CAUCHY-GOURSAT theorem* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. I (1900), S. 499-506]; d) A. PRINGSHEIM, *Ueber den GOURSAT'schen Beweis des CAUCHY'schen Integralsatzes* [Ibid., Bd. II (1901), S. 413-421]; e) A. PRINGSHEIM, *Der*

Dasselbe will ich beweisen für die Voraussetzung (2) und mit einer gewissen Einschränkung für die Voraussetzung (4). Ich weiss nicht, ob der Satz auch ohne diese Einschränkung gilt. Ferner muss ich die Frage offen lassen, ob bereits aus der Voraussetzung (1) oder der Voraussetzung (3) an allen Punkten eines einfach zusammenhängenden, abgeschlossenen Gebietes folgt, dass die Funktion eine analytische sein muss.

Erster Teil.

Ich gebe nun für jede der acht Voraussetzungen des obigen Schemas Beispiele von Funktionen, die *an einem Punkte* genau dieser Voraussetzung und keiner weiteren des Schemas genügen. Die dem Schema beigefügten grossen lateinischen Buchstaben beziehen sich auf das zugehörige Beispiel.

* *Beispiel (A)*: Es bedeute $\bar{z}$ die zu z konjugierte Zahl. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu, n-\nu} z^{\nu} \bar{z}^{n-\nu} \right).$$

Es konvergiere für eine reelle positive Zahl r

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^n \sum_{\nu=0}^n |a_{\nu, n-\nu}| \right)$$

dann konvergiert $f(z)$, für alle z , für die $|z| \leq r$, absolut.

SATZ (I). — Wenn

$$a_{0,1} = 0,$$

so besitzt $f(z)$ an der Stelle $z=0$ einen erweiterten Differentialquotienten, nämlich $a_{1,0}$.

Es ist also zu zeigen, dass

$$(8) \quad \lim_{\substack{z_2 \rightarrow 0 \\ z_1 \rightarrow 0}} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = a_{1,0}.$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, dass $|z_2| \geq |z_1|$. Es ist

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{a_{0,0} - a_{0,0}}{z_2 - z_1} + \frac{a_{1,0} z_2 - a_{1,0} z_1}{z_2 - z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu, n-\nu} \cdot \frac{z_2^{\nu} \bar{z}_2^{n-\nu} - z_1^{\nu} \bar{z}_1^{n-\nu}}{z_2 - z_1} \right)$$

CAUCHY-GOURSATsche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Bd. XXXIII (1903), S. 673-682]; f) L. HEFFTER, Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1902, S. 115-140]; g) L. HEFFTER, Zum Beweis des CAUCHY-GOURSATschen Integralsatzes [Ibid., Jahrgang 1903, S. 312-316]; h) L. HEFFTER, Über die von einem Integrationsweg von vornherein unabhängige Definition des bestimmten Integrals im zweidimensionalen Gebiet [Ibid., Jahrgang 1904, S. 196-200].

also

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - a_{1,0} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n a_{v,n-v} \cdot \frac{z_2^v \cdot \bar{z}_2^{n-v} - z_1^v \cdot \bar{z}_1^{n-v}}{z_2 - z_1} \right) \right| \\
 & \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left| \frac{z_2^v \cdot \bar{z}_2^{n-v} - z_1^v \cdot \bar{z}_1^{n-v}}{z_2 - z_1} \right| \right) \\
 & = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left| \frac{(z_2^v \cdot \bar{z}_2^{n-v} - z_1^v \cdot \bar{z}_2^{n-v}) + (z_1^v \cdot \bar{z}_2^{n-v} - z_1^v \cdot \bar{z}_1^{n-v})}{z_2 - z_1} \right| \right) \\
 & \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left\{ \left| \frac{z_2^v \cdot (\bar{z}_2^{n-v} - \bar{z}_1^{n-v})}{z_2 - z_1} \right| + \left| \frac{z_1^v \cdot (\bar{z}_2^{n-v} - \bar{z}_1^{n-v})}{z_2 - z_1} \right| \right\} \right) \\
 & = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left\{ |\bar{z}_2|^{n-v} \cdot \left| \sum_{\lambda=0}^{v-1} z_2^{\lambda} \cdot \bar{z}_1^{v-1-\lambda} \right| + |z_1|^v \cdot \left| \sum_{\lambda=0}^{n-v-1} \bar{z}_2^{\lambda} \cdot \bar{z}_1^{n-v-1-\lambda} \right| \right\} \right) \\
 & \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left\{ |\bar{z}_2|^{n-v} \cdot \sum_{\lambda=0}^{v-1} (|z_2|^{\lambda} \cdot |\bar{z}_1|^{v-1-\lambda}) + |z_1|^v \cdot \sum_{\lambda=0}^{n-v-1} (|\bar{z}_2|^{\lambda} \cdot |\bar{z}_1|^{n-v-1-\lambda}) \right\} \right) \\
 & \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot \left\{ |\bar{z}_2|^{n-v} \cdot \sum_{\lambda=0}^{v-1} |\bar{z}_2|^{\lambda+v-1-\lambda} + |z_1|^v \cdot \sum_{\lambda=0}^{n-v-1} |\bar{z}_2|^{\lambda+n-v-1-\lambda} \right\} \right) \\
 & = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \cdot |\bar{z}_2|^{n-1} \cdot (v + n - v) \right) \\
 & = \sum_{n=2}^{\infty} \left(n |\bar{z}_2|^{n-1} \cdot \sum_{v=0}^n |a_{v,n-v}| \right).
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert aber nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Potenzreihen für $|\bar{z}| < r$, wenn (7) in demselben Gebiet konvergiert. Der letzte Ausdruck ist ferner von der Form $|\bar{z}_2| \cdot \mathfrak{P}|\bar{z}_2|$, wo $\mathfrak{P}|\bar{z}_2|$ eine nach steigenden Potenzen von $|\bar{z}_2|$ entwickelte Potenzreihe mit positiven Koeffizienten bedeutet. Für alle

$$|\bar{z}_2| < r' < r$$

ist

$$\mathfrak{P}|\bar{z}_2| < \mathfrak{P}(r') = P.$$

Hierin ist P eine feste Zahl. Also ist, wenn $|\bar{z}_1| \leq |\bar{z}_2|$

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - a_{1,0} \right| < |\bar{z}_2| \cdot P,$$

kann also beliebig klein gemacht werden. Damit ist (8) bewiesen.

Aus dem Satz (I) folgt als spezieller Fall:

Eine analytische Funktion besitzt an jeder Stelle, an der sie regulär ist, einen erweiterten Differentialquotienten.

Natürlich würde der Beweis dieser speziellen Behauptung einfacher ausfallen. Ich brauche aber den allgemeineren Satz (I) weiter unten.

Nachdem ich vorweg ein Beispiel für die umfassendste Voraussetzung (6) gegeben habe, gehe ich zu den geringsten Voraussetzungen (1) und (3) über, für die Beispiele leicht zu bilden sind.

Beispiel (B): Es sei $f(z) = u$ definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 |u| &= |z|, \\
 \operatorname{sgn} u &= \overline{1 \operatorname{sgn} z},
 \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu wählen ist, dass

$$\Re(\sqrt[1]{\operatorname{sgn} z}) \geq 0,$$

und speziell

$$\sqrt[1]{1} = 1$$

zu setzen ist. (Es sei stets, wenn $a + bi$ eine komplexe Zahl, der Realteil

$$\Re(a + bi) = a,$$

der Imaginärteil

$$\Im(a + bi) = b).$$

Am Punkte $z = 0$ existiert der gewöhnliche absolute Differentialquotient. Es ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{u - 0}{z - 0} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|u|}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Dagegen existiert kein erweiterter absoluter Differentialquotient. Es sei z_1 reell und positiv und

$$z_1 = -z_2;$$

dann ist

$$u_2 = z_2,$$

$$u_1 = i|z_1| = iz_2.$$

Also wird

$$\left| \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} \right| = \left| \frac{z_2 - iz_2}{z_2 + z_2} \right| = \left| \frac{1 - i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1.$$

Ferner existiert kein Signum-Differentialquotient. Es sei

$$z_2 = 2z_1$$

dann ist

$$u_2 = 2u_1 = 2|z_1|\sqrt[1]{\operatorname{sgn} z_1},$$

also

$$\operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = \operatorname{sgn} \frac{|z_1|\sqrt[1]{\operatorname{sgn} z_1}}{z_1} = \frac{\sqrt[1]{\operatorname{sgn} z_1}}{\operatorname{sgn} z_1} = \frac{1}{\sqrt[1]{\operatorname{sgn} z_1}}.$$

Das Signum des Differenzenquotienten kann also jeden Wert auf dem Einheitskreise mit negativem Imaginärteil annehmen.

Beispiel (C): Es sei $f(z) = u$ definiert durch die Gleichungen

$$|u| = \sqrt[1]{|z|},$$

$$\operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} z.$$

Es existiert im Punkte $z = 0$ der gewöhnliche Signum-Differentialquotient. Es ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \frac{u - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} u}{\operatorname{sgn} z} = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Dagegen existiert kein erweiterter Signum-Differentialquotient. Es sei

$$z_2 = 2iz_1,$$

also wird

$$u_2 = \operatorname{sgn} z_2 \cdot \sqrt[1]{|z_2|} = i \cdot \operatorname{sgn} z_1 \cdot \sqrt[1]{2} \sqrt[1]{|z_1|} = i \cdot \sqrt[1]{2} \cdot u_1.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} &= \operatorname{sgn} \left(\frac{i\sqrt{2} - 1}{2i - 1} \cdot \frac{u_1}{\tilde{z}_1} \right) = \operatorname{sgn} \frac{i\sqrt{2} - 1}{2i - 1} \cdot \operatorname{sgn} u_1 \\ &= \operatorname{sgn} \frac{i\sqrt{2} - 1}{2i - 1} = \frac{i\sqrt{2} - 1}{2i - 1} \cdot \frac{1\sqrt{5}}{1\sqrt{3}} = \frac{-(i\sqrt{2} - 1)(2i + 1)}{1\sqrt{15}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 1 + i(2 - \sqrt{2})}{1\sqrt{15}} \neq 1. \end{aligned}$$

Ebenso existiert kein gewöhnlicher absoluter Differentialquotient. Es ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{u - 0}{z - 0} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|u|}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1|z|} = \infty.$$

Bevor ich in der Reihe der Beispiele fortfahre, beweise ich die Ungleichheitsbeziehung

$$(10) \quad |e^{ix} - 1| < x.$$

Hierin sei x eine reelle positive Zahl.

Wenn $x > 2$, so ist

$$|e^{ix} - 1| \leq |e^{ix}| + 1 = 2 < x.$$

Es sei also $x \leq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |e^{ix} - 1|^2 &= (e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = 2 - e^{ix} - e^{-ix} \\ &= 2 - 2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = 2 \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Es ist für $n \geq 1$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

weil

$$\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{4}{12} = \frac{1}{3} < 1.$$

Also ist die obige Reihe alternierend mit ständig abnehmenden Gliedern. Es ist also

$$|e^{ix} - 1|^2 < x^2$$

oder

$$|e^{ix} - 1| < x,$$

was zu beweisen war.

Beispiel (D): Es sei

$$z = r \cdot e^{i\vartheta},$$

wo

$$r = |z|,$$

und es sei definiert

$$f(z) = u = z + r^2 \cdot e^{i\vartheta} \cdot r^{-1}$$

Für ϑ werde der Hauptwert gesetzt:

$$0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Ferner sei

$$f(0) = 0.$$

Die Funktion ist in allen Punkten der positiven reellen Axe ausser im Nullpunkte und anderer Ausnahmepunkten unstetig.

Es besitzt $f(z)$ im Punkte $z = 0$ zwar einen gewöhnlichen Differentialquotienten, aber weder einen erweiterten absoluten noch einen erweiterten Signum-Differentialquotienten.

Es ist

$$\frac{u - 0}{z - 0} = 1 + \frac{r^2}{z} \cdot e^{i\vartheta_1 r^{-1}},$$

also kann

$$\left| \frac{u}{z} - 1 \right| = \left| \frac{r^2}{z} \cdot e^{i\vartheta_1 r^{-1}} \right| = r$$

beliebig klein gemacht werden. Es ist somit

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u}{z} = 1.$$

Man bilde den erweiterten Differenzenquotienten und setze speziell $z_2 = z_1 = r$:

$$\frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{r^2(e^{i\vartheta_2 r^{-1}} - e^{i\vartheta_1 r^{-1}})}{r(e^{i\vartheta_2} - e^{i\vartheta_1})} = 1 + e^{i\vartheta_1(r^{-1}-1)} \cdot \frac{r(e^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)r^{-1}} - 1)}{e^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)} - 1}.$$

Man setze nun speziell

(11)

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \pi r,$$

dann wird

$$\frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = 1 + e^{i\vartheta_1(r^{-1}-1)} \cdot \frac{r(e^{i\pi} - 1)}{e^{i\pi r} - 1}.$$

Nun erhält man unter Benutzung der Ungleichheitsbeziehung (10)

$$(12) \quad |A(r)| \equiv \left| \frac{r(e^{i\pi} - 1)}{e^{i\pi r} - 1} \right| > \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi}.$$

Das gilt für beliebig kleine r . Der Ausdruck $A(r)$ ist bei Festhaltung der durch die Gleichung (11) bestimmten Differenz $\vartheta_2 - \vartheta_1$ von ϑ_1 nicht abhängig. Also kann man über ϑ_1 bei beliebig kleinem festem r noch so verfügen, dass $e^{i\vartheta_1(r^{-1}-1)}$ jeden beliebigen Wert σ auf dem Einheitskreise annimmt. Man erhält also

$$\frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = 1 + \sigma \cdot A(r).$$

Man kann z. B. über σ so verfügen, dass $\sigma \cdot A(r)$ reell und positiv wird, dann wird nach (12)

$$|1 + \sigma \cdot A(r)| > 1 + \frac{2}{\pi} > 1.$$

Also existiert kein erweiterter absoluter Differentialquotient. Man kann ferner über σ so verfügen, dass $\sigma.A(r)$ rein positiv imaginär wird; dann wird

$$\operatorname{sgn}(1 + \sigma.A(r)) = \operatorname{sgn}(1 + i|A(r)|) \neq 1.$$

Also existiert auch kein erweiterter Signum-Differentialquotient.

Für das Folgende brauche ich noch eine weitere Ungleichheitsbeziehung. Es sei x eine komplexe Zahl, $|x| < 1$. Dann ist

$$(13) \quad |\log(1+x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n} = \log\left(\frac{1}{1-|x|}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} - 1}.$$

Beispiel (E): Es sei für das Gebiet $|z| < e^{-1}$ die Funktion $f(z) = u$ definiert durch die Gleichungen

$$f(z) = u = z \cdot e^{i \cdot \log \log |z|^{-1}},$$

$$f(0) = 0.$$

Die Einführung der reellen positiven Konstanten c im Exponenten erscheint an dieser Stelle überflüssig, ist aber für spätere Zwecke nützlich.

An der Stelle $z=0$ besitzt $f(z)$ einen erweiterten absoluten Differentialquotienten, aber keinen Signum-Differentialquotienten.

Zunächst ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{u - 0}{z - 0} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Es soll ferner gezeigt werden, dass

$$(14) \quad \lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 0}} \left| \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} \right| = 1.$$

Man wähle die Bezeichnung so, dass

$$|z_2| \geq |z_1|.$$

Der Fall $z_1 = 0$ ist bereits erledigt. Man nehme also $|z_1| > 0$ an. Es soll nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε eine hinreichend kleine reelle positive Zahl δ so bestimmt werden, dass, wenn

$$|z_1| \leq |z_2| < \delta$$

ist,

$$(15) \quad \left| \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

wird. Man erhält unter Benutzung von (10)

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \left| \left| \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} - 1 \right| \right| = \left| \left| \frac{z_2 \cdot e^{i \log \log |z_2|^{-1}} - \tilde{z}_1 \cdot e^{i \log \log |\tilde{z}_1|^{-1}}}{z_2 - \tilde{z}_1} - 1 \right| \right| \\
 &= \left| e^{i \log \log |z_2|^{-1}} \cdot \left| \frac{1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \cdot e^{i \log \left(\frac{\log |\tilde{z}_1|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right)}}{1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2}} - 1 \right| \right| \\
 &\leq \left| \frac{1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \cdot e^{i \log \left(\frac{\log |\tilde{z}_1|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right)}}{1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2}} - 1 \right| \\
 &= \left| \frac{\frac{\tilde{z}_1}{z_2} \left(1 - e^{i \log \left(\frac{\log |\tilde{z}_1|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right)} \right)}{1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2}} \right| \\
 &< \frac{\left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|}{\left| 1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|} \cdot c \cdot \log \left(\frac{\log |\tilde{z}_1|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right) \\
 &= \frac{c \cdot \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|}{\left| 1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|} \cdot \log \left(1 + \frac{\log \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right) \\
 &< \frac{c \cdot \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right| \cdot \log \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|^{-1}}{\left| 1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right| \cdot \log |z_2|^{-1}},
 \end{aligned}$$

weil für alle reellen $\alpha > 0$

$$\log(1 + \alpha) < \alpha.$$

Setzt man

$$1 - \frac{\tilde{z}_1}{z_2} = x,$$

$$1 - \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right| = y,$$

so ist

$$(17) \quad y \leq |x|.$$

Ferner ergibt sich aus (13)

$$(18) \quad \log \left| \frac{\tilde{z}_1}{z_2} \right|^{-1} = \log \left(\frac{1}{1 - y} \right) < \frac{y}{1 - y}.$$

Setzt man (18) in (16) ein, so erhält man unter Benutzung von (17)

$$(19) \quad \left| \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} - 1 \right| < \frac{cy(1-y)}{(1-y)|x| \log |z_2|^{-1}} \leq \frac{c}{\log |z_2|^{-1}} < \varepsilon,$$

sowie

$$\log |z_2|^{-1} > \frac{c}{\varepsilon}$$

oder

$$|z_1| \leq |z_2| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \delta.$$

Damit ist (15) oder (14) erfüllt, also die Existenz des erweiterten absoluten Differentialquotienten im Punkte $z=0$ bewiesen. Ein Signum-Differentialquotient existiert nicht. Denn

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{u - 0}{z - 0} \right) = \operatorname{sgn} e^{u \cdot \log \log |z|^{-1}}$$

hat für $z=0$ keinen Limes.

Beispiel (F): Es sei für das Gebiet $|z| < e^{-1}$ die Funktion $f(z) = u$ definiert durch die Gleichungen

$$f(z) = u = z \cdot \log |z|^{-1},$$

$$f(0) = 0.$$

An der Stelle $z=0$ besitzt $f(z)$ einen erweiterten Signum-Differentialquotienten, aber keinen absoluten Differentialquotienten.

Es ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \frac{u - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \log |z|^{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Es soll gezeigt werden, dass

$$(20) \quad \lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 0}} \operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = 1.$$

Man wähle die Bezeichnung so, dass

$$|z_1| \leq |z_2|.$$

Der Fall $z_1=0$ ist bereits erledigt. Man nehme also $|z_1| > 0$ an. Es soll nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε eine hinreichend kleine reelle positive Zahl δ so bestimmt werden, dass, wenn

$$|z_1| \leq |z_2| < \delta$$

ist,

$$(21) \quad \left| \operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} - 1 \right| < \varepsilon$$

wird. Es ist

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \left| \operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} - 1 \right| &= \left| \operatorname{sgn} \frac{z_2 \cdot \log |z_2|^{-1} - z_1 \cdot \log |z_1|^{-1}}{z_2 - z_1} - 1 \right| \\
 &= \left| \operatorname{sgn} \frac{z_2 \log |z_2|^{-1}}{z_2} \cdot \operatorname{sgn} \frac{1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\log |z_1|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}}}{1 - \frac{z_1}{z_2}} - 1 \right| \\
 &= \left| \operatorname{sgn} \frac{1 - \frac{z_1}{z_2} \left(1 + \frac{\log \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^{-1}}{\log |z_2|^{-1}} \right)}{1 - \frac{z_1}{z_2}} - 1 \right| \\
 &= \left| \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{\frac{z_1}{z_2} \cdot \log \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^{-1}}{\left(1 - \frac{z_1}{z_2} \right) \log |z_2|^{-1}} \right) - 1 \right|.
 \end{aligned}$$

Es sei a eine komplexe Zahl, die der Bedingung $|a| < 1$ genügt. $\bar{a}$ bedeute die zu a konjugierte Zahl. Es ist

$$0 \leq (|a|^2 + \Re(a))^2 = \Re^2(a) + 2\Re(a) \cdot |a|^2 + |a|^4,$$

also

$$(1 - |a|^2)\Im^2(a) \leq |a|^2 + 2|a|^2 \cdot \Re(a) + |a|^2 \Re^2(a)$$

oder

$$\left(\frac{\Im(a)}{1 + \Re(a)} \right)^2 \leq \frac{|a|^2}{1 - |a|^2},$$

$$\frac{\Re^2(1 + a) + \Im^2(1 + a)}{\Re^2(1 + a)} \leq \frac{1}{1 - |a|^2},$$

$$\frac{\Re(1 + a)}{|1 + a|} \geq \sqrt{1 - |a|^2},$$

$$2 - 2\Re(\operatorname{sgn}(1 + a)) \leq 2 - 2\sqrt{1 - |a|^2},$$

$$\operatorname{sgn}(1 + a) \cdot \operatorname{sgn}(1 + \bar{a}) - \operatorname{sgn}(1 + a) - \operatorname{sgn}(1 + \bar{a}) + 1 \leq 2 - 2\sqrt{1 - |a|^2},$$

$$(23) \quad |\operatorname{sgn}(1 + a) - 1| \leq \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - |a|^2}}.$$

Man setze

$$a = - \frac{\frac{z_1}{z_2} \cdot \log \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^{-1}}{\left(1 - \frac{z_1}{z_2} \right) \log |z_2|^{-1}},$$

ferner bestimme man

$$|z_1| \leq |z_2| < e^{\frac{-1}{1 - \frac{1}{4}}} = \delta.$$

Dann ist

$$(24) \quad \log |\zeta_2|^{-1} > \frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}$$

und nach (16), (19) und (24)

$$(25) \quad |a| = \frac{\left| \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right| \cdot \log \left| \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right|^{-1}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right| \log |\zeta_2|^{-1}} \leq \frac{1}{\log |\zeta_2|^{-1}} < \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}};$$

also ist nach (22), (23) und (25)

$$(26) \quad \begin{cases} \left| \operatorname{sgn} \frac{u_2 - u_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - 1 \right| = |\operatorname{sgn}(1 + a) - 1| \\ \leq \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - |a|^2}} < \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)}} = \sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)} = \varepsilon. \end{cases}$$

Damit ist (21) erfüllt, also gilt auch (20).

Es existiert aber kein absoluter Differentialquotient. Es ist

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{u - 0}{\zeta - 0} \right| = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \log |\zeta|^{-1} = \infty.$$

Die beiden folgenden Beispiele werden aus den beiden vorhergehenden durch Häufung gebildet.

Beispiel (G): Es seien drei monoton gegen 0 abnehmende Reihen reeller positiver Zahlen gegeben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

die den Bedingungen genügen

$$(27) \quad a_n < e^{-2},$$

$$(28) \quad c_n < 1,$$

$$(29) \quad \rho_n < \frac{a_{n-1} - a_n}{2},$$

$$(30) \quad \rho_n < \frac{a_n - a_{n+1}}{2}.$$

Es konvergiere die Reihe

$$(31) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \log \log \rho_n^{-1} = C.$$

Aus (31) folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \log \log a_n^{-1} = B,$$

ebenso konvergiert

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} = A.$$

Es sei nun $f(\zeta) = u$ definiert durch die Gleichung

$$f(\zeta) = u = (1 + Ai)\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\zeta),$$

hierin ist

$$g_n(\zeta) = \sum_{\psi=0}^3 h_{n\psi}(\zeta),$$

hierin wieder

$$(33) \quad h_{n\psi}(\zeta) = (\zeta - a_n \cdot i^\psi) \left(e^{i^\psi \log \left(\frac{\log |\zeta - a_n \cdot i^\psi|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right)} - 1 \right).$$

Es ist $h_{n\psi}(0) = 0$, also $g_n(0) = 0$, $f(0) = 0$.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass $f(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 0$ den gewöhnlichen Differentialquotienten 1 besitzt; die ρ_n benutze ich dabei noch nicht. Es soll also gezeigt werden, dass

$$(34) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} - 1 \right) = 0,$$

d. h. nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε soll ein hinreichend kleine reelle positive Grösse δ so bestimmt werden, dass, wenn

$$|\zeta| < \delta$$

ist,

$$(35) \quad \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + (1 + Ai) - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + \frac{2ic_n}{\log a_n^{-1}} \right) \right| < \varepsilon$$

wird. Es mögen $M \geq N$ zwei noch zu bestimmende positive ganze Zahlen sein. Dann ist

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + \frac{2ic_n}{\log a_n^{-1}} \right) \right| &\leq \sum_{n=1}^N \left| \frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + \frac{2ic_n}{\log a_n^{-1}} \right| + \sum_{n=N+1}^M \left| \frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + \frac{2ic_n}{\log a_n^{-1}} \right| \\ &+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{g_n(\zeta)}{\zeta} \right| + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \right.$$

Hierin sei zunächst N so bestimmt, dass

$$(37) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} < \frac{7\varepsilon}{201},$$

$$(38) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \log \log a_n^{-1} < \frac{\varepsilon}{36},$$

sodann bestimme man

$$(39) \quad \delta < a_N \cdot \sqrt{\frac{7\varepsilon}{720A}}$$

und

$$(40) \quad \delta < \frac{a_N}{2}.$$

Für das vorliegende ζ , das absolut kleiner als δ sei, bestimme man M so gross, dass

$$(41) \quad \frac{a_{M+1}}{2} < |\zeta| \leq \frac{a_M}{2}.$$

Es genügt nach (40) N der zweiten dieser Bedingungen, es kann auch $N = M$ sein, so dass $S_2 = 0$ wird.

Zur Abschätzung von S_1 und S_2 verfähre man folgendermassen. Es ist nach (33)

$$(42) \quad h_{n\psi}(\lambda) = a_n \cdot i^\psi \left(\frac{\lambda}{a_n \cdot i^\psi} - 1 \right) \left[e^{i \log \left(1 - \frac{\log \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{a_n \cdot i^\psi} \right) + \log \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{a_n \cdot (1-i)^\psi} \right)}{2 \log a_n^{-1}} \right)} - 1 \right].$$

Wenn

$$(43) \quad 1 - \frac{|\lambda|}{a_n} > a_n$$

oder

$$(44) \quad |\lambda| < a_n - a_n^2,$$

so lassen sich die inneren und äusseren Logarithmen im Exponenten von e auf der rechten Seite von (42) in konvergente Potenzreihen entwickeln, also auch die Exponentialfunktion selber. Es ist für S_1 und S_2 nach (41)

$$(45) \quad |\lambda| \leq \frac{a_n}{2}.$$

Darum ist wegen (27)

$$1 - \frac{|\lambda|}{a_n} \geq \frac{1}{2} > e^{-2} > a_n,$$

also (43) oder (44) erfüllt. Man erhält also

$$\begin{aligned} h_{n\psi}(\lambda) &= a_n \cdot i^\psi \cdot k_n \left(\frac{\lambda}{a_n \cdot i^\psi}, \frac{\bar{\lambda}}{a_n \cdot i^{-\psi}} \right) \\ &= a_n \cdot i^\psi \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{\rho=0}^r b_{\rho, r-\rho} \cdot \frac{\lambda^\rho \bar{\lambda}^{r-\rho}}{a_n^r \cdot i^{\psi(2\rho-r)}} \right). \end{aligned}$$

Also wird

$$g_n(\lambda) = a_n \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{\rho=0}^r \left(b_{\rho, r-\rho} \cdot \frac{\lambda^\rho \bar{\lambda}^{r-\rho}}{a_n^r} \cdot \sum_{\psi=0}^3 i^{\psi(r-2\rho+1)} \right) \right).$$

Hierin ist

$$\sum_{\psi=0}^3 i^{\psi(r-2\rho+1)} = \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases} \quad \text{wenn} \quad r - 2\rho + 1 \begin{cases} \equiv 0 \\ \not\equiv 0 \end{cases} \pmod{4}.$$

Die Summe ist also nur dann von 0 verschieden, wenn

$$(46) \quad r = 2s - 1,$$

$$(47) \quad \rho \equiv s \pmod{2}.$$

Für $r = 1$ ist $s = 1$, also auch $\rho = 1$. Setzt man

$$g_n(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{\rho=0}^r c_{\rho, r-\rho} \cdot \lambda^\rho \bar{\lambda}^{r-\rho} \right),$$

so ist

$$(48) \quad c_{1,0} = 4b_{1,0},$$

$$(49) \quad c_{0,1} = 0.$$

Also besitzt $g_n(z)$ nach Satz (I) an der Stelle $z = 0$ einen erweiterten Differentialquotienten.

Man erhält eine Majorante von $g_n(z)$ d. h. eine Potenzentwicklung nach z und $\bar{z}$, in der jeder Koeffizient positiv und absolut grösser ist als der entsprechende in $g_n(z)$, wenn man eine Majorante von $h_{n\psi}(z)$ bildet und in dieser die Glieder, deren Indices nicht (46) und (47) gleichzeitig genügen, nach Belieben ganz oder teilweise fortlässt, z. B. nur die Glieder mit ungeradem r berücksichtigt.

Es ist

$$e^{ic_n \log(1+y)} = (1+y)^{ic_n}.$$

Die Binomialentwicklung der rechten Seite konvergiert bekanntlich, so lange $|y| < 1$. Es ist für $r \geq 1$ der Binomialkoeffizient

$$\binom{ic_n}{r} = \frac{ic_n}{r} \cdot \prod_{v=1}^{r-1} \left(-1 + \frac{ic_n}{v} \right).$$

Also erhält man unter Benutzung der bekannten Formel

$$\sin(ic_n \pi) = ic_n \pi \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c_n^2}{v^2} \right)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \binom{ic_n}{r} \right| &= \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\prod_{v=1}^{r-1} \left(1 + \frac{c_n^2}{v^2} \right)} < \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c_n^2}{v^2} \right)} \\ &= \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\frac{\sin(ic_n \pi)}{ic_n \pi}} = \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\frac{e^{-ic_n \pi} - e^{ic_n \pi}}{2i(ic_n \pi)}} = \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(c_n \pi)^{2\mu}}{(2\mu+1)!}}. \end{aligned}$$

Der Radikandus des letzten Ausdrucks ist eine monoton wachsende Funktion von c_n . Also ist nach (28)

$$\frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(c_n \pi)^{2\mu}}{(2\mu+1)!}} < \frac{c_n}{r} \cdot \sqrt{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}} < \frac{2c_n}{r}.$$

Es ist also

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} |h_{n\psi}(z)| &= a_n \cdot \left| k_n \left(\frac{z}{a_n \cdot i^{\psi}}, \frac{\bar{z}}{a_n \cdot i^{-\psi}} \right) \right| \\ &< a_n \cdot \left(1 + \frac{|z|}{a_n} \right) \cdot 2c_n \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{|z|}{a_n} \right)^s}{\log a_n^{-1}} \right)^r \\ &< a_n \cdot \left(1 + \frac{|z|}{a_n} \right) \cdot 2c_n \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{a_n} \right)^s}{\log a_n^{-1}} \right)^r. \end{aligned} \right.$$

Die innere und die äussere unendliche Reihe in diesem Ausdrucke konvergieren wegen

(45). Es ist also

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} |h_n(\zeta)| &< a_n \cdot \left(1 + \frac{|\zeta|}{a_n}\right) \cdot 2c_n \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right) - 1\right) \log a_n^{-1} - 1} \\ &= \frac{2a_n c_n \cdot \left(1 + \frac{|\zeta|}{a_n}\right)}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{\frac{|\zeta|}{a_n}}{1 - \frac{|\zeta|}{a_n} \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)} \\ &= \frac{2a_n c_n}{\log a_n^{-1}} \left(1 + \frac{|\zeta|}{a_n}\right) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^r \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)^{r-1} \\ &= \frac{2a_n c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left[\frac{|\zeta|}{a_n} + \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right) \cdot \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^r \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)^{r-2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Der letzte Ausdruck in (50) ergibt nach Potenzen von $|\zeta|$ geordnet den letzten Ausdruck in (51). Setzt man $\zeta = \bar{\zeta} = |\zeta|$, so sind diese Ungleichheitsbeziehungen auch richtig für den Koeffizienten jeder einzelnen Potenz von $|\zeta|$ in der Entwicklung der linken und rechten Seite. Unter Berücksichtigung von (48) und (49) wird der Koeffizient von ζ in $g_n(\zeta)$ ermittelt und das entsprechende Glied von $g_n(\zeta)$ abgezogen:

$$\left|g_n(\zeta) + \frac{2ic_n \zeta}{\log a_n^{-1}}\right| < \frac{8c_n}{\log a_n^{-1}} \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right) \cdot \frac{|\zeta|}{a_n} \cdot |\zeta| \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^r \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)^r.$$

Hierin darf man, wie ausgeführt, rechts die geraden Potenzen von ζ fortlassen; also ist nach (27) und (45)

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \left|\frac{g_n(\zeta)}{\zeta} + \frac{2ic_n}{\log a_n^{-1}}\right| &< \frac{8c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)^{2r+1} \\ &= \frac{8c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}}{1 - \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}\right)^2} \\ &< \frac{8c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 = \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{240}{7}. \end{aligned} \right.$$

Es ist nach (36), (52), (39), (32)

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 &< \sum_{n=1}^N \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{240}{7} < \sum_{n=1}^N \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{\delta}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{240}{7} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{7\varepsilon}{720A} \cdot \frac{240}{7} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist nach (36), (52), (41), (37)

$$\begin{aligned} S_2 &< \sum_{n=N+1}^M \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{240}{7} < \sum_{n=N+1}^M \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_M}\right)^2 \cdot \frac{240}{7} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{240}{7} < \frac{7\varepsilon}{201} \cdot \frac{60}{7} = \frac{60\varepsilon}{201}, \end{aligned}$$

ferner nach (36) und (37)

$$S_4 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2c_n}{\log a_n^{-1}} < \frac{7\varepsilon}{201}$$

also ist

$$(54) \quad S_2 + S_4 < \frac{\varepsilon(60+7)}{201} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zur Abschätzung von S_3 dienen die folgenden Betrachtungen:

Es besitzt die Funktion $r \cdot \log \log r^{-1}$ den Grenzwert 0 für $r = 0$ und nimmt den Wert 0 wieder an für $r = e^{-1}$. Dazwischen ist sie positiv und muss mindestens ein Maximum besitzen. Es sei

$$(55) \quad 0 = \frac{d}{dr} (r \cdot \log \log r^{-1}) = \log \log r^{-1} + r \cdot \frac{1}{\log r^{-1}} \cdot \frac{(-1)}{r} = \log \log r^{-1} - \frac{1}{\log r^{-1}}.$$

Diese Gleichung sei für den Wert $r = r_0$ erfüllt. Setzt man

$$\log r_0^{-1} = l_0,$$

so ist

$$l_0 \log l_0 = 1.$$

Da $l_0 > 0$, so muss auch $\log l_0 > 0$, sein, also $l_0 > 1$. Für $l_0 > 1$ wächst $l_0 \cdot \log l_0$ monoton mit l_0 .

Es ist

$$2 \cdot \log 2 = \log 4 > 1,$$

also ist

$$\begin{aligned} \log r_0^{-1} &= l_0 < 2, \\ r_0 &> e^{-2}. \end{aligned}$$

Da (55) im betrachteten Intervalle nur diese eine Lösung besitzt, muss bei r_0 das gesuchte Maximum liegen, andere Maxima oder Minima können im Intervalle nicht existieren; es wächst also die Funktion $r \cdot \log \log r^{-1}$ monoton im Intervall

$$(56) \quad 0 \leq r \leq e^{-2}.$$

Für ein $g_n(\zeta)$, das in S_3 vorkommt, ist nach (41)

$$(57) \quad |\zeta| > \frac{a_n}{2}.$$

Demnach ist

$$(58) \quad |\zeta - a_n \cdot i^k| \leq |\zeta| + a_n < 3|\zeta|.$$

Es ist nach (10)

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} |h_{n,k}(\zeta)| &< |\zeta - a_n \cdot i^k| \cdot c_n \cdot \left| \log \frac{|\zeta - a_n \cdot i^k|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right| \\ &= |\zeta - a_n \cdot i^k| \cdot c_n \cdot \left| \log \log |\zeta - a_n \cdot i^k|^{-1} - \log \log a_n^{-1} \right|. \end{aligned} \right.$$

Man unterscheide zwei Fälle:

Fall (a): Es sei

$$|\zeta - a_n \cdot i^\psi| \leq a_n < e^2.$$

Dann überwiegt in der letzten Differenz in (59) das erste Glied; man benutze die Tatsache, dass $r \cdot \log \log r^{-1}$ im Intervall (56) monoton wächst, wende ferner (57) an:

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_{n\psi}(\zeta)}{\zeta} \right| &< \frac{c_n \cdot |\zeta - a_n \cdot i^\psi| \cdot \log \log |\zeta - a_n \cdot i^\psi|^{-1}}{|\zeta|} \\ &< \frac{c_n \cdot a_n \cdot \log \log a_n^{-1}}{\left(\frac{a_n}{2}\right)} = 2 c_n \cdot \log \log a_n^{-1}. \end{aligned}$$

Fall (b): Es sei

$$|\zeta - a_n \cdot i^\psi| > a_n.$$

Dann überwiegt in der letzten Differenz in (59) das zweite Glied. Also wird nach (58)

$$\left| \frac{h_{n\psi}(\zeta)}{\zeta} \right| < \frac{c_n \cdot |\zeta - a_n \cdot i^\psi| \cdot \log \log a_n^{-1}}{|\zeta|} < 3 c_n \cdot \log \log a_n^{-1}.$$

Es ist also allgemein

$$(60) \quad \left| \frac{g_n(\zeta)}{\zeta} \right| \leq \sum_{\psi=0}^3 \left| \frac{h_{n\psi}(\zeta)}{\zeta} \right| < 12 c_n \cdot \log \log a_n^{-1}.$$

Es folgt aber aus (36), (60) und (38)

$$(61) \quad S_3 < \sum_{n=M+1}^{\infty} 12 c_n \cdot \log \log a_n^{-1} < 12 \cdot \frac{\varepsilon}{36} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist nach (53), (54), (61)

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit sind aber nach (36) auch (35) und (34) erfüllt.

Um die Existenz des erweiterten absoluten Differentialquotienten an der Stelle $\zeta = 0$ zu beweisen, verfähre man ähnlich.

Zunächst soll gezeigt werden, dass ein Wert ζ nicht gleichzeitig zwei Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$(62) \quad |\zeta - a_n \cdot i^\psi| < \rho_n,$$

$$(63) \quad |\zeta - a_m \cdot i^\varphi| < \rho_m$$

genügen kann, wenn nicht $a_n \cdot i^\psi = a_m \cdot i^\varphi$; hierin bedeuten ψ und φ eine der Zahlen 0, 1, 2, 3. Denn aus (62) und (63) würde folgen

$$(64) \quad \begin{cases} |a_n \cdot i^\psi - a_m \cdot i^\varphi| = |(a_n \cdot i^\psi - \zeta) - (a_m \cdot i^\varphi - \zeta)| \\ \leq |a_n \cdot i^\psi - \zeta| + |a_m \cdot i^\varphi - \zeta| < \rho_n + \rho_m. \end{cases}$$

Wenn $n < m$, so ist nach (64), (29) und (30)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &\leq a_n - a_m \leq |a_n \cdot i^\psi - a_m \cdot i^\varphi| < \rho_n + \rho_m \\ &\leq \rho_n + \rho_{n+1} < \frac{a_n - a_{n+1}}{2} + \frac{a_n - a_{n+1}}{2} = a_n - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichheitsbeziehung enthält aber einen Widerspruch. Wenn $n = m$, so ist nach (64) und (30)

$$a_n \cdot \sqrt{2} \leq |a_n \cdot i^\psi - a_n \cdot i^\varphi| < 2 \rho_n < a_n - a_{n+1}.$$

Auch diese Ungleichheitsbeziehung enthält einen Widerspruch. Also ist das gleichzeitige Bestehen von (62) und (63) für keinen Wert z möglich, d. h. je zwei Kreisgebiete (62), (63) liegen ausserhalb einander. Man unterscheide nun zwei Fälle, je nachdem es für ein Wertepaar $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ einen bestimmten Wert $a_m \cdot i^\varphi$ gibt derart, dass gleichzeitig

$$(65) \quad |\tilde{z}_1 - a_m \cdot i^\varphi| < \rho_m$$

und

$$(66) \quad |\tilde{z}_2 - a_m \cdot i^\varphi| < \rho_m$$

oder (65) und (66) für kein $a_m \cdot i^\varphi$ gleichzeitig erfüllt sind. Der zweite Fall soll zuerst behandelt werden. Es ist

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \left| \frac{f(\tilde{z}_2) - f(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} \right| - 1 \right| \leq \left| \frac{f(\tilde{z}_2) - f(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} - 1 \right| \\ & = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(\tilde{z}_2) - g_n(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} + \frac{2i c_n}{\log a_n^{-1}} \right) \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^N \left| \frac{g_n(\tilde{z}_2) - g_n(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} + \frac{2i c_n}{\log a_n^{-1}} \right| + \sum_{n=N+1}^M \left| \frac{g_n(\tilde{z}_2) - g_n(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} + \frac{2i c_n}{\log a_n^{-1}} \right| \\ & \quad + \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{g_n(\tilde{z}_2) - g_n(\tilde{z}_1)}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} \right| + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \\ & = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \right.$$

Hierin sei wieder $M \geq N$ und zwar sei N so bestimmt, dass

$$(68) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} < \frac{49 \varepsilon}{7167},$$

$$(69) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \log \log \rho_n^{-1} < \frac{\varepsilon}{20};$$

sodann bestimme man

$$(70) \quad \delta < a_N \cdot \sqrt{\frac{49 \varepsilon}{28080 A}}$$

und

$$(71) \quad \delta < \frac{a_N}{2}.$$

Für das vorliegende Wertepaar $|\tilde{z}_1| \leq |\tilde{z}_2|$, das absolut kleiner als δ sei, bestimme man M so gross, dass

$$(72) \quad \frac{a_{M+1}}{2} < |\tilde{z}_2| \leq \frac{a_M}{2}.$$

Es genügt nach (71) N der zweiten dieser Bedingungen, es kann auch $N = M$ sein, so dass $S_2 = 0$ wird.

Zur Abschätzung von S_1 und S_2 verfähre man ganz ähnlich wie vorher; wegen

(72) ist für S_1 und S_2

$$|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \frac{a_n}{2},$$

also lässt sich (42) in eine konvergente Potenzreihe entwickeln. Es ist wieder (51) eine Majorante für $h_{n\psi}(\zeta)$. Beim Uebergang zur Majorante von $g_n(\zeta)$ darf man wieder in dieser die geraden Potenzen von $|\zeta|$ fortlassen. Wendet man die Abschätzung (9) an, so ergibt sich

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{g_n(\zeta_2) - g_n(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{2i c_n}{\log a_n^{-1}} \right| \\ & < \frac{8 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (2^i + 1) \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^{2^i} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right)^{2^i - 1} \\ & = \frac{8 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(2 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left[\frac{2 \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right)}{\left\{ 1 - \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right)^2 \right\}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}}}{1 - \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\log a_n^{-1}} \right)^2} \right] \\ & < \frac{8 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left[\frac{3}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right)^2} \right] \\ & = \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49}. \end{aligned} \right.$$

Es ist nach (67), (73), (70), (32)

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 & < \sum_{n=1}^N \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49} < \sum_{n=1}^N \frac{2 c_n}{\log c_n^{-1}} \cdot \left(\frac{\delta}{a_N} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49} \\ & < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{49 \varepsilon}{28080 A} \cdot \frac{9360}{49} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \right.$$

Es ist ferner nach (67), (73), (72), (68)

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} S_2 & < \sum_{n=N+1}^M \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49} < \sum_{n=N+1}^M \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_M} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49} \\ & \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{9360}{49} < \frac{49 \varepsilon}{7167} \cdot \frac{2340}{49} = \frac{2340 \varepsilon}{7167}, \end{aligned} \right.$$

ferner nach (67) und (68)

$$S_4 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2 c_n}{\log a_n^{-1}} < \frac{49 \varepsilon}{7167};$$

also ist

$$(76) \quad S_2 + S_4 < \frac{\varepsilon(2340 + 49)}{7167} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist ferner

$$(77) \quad S_j \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\psi=0}^j \left| \frac{h_{n\psi}(\tilde{\tau}_2) - h_{n\psi}(\tilde{\tau}_1)}{\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1} \right| = \bar{S}_j.$$

Man setze

$$(78) \quad \begin{aligned} \tilde{\tau}_1 - a_n \cdot i_{\downarrow} &= i^{\gamma_{\alpha}} \\ \tilde{\tau}_2 - a_n \cdot i_{\downarrow} &= i^{\gamma_{\beta}}, \end{aligned}$$

und zwar verfüge man über die Indices α und β so, dass

$$|\gamma_{\beta}| \geq |\gamma_{\alpha}|.$$

Da (65) und (66) nicht gleichzeitig erfüllt sollen, so ist

$$(79) \quad |\gamma_{\beta}| \geq \varrho_n.$$

Es wird

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{h_{n\psi}(\tilde{\tau}_2) - h_{n\psi}(\tilde{\tau}_1)}{\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1} &= \frac{\gamma_{\beta} \cdot e^{i\gamma_{\beta} \log \left(\frac{\log |\tilde{\tau}_2|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right)} - \gamma_{\alpha} \cdot e^{i\gamma_{\alpha} \log \left(\frac{\log |\tilde{\tau}_1|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right)}}{\gamma_{\beta} - \gamma_{\alpha}} - \frac{\gamma_{\beta} - \gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta} - \gamma_{\alpha}} \\ &= e^{i\gamma_{\beta} \log \left(\frac{\log |\tilde{\tau}_2|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right)} \cdot \frac{1 - \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}} \cdot e^{i\gamma_{\alpha} \log \left(\frac{\log |\tilde{\tau}_1|^{-1}}{\log |\tilde{\tau}_2|^{-1}} \right)}}{1 - \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}}} - 1. \end{aligned} \right.$$

Es sei α eine reelle Zahl, a eine komplexe Zahl, dann ist nach (10)

$$(81) \quad \begin{cases} |e^{i\alpha} \cdot a - 1| = |(e^{i\alpha} \cdot a - e^{i\alpha}) + (e^{i\alpha} - 1)| \\ \leq |e^{i\alpha}| \cdot |a - 1| + |e^{i\alpha} - 1| < |a - 1| + |\alpha|. \end{cases}$$

Wendet man (81) auf den letzten Ausdruck in (80) an, so erhält man

$$(82) \quad \left| \frac{h_{n\psi}(\tilde{\tau}_2) - h_{n\psi}(\tilde{\tau}_1)}{\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1} \right| < \left| \frac{1 - \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}} \cdot e^{i\gamma_{\alpha} \log \left(\frac{\log |\tilde{\tau}_1|^{-1}}{\log |\tilde{\tau}_2|^{-1}} \right)}}{1 - \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}}} - 1 \right| + c_n \cdot \left| \frac{\log |\gamma_{\beta}|^{-1}}{\log a_n^{-1}} \right|.$$

Zur Abschätzung des ersten Ausdrucks auf der rechten Seite benutze man (16) vom dritten Ausdruck an und (19). Der zweite Ausdruck ist gleich

$$c_n \cdot |\log \log |\gamma_{\beta}|^{-1} - \log \log |a_n|^{-1}|$$

Da nach (79)

$$\log \log |\gamma_{\beta}|^{-1} \leq \log \log \varrho_n^{-1},$$

da ferner nach (30)

$$\log \log a_n^{-1} < \log \log \varrho_n^{-1}$$

und eine Differenz zweier positiver Grössen absolut nicht grösser sein kann als die grössere der beiden, so erhält man aus (82)

$$(83) \quad \left| \frac{h_{n\psi}(\tilde{\tau}_2) - h_{n\psi}(\tilde{\tau}_1)}{\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1} \right| < \frac{c_n}{\log |\gamma_{\beta}|^{-1}} + c_n \cdot \log \log \varrho_n^{-1}.$$

Hierin ist nach (78), (72), (27)

$$(84) \quad |\zeta_{\beta}| \leq |\zeta| + a_n \leq \frac{3}{2} a_n \leq \frac{3}{2} e^2;$$

ferner ist nach (30)

$$(85) \quad \rho_n < \frac{a_n}{2} < \frac{1}{2e^2}.$$

Also erhält man aus (83) unter Benutzung von (84) und (85)

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|h_{m\psi}(\zeta_2) - h_{m\psi}(\zeta_1)|}{\zeta_2 - \zeta_1} \\ < \frac{c_n}{\log\left(\frac{2e^2}{3}\right)} \cdot \frac{\log \log \rho_n^{-1}}{\log \log (2e^2)} + c_n \cdot \log \log \rho_n^{-1} < \frac{5}{3} c_n \cdot \log \log \rho_n^{-1}. \end{array} \right.$$

Also folgt aus (77), (86) und (69)

$$(87) \quad S_3 \leq \bar{S}_3 < \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{20}{3} \cdot c_n \log \log \rho_n^{-1} < \frac{20}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{20} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ergibt sich aus (67), (74), (76), (87)

$$(88) \quad \left| \left| \frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} \right| - 1 \right| \leq S_1 + S_2 + \bar{S}_3 + S_4 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

In dem noch zu behandelnden ersten Falle waren für ein bestimmtes $a_m \cdot i^{\psi}$ (65) und (66) gleichzeitig erfüllt; man setze

$$\begin{aligned} \zeta_1 - a_m \cdot i^{\psi} &= Z_{\alpha} \\ \zeta_2 - a_m \cdot i^{\psi} &= Z_{\beta}, \end{aligned}$$

so dass

$$(89) \quad |Z_{\alpha}| \leq |Z_{\beta}| < \rho_m.$$

Zunächst ist nach (72), (66), (30)

$$\frac{a_M}{2} \geq |\zeta_2| > a_m - \rho_m > a_m - \frac{a_m}{2} = \frac{a_m}{2},$$

also ist

$$(90) \quad a_m \leq a_{M+1}.$$

Man setze zur Abkürzung

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{Z_{\beta} \cdot e^{a_m \log\left(\frac{\log |Z_{\beta}|^{-1}}{\log a_m^{-1}}\right)} - Z_{\alpha} \cdot e^{a_m \log\left(\frac{\log |Z_{\alpha}|^{-1}}{\log a_m^{-1}}\right)}}{Z_{\beta} - Z_{\alpha}} \\ = \frac{h_{m\psi}(\zeta_2) - h_{m\psi}(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} + 1. \end{array} \right.$$

Da für alle $a_n \cdot i^{\psi}$, die von $a_m \cdot i^{\psi}$ verschieden sind, weder für ζ_1 noch für ζ_2 (62) erfüllt sein kann, und nach (90) a_m erst in S_3 vorkommt, so gelten (74) und (75) unverändert. In S_3 und $\bar{S}_3$ lasse man das Glied mit $h_{m\psi}$ zunächst weg; für die übrigen Glieder gilt (79) bis (86). Unter Anwendung von (74), (76), von (86) mit der angegebenen Weglassung, ferner von (16) und (19) zur Abschätzung von $\|Q\| - 1$ und schliesslich

unter Anwendung von (87), (88) und (89) erhält man

$$(92) \quad \begin{cases} \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - 1 \right| - \left| \left(\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - |Q| \right) + (|Q| - 1) \right| \right| \\ \leq \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - Q \right| + ||Q| - 1| \\ < S_1 + S_2 + \bar{S}_1 - \left| \frac{h_{m\bar{z}}(z_2) - h_{m\bar{z}}(z_1)}{z_2 - z_1} \right| + S_4 + \frac{c_m}{\log |Z_\beta|^{-1}} \\ < S_1 + S_2 + 4 \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\log |\zeta_\beta|^{-1}} + c_n \cdot \log \log \rho_n^{-1} \right) \\ - \left(\frac{c_m}{\log |Z_\beta|^{-1}} + c_m \cdot \log \log \rho_m^{-1} \right) + S_4 + \frac{c_m}{\log |Z_\beta|^{-1}} < \varepsilon. \end{cases}$$

Damit ist die Existenz des erweiterten absoluten Differentialquotienten an der Stelle $z = 0$ nachgewiesen.

Es soll gezeigt werden, dass kein verallgemeinerter Signum-Differentialquotient vorhanden ist, dass man also nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse $\bar{\delta}$, die kleiner oder gleich dem zu $\varepsilon = \frac{24}{25}$ gehörigen δ sei, $|z_1| < \bar{\delta}$ und $|z_2| < \bar{\delta}$ so bestimmen kann, dass, wenn man

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = -1 - a$$

setzt, $\operatorname{sgn}(-1 - a)$ sich von 1 um mehr als eine feste endliche Grösse unterscheidet. Man bestimme

$$a_m < \frac{2}{3} \bar{\delta}.$$

Es seien (65) und (66) gleichzeitig erfüllt; dann ist

$$z_2 \leq a_m + \rho_m < \frac{3}{2} a_m < \bar{\delta}.$$

Man setze $z_1 = a_m$, also $Z_x = 0$; dann wird

$$Q = e^{c_m \log \left(\frac{\log |Z_\beta|^{-1}}{\log \rho_m^{-1}} \right)}.$$

Man kann nun über Z_β so verfügen, dass $Q = -1$ wird. Also ist nach (92)

$$(93) \quad |a| = |(-1 - a) - Q| + ||Q| - 1| < \frac{24}{25}.$$

Nun ist aber

$$(94) \quad |\operatorname{sgn}(1 + a) - 1|^2 + |\operatorname{sgn}(1 + a) + 1|^2 = 4,$$

also ist nach (94), (23), (93)

$$\begin{aligned} |\operatorname{sgn}(-1 - a) - 1| &= |\operatorname{sgn}(1 + a) + 1| = \sqrt{4 - |\operatorname{sgn}(1 + a) - 1|^2} \\ &\geq \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - |a|^2}} > \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2}} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Also existiert kein erweiterter Signum-Differentialquotient.

Beispiel (H): Es seien zwei monoton gegen 0 abnehmende Reihen reeller positiver Zahlen gegeben,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

die der Bedingung genügen

$$(95) \quad a_n < \frac{1}{2e};$$

es konvergiere ferner die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 b_n \log a_n^{-1} = A;$$

also konvergiert auch

$$(96) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 b_n = B.$$

Es sei $f(z)$ im Gebiete

$$(97) \quad |z| < \frac{1}{2e}$$

definiert durch die Gleichung

$$f(z) = B \cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z).$$

Hierin ist

$$g_n(z) = b_n \cdot \sum_{\psi=0}^3 h_{n\psi}(z),$$

hierin wieder

$$\begin{aligned} h_{n\psi}(z) &= (z - a_n \cdot i^\psi) \cdot \log |z - a_n \cdot i^\psi|^{-1} \\ &= a_n \cdot i^\psi \cdot \left(\frac{z}{a_n \cdot i^\psi} - 1 \right) \cdot \left[\log \left| 1 - \frac{z}{a_n \cdot i^\psi} \right|^{-1} + \log a_n^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Es ist

$$h_{n\psi}(0) = -a_n \cdot i^\psi \cdot \log a_n^{-1}, \quad g_n(0) = -b_n a_n \log a_n^{-1} \cdot \sum_{\psi=0}^3 i^\psi = 0,$$

also

$$f(0) = 0.$$

Es soll zunächst gezeigt werden, dass $f(z)$ an der Stelle $z=0$ den gewöhnlichen Differentialquotienten A besitzt. Es soll also gezeigt werden, dass

$$(98) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z)}{z} - A \right) = 0.$$

D. h. nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε soll eine reelle positive Grösse δ hinreichend klein so bestimmt werden, dass für $|z| < \delta$

$$(99) \quad \left| \frac{f(z)}{z} - A \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(z)}{z} + B - A \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(z)}{z} + 2 b_n - 4 b_n \log a_n^{-1} \right) \right| < \varepsilon$$

wird. Es mögen $M \geq N$ zwei noch zu bestimmende positive ganze Zahlen sein. Dann ist

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(z)}{z} + 2 b_n - 4 b_n \log a_n^{-1} \right) \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^N \left| \frac{g_n(z)}{z} + 2 b_n - 4 b_n \log a_n^{-1} \right| + \sum_{n=N+1}^M \left| \frac{g_n(z)}{z} + 2 b_n - 4 b_n \log a_n^{-1} \right| \\ & \quad + \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{g_n(z)}{z} \right| + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2 b_n + \sum_{n=M+1}^{\infty} 4 b_n \log a_n^{-1} \\ & = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5. \end{aligned} \right.$$

Hierin sei N so bestimmt, dass

$$(101) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} 4b_n \cdot \log a_n^{-1} < \frac{3\varepsilon}{26},$$

woraus unter Benutzung von (95) folgt

$$(102) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} 2b_n < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4b_n \cdot \log a_n^{-1}}{2 \cdot \log 2e} < \frac{3}{10} \cdot \frac{3\varepsilon}{26} = \frac{9\varepsilon}{260}.$$

Sodann bestimme man

$$(103) \quad \delta < a_N \cdot \sqrt[3]{\frac{9\varepsilon}{8B}}$$

und

$$(104) \quad \delta < \frac{a_N}{2}.$$

Für das vorliegende $\tilde{z}$, das absolut kleiner als δ sei, bestimme man M so gross, dass

$$(105) \quad \frac{a_{M+1}}{2} < |\tilde{z}| \leq \frac{a_M}{2}.$$

Es genügt nach (104) N der zweiten dieser Bedingungen, es kann auch $M=N$ sein, so dass $S_2 = 0$ wird.

Zur Abschätzung von S_1 und S_2 verfähre man folgendermassen. Es ist

$$\begin{aligned} g_n(\tilde{z}) - 4b_n \tilde{z} \cdot \log a_n^{-1} &= b_n \cdot \sum_{\psi=0}^3 \left\{ (\tilde{z} - a_n \cdot i^\psi) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \left[\left(\frac{\tilde{z}}{a_n \cdot i^\psi} \right)^v + \left(\frac{\bar{\tilde{z}}}{a_n \cdot i^{-\psi}} \right)^v \right] \right\} \\ &= b_n \left\{ -2\tilde{z} + \sum_{\psi=0}^3 \left[\tilde{z} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{z}}{a_n} \right)^v \cdot \left(\frac{i^{-\psi v}}{2^v} - \frac{i^{-\frac{1}{2}v}}{2(v+1)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{z} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{\tilde{z}}}{a_n} \right)^v \cdot \frac{i^{\frac{1}{2}v}}{2^v} - \bar{\tilde{z}} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\tilde{z}}}{a_n} \right)^v \cdot \frac{i^{\frac{1}{2}(v+2)}}{2(v+1)} \right] \right\} \\ &= b_n \left\{ -2\tilde{z} + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\tilde{z} \cdot \left(\frac{\tilde{z}}{a_n} \right)^{4\mu} \cdot \frac{1}{4\mu(4\mu+1)} + \tilde{z} \cdot \left(\frac{\bar{\tilde{z}}}{a_n} \right)^{4\mu} \cdot \frac{1}{4\mu} - \bar{\tilde{z}} \cdot \left(\frac{\bar{\tilde{z}}}{a_n} \right)^{4\mu-2} \cdot \frac{1}{4\mu-1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich bei Benutzung von (104)

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \frac{g_n(\tilde{z})}{\tilde{z}} + 2b_n - 4b_n \cdot \log a_n^{-1} \right| &< \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2 \cdot b_n \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^{2\mu} \\ &= \frac{2}{3} \cdot b_n \cdot \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2} < \frac{2}{3} \cdot b_n \cdot \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{8}{9} \cdot b_n \cdot \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Es ist also nach (100), (106), (103), (96)

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 &< \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \cdot \left(\frac{|\tilde{z}|}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{9} < \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \cdot \left(\frac{\delta}{a_N} \right)^2 \cdot \frac{1}{9} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \cdot \frac{9\varepsilon}{8B} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist nach (100), (106), (105), (102)

$$\begin{aligned} S_2 &< \sum_{n=N+1}^M 2b_n \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{4}{9} < \sum_{n=N+1}^M 2b_n \left(\frac{|\zeta|}{a_M}\right)^2 \cdot \frac{4}{9} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2b_n}{9} < \frac{\varepsilon}{260}. \end{aligned}$$

Nach (100) und (102) ist

$$S_4 < \frac{9\varepsilon}{260},$$

also ist

$$(108) \quad S_2 + S_4 < \frac{\varepsilon(1+9)}{260} = \frac{\varepsilon}{26}.$$

Zur Abschätzung von S_3 dienen folgende Betrachtungen. Es besitzt die Funktion $r \cdot \log r^{-1}$ für $r=0$ den Grenzwert 0 und nimmt den Wert 0 wieder an für $r=1$. Dazwischen muss sie mindestens ein Maximum besitzen. Es sei

$$0 = \frac{d}{dr}(r \log r^{-1}) = \log r^{-1} - 1.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $r=e^{-1}$. Da sie nur eine Lösung besitzt, muss bei $r=e^{-1}$ das gesuchte Maximum liegen; innerhalb des Intervalls $0 < r < 1$ können weitere Maxima oder Minima nicht existieren, also wächst die Funktion $r \cdot \log r^{-1}$ im Intervall

$$0 \leq r \leq e^{-1}$$

monoton, es ist also für S_3 mit Rücksicht auf (95), (97) und (105)

$$\begin{aligned} |g_n(\zeta)| &\leq b_n \cdot \sum_{\psi=0}^3 |\zeta - a_n \cdot i^\psi| \cdot \log |\zeta - a_n \cdot i^\psi|^{-1} \\ &\leq 4b_n \cdot (|\zeta| + a_n) \cdot \log (|\zeta| + a_n)^{-1} < 12b_n |\zeta| \cdot \log a_n^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist nach (101)

$$(109) \quad S_3 < \sum_{n=M+1}^{\infty} 12b_n \cdot \log a_n^{-1} < \frac{9\varepsilon}{26}.$$

Nach (101) ist

$$(110) \quad S_5 < \frac{3\varepsilon}{26}.$$

Also ist nach dem Anfang von (99), (100), (107), (108), (109), (110)

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{26} + \frac{9\varepsilon}{26} + \frac{3\varepsilon}{26} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist (98) bewiesen.

Um die Existenz des erweiterten Signum-Differentialquotienten an der Stelle $\zeta=0$ nachzuweisen, benutze ich folgenden Hilfssatz.

HILFSSATZ I. — Es sei

$$t_1, t_2, t_3, \dots$$

eine unendliche Reihe komplexer Zahlen, die der Bedingung genügen

$$(111) \quad |\operatorname{sgn} t_v - 1| < \varepsilon < 1;$$

es konvergiere ferner

$$(112) \quad \sum_{v=1}^{\infty} t_v = T.$$

Dann ist auch

$$(113) \quad |\operatorname{sgn} T - 1| < \varepsilon.$$

Es folgt aus (111)

$$|\operatorname{sgn} t_v - 1|^2 = (\operatorname{sgn} t_v - 1)(\operatorname{sgn} \bar{t}_v - 1) = 2 - 2\Re(\operatorname{sgn} t_v) < \varepsilon^2,$$

also ist

$$(114) \quad \Re(\operatorname{sgn} t_v) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} > \frac{1}{2}$$

oder

$$\frac{\Re^2(\operatorname{sgn} t_v)}{\Re^2(\operatorname{sgn} t_v) + \Im^2(\operatorname{sgn} t_v)} > \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2,$$

$$\frac{|\Im(\operatorname{sgn} t_v)|}{\Re(\operatorname{sgn} t_v)} < \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2} - 1},$$

$$(115) \quad |\Im(t_v)| < \Re(t_v) \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2 - \varepsilon^2}.$$

Aus (112) und (115) folgt

$$|\Im(T)| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |\Im(t_v)| < \Re(T) \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2 - \varepsilon^2},$$

$$\frac{\Im^2(T) + \Re^2(T)}{\Re^2(T)} < \frac{\varepsilon^2(4 - \varepsilon^2)}{(2 - \varepsilon^2)^2} + 1 = \frac{4}{(2 - \varepsilon^2)^2},$$

$$\Re(\operatorname{sgn} T) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

$$|\operatorname{sgn} T - 1| = \sqrt{2 - 2\Re(\operatorname{sgn} T)} < \varepsilon.$$

Damit ist (113) bewiesen.

Es ist

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{g_n(z_2) - g_n(z_1)}{z_2 - z_1} + 2b_n \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\psi=0}^1 \frac{h_{n\psi}(z_2) - h_{n\psi}(z_1)}{z_2 - z_1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2b_n \\ &= S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \right.$$

Hierin sei N so bestimmt, dass

$$(117) \quad \log \left(\frac{3}{2} a_{N+1} \right)^{-1} > \frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}},$$

sodann sei

$$(118) \quad \delta < a_N \cdot \sqrt{\frac{45 \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}{22}}$$

und

$$(119) \quad \delta < \frac{a_N}{2}$$

bestimmt. Es seien

$$|\zeta_1| < \delta \quad \text{und} \quad |\zeta_2| < \delta.$$

Setzt man

$$a = \frac{1}{4b_n \cdot \log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{g_n(\zeta_2) - g_n(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} + 2b_n \right) - 1,$$

beachtet man, dass das zweite Glied in (106) eine Majorante des ersten Gliedes ist und wendet man die Abschätzung (9) an, so erhält man unter Benutzung von (118) für jedes Glied von S_1

$$\begin{aligned} |a| &< \frac{1}{4b_n \cdot \log a_n^{-1}} \cdot \frac{2}{3} b_n \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} (2\mu + 1) \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^{2\mu} \\ &= \frac{1}{6 \log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{2}{\left[1 - \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \right]^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2} \right\} \\ &< \frac{1}{6 \log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{2}{\left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} \right\} \\ &= \frac{22}{27} \cdot \frac{1}{\log a_n^{-1}} \cdot \left(\frac{|\zeta|}{a_n} \right)^2 < \frac{22}{27} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{45 \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}{22} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}. \end{aligned}$$

Also ist nach (26)

$$(120) \quad \left| \operatorname{sgn} \left(\frac{g_n(\zeta_2) - g_n(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} + 2b_n \right) - 1 \right| = |\operatorname{sgn}(1 + a) - 1| < \varepsilon.$$

Für jedes Glied von S_2 ist nach (119)

$$(121) \quad |\zeta - a_n \cdot i^\psi| \leq |\zeta| + a_n < \delta + a_N < \frac{3}{2} a_N,$$

also ist nach (117)

$$(122) \quad \log |\zeta - a_n \cdot i^\psi|^{-1} \geq \log \left(\frac{3}{2} a_{N+1} \right)^{-1} > \frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}};$$

somit ist nach (24), (25), (26)

$$(123) \quad \left| \operatorname{sgn} \frac{h_{n\psi}(\zeta_2) - h_{n\psi}(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Für jedes Glied von S_3 ist

$$(124) \quad |\operatorname{sgn} 2b_n - 1| = 0.$$

Also folgt aus (116), (120), (123), (124) bei Anwendung von (113)

$$\left| \operatorname{sgn} \frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Damit ist die Existenz des erweiterten Signum-Differentialquotienten an der Stelle $\zeta = 0$ nachgewiesen.

Um schliesslich zu zeigen, dass $f(z)$ an der Stelle $z = 0$ keinen erweiterten absoluten Differentialquotienten besitzt, zeige man, dass nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse $\bar{\delta}$

$$(125) \quad |z_1| < \bar{\delta} \quad \text{und} \quad |z_2| < \bar{\delta}$$

so bestimmt werden können, dass

$$(126) \quad \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| > G,$$

wo G eine beliebig grosse vorgegebene reelle positive Zahl.

Für irgend ein festes $\varepsilon < 1$ werde nach (117), (118), (119) N und δ bestimmt und $\bar{\delta} \leq \delta$ angenommen. Man wähle

$$z_1 = a_m \cdot i^p$$

worin

$$a_m < \bar{\delta},$$

ferner z_2 so, dass es (125) und ausserdem der Bedingung

$$(127) \quad |z_2 - a_m \cdot i^p| < e^{-G}$$

genügt. Nach (120), (123), (124) ist für alle einzelnen Glieder der rechten Seite von (116) die Beziehung (111) erfüllt, sie haben also nach (114) positive Realteile. Also ist nach (116) und (127)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \geq \Re \left(\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \Re \left(\frac{g_n(z_2) - g_n(z_1)}{z_2 - z_1} + 2b_n \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{p=0}^i \Re \left(\frac{h_{np}(z_2) - h_{np}(z_1)}{z_2 - z_1} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2b_n \\ &> \Re \left(\frac{h_{m\bar{p}}(z_2) - h_{m\bar{p}}(z_1)}{z_2 - z_1} \right) = \log |z_2 - a_m \cdot i^p|^{-1} > G. \end{aligned}$$

Also gilt (126) für beliebig kleine Wertepaare z_2 und z_1 . Es existiert mithin kein erweiterter absoluter Differentialquotient.

Zweiter Teil.

SATZ II. — Eine eindeutige Funktion einer komplexen Variablen, die an allen Punkten eines einfach zusammenhängenden, abgeschlossenen Gebietes T einen von 0 verschiedenen erweiterten absoluten Differentialquotienten besitzt, ist entweder eine analytische Funktion oder die konjugierte einer analytischen Funktion.

HILFSSATZ II. — Besitzt eine eindeutige Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen z überall in einem abgeschlossenen, einfach zusammenhängenden Gebiete T einen erweiterten absoluten Differentialquotienten, so ist der erweiterte absolute Differentialquotient im Gebiete T eine stetige Funktion von z und existiert GLEICHMÄSSIG.

Nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε ist $\delta = \delta(\varepsilon, z)$ reell und positiv so bestimmbar, dass, wenn

$$(128) \quad |z_1 - z| < \delta$$

und

$$(129) \quad |z_2 - z| < \delta$$

ist,

$$(130) \quad \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right| < \varepsilon$$

wird. Hierin ist $m(z)$ eine Funktion von z , die nur reelle nicht negative Werte annimmt. Es sei $\bar{\delta}(\varepsilon, z)$ die obere Grenze der für $\delta(\varepsilon, z)$ zulässigen Werte. Es genüge z' der Bedingung

$$|z' - z| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right),$$

ferner sei

$$(131) \quad |z_1 - z'| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z|,$$

$$(132) \quad |z_2 - z'| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z|$$

und

$$(133) \quad |z_1 - z'| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z'\right),$$

$$(134) \quad |z_2 - z'| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z'\right).$$

Aus (131) folgt

$$(135) \quad |z_1 - z| = |(z_1 - z') + (z' - z)| \leq |z_1 - z'| + |z' - z| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right),$$

ebenso

$$(136) \quad |z_2 - z| < \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right).$$

Dann ist wegen (135), (136), (133), (134), (130)

$$\begin{aligned} |m(z) - m(z')| &= \left| \left(m(z) - \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \right) - \left(m(z') - \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \right) \right| \\ &\leq \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right| + \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z') \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $m(z)$ eine stetige Funktion von z .

Es soll gezeigt werden, dass für alle z in T sich

$$0 < \delta(\varepsilon) < \bar{\delta}(\varepsilon, z)$$

bestimmen lässt. Es sei auf Grund der soeben bewiesenen Stetigkeit von $m(z)$, z' so nahe bei z bestimmt, dass

$$(137) \quad |m(z') - m(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner betrachte man *alle* z_1 und z_2 die den Bedingungen (131) und (132) genügen,

aus denen (135) und (136) folgen. Es soll gezeigt werden, dass für sie auch (133) und (134) erfüllt sind, allerdings nur für ε , nicht für $\frac{\varepsilon}{2}$. Es ist nämlich nach (130) und (137)

$$\begin{aligned} \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z') \right| &= \left| \left(\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right) + (m(z) - m(z')) \right| \\ &\leq \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right| + |m(z) - m(z')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für *alle* z_1 und z_2 gilt, die (131) und (132) genügen, so folgt daraus

$$(138) \quad \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z| \leq \bar{\delta}(\varepsilon, z').$$

Diese Ungleichheitsbeziehung gilt erst recht in dem trivialen Falle, dass die linke Seite ≤ 0 . Es sei $k(\varepsilon, z')$ die obere Grenze aller Werte, die

$$\bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z|$$

an einer Stelle z' für alle Werte von z annimmt. Es gibt also nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ξ immer einen Wert z derart, dass

$$(139) \quad \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z| > k(\varepsilon, z') - \xi.$$

Wenn z'' ein anderer fester Punkt, wenn ferner z der Bedingung (139) genügt, so ist

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z'' - z| &\geq \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) - |z' - z| - |z'' - z'| \\ &> k(\varepsilon, z') - \xi - |z'' - z'|. \end{aligned}$$

Also ist

$$k(\varepsilon, z'') \geq k(\varepsilon, z') - |z'' - z'|$$

oder

$$k(\varepsilon, z') - k(\varepsilon, z'') \leq |z'' - z'|.$$

Hierin kann man z' und z'' vertauschen. Also ist

$$|k(\varepsilon, z') - k(\varepsilon, z'')| \leq |z'' - z'|.$$

Daraus folgt aber die Stetigkeit von $k(\varepsilon, z')$. Also besitzt $k(\varepsilon, z')$ in T ein Minimum $k(\varepsilon)$. Da für alle z'

$$k(\varepsilon, z') \geq \bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, z'\right) > 0,$$

so muss das Minimum $k(\varepsilon) > 0$ sein. Es ist aber nach (138)

$$\bar{\delta}(\varepsilon, z') \geq k(\varepsilon, z') \geq k(\varepsilon) > 0.$$

Also lässt sich zu jedem ε ein von z unabhängiges $\bar{\delta}(\varepsilon) < k(\varepsilon)$ bestimmen, so dass aus dem Bestehen von (128) und (129) das Bestehen von (130) folgt. Es ist somit

gezeigt worden, dass der erweiterte absolute Differentialquotient gleichmässig im Gebiete T existiert ²⁾).

Ich gehe nun zum Beweise des Satzes (II) über. Es soll gezeigt werden, dass *entweder* das Integral über $f(z)$ *oder* das Integral über die konjugierte Funktion $\bar{f}(z)$ längs des Umfanges eines beliebigen geschlossenen, aus geraden Stücken bestehenden Weges gleich 0 ist, woraus nach dem verallgemeinerten MORERA'schen Satze ³⁾ folgen wird, dass die Funktion eine analytische ist. Hierzu reicht es wieder hin, zu zeigen, dass das Integral über den Umfang eines beliebigen Dreiecks 0 ist. Es soll also gezeigt werden, dass

$$(140) \quad I_1 + I_2 + I_3 \equiv \int_{a_2}^{a_3} f(z) dz + \int_{a_3}^{a_1} f(z) dz + \int_{a_1}^{a_2} f(z) dz = 0.$$

Hierin sind die Integrale über den geraden Weg zu nehmen. Es sei

$$(141) \quad A_1 = |a_1 - a_2|, \quad A_2 = |a_2 - a_3|, \quad A_3 = |a_3 - a_1|,$$

und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, dass

$$(142) \quad A_1 \geq A_2 \geq A_3.$$

Die Gleichung (140) ist eine Identität, wenn die drei Punkte a_1, a_2, a_3 auf einer geraden Linie liegen. Dieser Fall soll ausgeschlossen werden. Dann sind, wie in den Elementen der Theorie der analytischen Funktionen gezeigt wird, sämtliche Faktoren des Produktes

$$\begin{aligned} D(A_1, A_2, A_3) &= (A_1 + A_2 + A_3)(-A_1 + A_2 + A_3)(A_1 - A_2 + A_3)(A_1 + A_2 - A_3) \\ &= 2A_1^2 A_3^2 + 2A_2^2 A_1^2 + 2A_1^2 A_2^2 - A_1^4 - A_2^4 - A_3^4 \end{aligned}$$

positiv. Ich will der Kürze halber bei der Funktion D die Argumente A_1, A_2, A_3 und nur *diese*, fortlassen.

Es sei ferner M das Maximum von $m(z)$ im Gebiete T , das existieren muss, da nach dem Hilfssatze (II) $m(z)$ in T stetig ist, ebenso m das Minimum, das nach der gemachten Voraussetzung von 0 verschieden sein muss. Es sei ferner die beliebige kleine reelle positive Zahl ε vorgegeben, die der Bedingung genüge

$$(143) \quad \varepsilon < \frac{1}{3} M \sqrt{D}.$$

Man bestimme die positive ganze Zahl n so gross, dass

$$(144) \quad n > \frac{3 A_1^2 (M + m \sigma)}{\varepsilon},$$

wo σ den in (145) angegebenen Ausdruck bedeute. Ferner bestimme man gleichmässig

²⁾ Ähnlich liesse sich auch der Satz beweisen, dass eine stetige Funktion gleichmässig stetig ist. Andererseits lässt sich auch dieser Beweis hier in der bekannten Weise indirekt führen durch fortgesetzte Unterteilung des Gebietes, die auf einen Punkt führt, an dem ein Widerspruch stattfindet.

³⁾ G. MORERA, *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano), Ser. II, Bd. XIX (1886), S. 304-307]. Über die Verallgemeinerung siehe: W. F. OSGOOD, *Funktionentheorie*, 2. Aufl. 1912, S. 302.

für alle z , n so gross, dass für

$$\left. \begin{matrix} z_1 - z \\ z_2 - z \end{matrix} \right\} < \frac{A_1}{n},$$

$$(145) \quad \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right| < m \cdot \sigma \equiv m \left(\sqrt[4]{\frac{A_1^2 M + \frac{\sqrt{D}}{A_1^2} \cdot \varepsilon}{16 A_1^4 M^2 + 9 \varepsilon^2}} - 1 \right)$$

wird, woraus folgt

$$(146) \quad |f(z_2) - f(z_1)| < |z_2 - z_1| \cdot (m(z) + m \cdot \sigma) \leq |z_2 - z_1| \cdot (M + m \cdot \sigma).$$

Um zu zeigen, dass σ eine positive Grösse ist, setze man

$$(147) \quad (1 + \sigma)^2 = 1 + \bar{\sigma}.$$

Dann ist nach (143)

$$(148) \quad \bar{\sigma} = \frac{8 M \sqrt{D} \varepsilon + \frac{D}{A_1^4} \varepsilon^2 - 9 \varepsilon^2}{16 A_1^4 M^2 + 9 \varepsilon^2} > \frac{5 M \sqrt{D} \varepsilon + \frac{D}{A_1^4} \varepsilon^2}{16 A_1^4 M^2 + 9 \varepsilon^2} > 0,$$

also ist auch

$$(1 + \sigma)^2 > 1, \quad 1 + \sigma > 1, \quad \sigma > 0.$$

Man führe zur Abkürzung die Bezeichnung ein

$$\frac{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3}{n} = b_{\alpha\beta\gamma},$$

worin α, β, γ positive ganze Zahlen, die der Bedingung genügen

$$\alpha + \beta + \gamma = n;$$

ganz ebenso

$$\frac{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3}{2n} = c_{\alpha\beta\gamma},$$

worin

$$\alpha + \beta + \gamma = 2n.$$

Es ist

$$c_{2\alpha, 2\beta, 2\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma},$$

$$c_{2\alpha+1, 2\beta-1, 2\gamma} = \frac{b_{\alpha\beta\gamma} + b_{\alpha+1, \beta-1, \gamma}}{2}.$$

Ferner ist

$$(149) \quad \begin{cases} b_{\lambda, \mu, \nu+1} - b_{\lambda, \mu+1, \nu} = \frac{a_3 - a_2}{n}, \\ b_{\lambda+1, \mu, \nu} - b_{\lambda, \mu, \nu+1} = \frac{a_1 - a_3}{n}, \\ b_{\lambda, \mu+1, \nu} - b_{\lambda+1, \mu, \nu} = \frac{a_2 - a_1}{n}, \end{cases}$$

und entsprechend für die $c_{\alpha\beta\gamma}$. Unter Benutzung von (149), (146), (142), (144) erhält

man

$$\begin{aligned}
 (150) \quad & \left| I_1 + I_2 + I_3 - \frac{a_1 - a_2}{n} \cdot \sum_{v=1}^n f(c_{0,2n-2v+1,2v-1}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a_1 - a_3}{n} \cdot \sum_{v=1}^n f(c_{2v-1,0,2n-2v+1}) - \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot \sum_{v=1}^n f(c_{2n-2v+1,2v-1,0}) \right| \\
 & \equiv |I_1 + I_2 + I_3 - S_1 - S_2 - S_3| \\
 & = \left| \sum_{v=1}^n \int_{b_{0,n-v+1,v-1}}^{b_{0,n-v,v}} (f(z) - f(c_{0,2n-2v+1,2v-1})) dz \right. \\
 & \quad + \sum_{v=1}^n \int_{b_{v-1,0,n-v+1}}^{b_{v,0,n-v}} (f(z) - f(c_{2v-1,0,2n-2v+1})) dz \\
 & \quad \left. + \sum_{v=1}^n \int_{b_{n-v+1,v-1,0}}^{b_{n-v,v,0}} (f(z) - f(c_{2n-2v+1,2v-1,0})) dz \right| \\
 & < 3n \cdot \frac{A_1}{n} \cdot \frac{A_1}{2n} (M + m \cdot \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Es gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 (151) \quad & \sum_I + \sum_{II} \equiv \sum_{\substack{\lambda=0, \mu=0, v=0 \\ \lambda+\mu+v=n-1}}^{n-1} \{ (b_{\lambda,\mu,v+1} - b_{\lambda,\mu+1,v}) \cdot f(c_{2\lambda,2\mu+1,2v+1}) \\
 & + (b_{\lambda+1,\mu,v} - b_{\lambda,\mu,v+1}) \cdot f(c_{2\lambda+1,2\mu,2v+1}) + (b_{\lambda,\mu+1,v} - b_{\lambda+1,\mu,v}) \cdot f(c_{2\lambda+1,2\mu+1,2v}) \} \\
 & + \sum_{\substack{\lambda=0, \mu=0, v=0 \\ \lambda+\mu+v=n-2}}^{n-2} \{ (b_{\lambda+1,\mu+1,v} - b_{\lambda+1,\mu,v+1}) \cdot f(c_{2\lambda+2,2\mu+1,2v+1}) \\
 & + (b_{\lambda,\mu+1,v+1} - b_{\lambda+1,\mu+1,v}) \cdot f(c_{2\lambda+1,2\mu+2,2v+1}) + (b_{\lambda+1,\mu,v+1} - b_{\lambda,\mu+1,v+1}) \cdot f(c_{2\lambda+1,2\mu+1,2v+2}) \} \\
 & = \sum_{\substack{\mu=0, v=0 \\ \mu+v=n-1}}^{n-1} (b_{0,\mu,v+1} - b_{0,\mu+1,v}) \cdot f(c_{0,2\mu-1,2v+1}) \\
 & + \sum_{\substack{\lambda=0, v=0 \\ \lambda+v=n-1}}^{n-1} (b_{\lambda+1,0,v} - b_{\lambda,0,v+1}) \cdot f(c_{2\lambda+1,0,2v+1}) \\
 & + \sum_{\substack{\lambda=0, \mu=0 \\ \lambda+\mu=n-1}}^{n-1} (b_{\lambda,\mu+1,0} - b_{\lambda+1,\mu,0}) \cdot f(c_{2\lambda+1,2\mu+1,0}) = S_1 + S_2 + S_3.
 \end{aligned}$$

Die erste Summe $\sum_I$ auf der linken Seite enthält $\frac{n(n+1)}{2}$, die zweite $\sum_{II}$ enthält $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder; zusammen sind es also n^2 Glieder von der Form

$$S(f(z); b_1, b_2, b_3) = (b_3 - b_2) \cdot f(c_1) + (b_1 - b_3) \cdot f(c_2) + (b_2 - b_1) \cdot f(c_3),$$

wo

$$c_1 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \quad c_2 = \frac{b_3 + b_1}{2}, \quad c_3 = \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Es ist ferner

$$\frac{A_1}{n} = |b_3 - b_2|, \quad \frac{A_2}{n} = |b_1 - b_3|, \quad \frac{A_3}{n} = |b_2 - b_1|,$$

$$(152) \quad c_3 - c_2 = -\frac{b_3 - b_2}{2}, \quad c_1 - c_3 = -\frac{b_1 - b_3}{2}, \quad c_2 - c_1 = -\frac{b_2 - b_1}{2}.$$

Man setze

$$(153) \quad \begin{cases} |f(c_3) - f(c_2)| = |c_3 - c_2| \cdot m(c_3) \cdot (1 + \eta_1), \\ |f(c_1) - f(c_3)| = |c_1 - c_3| \cdot m(c_3) \cdot (1 + \eta_2), \\ |f(c_2) - f(c_1)| = |c_2 - c_1| \cdot m(c_3) \cdot (1 + \eta_3), \end{cases}$$

dann ist nach (145)

$$(154) \quad \begin{cases} |\eta_1| \\ |\eta_2| \\ |\eta_3| \end{cases} < \frac{m \cdot \sigma}{m(c_3)} \leq \sigma.$$

Es ist

$$(155) \quad \begin{cases} S(f(\tau); b_1, b_2, b_3) = (b_1 - b_2)(f(c_1) - f(c_2)) + (b_2 - b_1)(f(c_3) - f(c_2)) \\ = (f(c_3) - f(c_2))(b_1 - b_2) \cdot \frac{|f(c_1) - f(c_2)|}{|f(c_3) - f(c_2)|} - \frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_2}. \end{cases}$$

Man setze

$$(156) \quad \begin{cases} |c_3 - c_2| = e_1, & |f(c_3) - f(c_2)| = E_1, \\ |c_1 - c_3| = e_2, & |f(c_1) - f(c_3)| = E_2, \\ |c_2 - c_1| = e_3, & |f(c_2) - f(c_1)| = E_3, \end{cases}$$

ferner

$$(157) \quad \frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_2} = \frac{c_1 - c_2}{c_3 - c_2} = x_2, \quad \frac{f(c_1) - f(c_2)}{f(c_3) - f(c_2)} = X_2.$$

Es gelten die Gleichungen

$$(158) \quad |x_2| = \frac{e_3}{e_1}, \quad |x_2 - 1| = \frac{|c_1 - c_3|}{|c_3 - c_2|} = \frac{e_2}{e_1};$$

es ist also

$$(159) \quad \begin{cases} \Re(x_2) = \frac{1}{2} \{x_2 \bar{x}_2 + 1 - (x_2 \bar{x}_2 - x_2 - \bar{x}_2 + 1)\} \\ = \frac{1}{2} (|x_2|^2 + 1 - |x_2 - 1|^2) = \frac{e_3^2 + e_1^2 - e_2^2}{2e_1^2} \equiv \frac{q_2}{2e_1^2}, \end{cases}$$

worin q_2 zur Abkürzung eingeführt ist. Hieraus ergibt sich

$$(160) \quad \begin{cases} \Im^2(x_2) = |x_2|^2 - \Re^2(x_2) = \frac{4e_1^2 e_3^2 - q_2^2}{4e_1^4} \\ = \frac{(e_1 + e_2 + e_3)(-e_1 + e_2 + e_3)(e_1 - e_2 + e_3)(e_1 + e_2 - e_3)}{4e_1^4} = \frac{D(e_1, e_2, e_3)}{4e_1^4}. \end{cases}$$

Ebenso erhält man

$$(161) \quad \begin{aligned} \Re(X_2) &= \frac{E_2^2 + E_1^2 - E_3^2}{2E_1^2} = \frac{Q_2}{2E_1^2}, \\ \Im^2(X_2) &= \frac{D(E_1, E_2, E_3)}{4E_1^4}. \end{aligned}$$

Benutzt man (152) und setzt man (156), (157), (159), (160) in (155) ein, so erhält

man

$$(162) \quad \left\{ \begin{aligned} |S(f(z); b_1, b_2, b_3)|^2 &= 4e_1^2 E_1^2 \{(\Re(X_2) - \Re(x_2))^2 + (\Im(X_2) - \Im(x_2))^2\} \\ &= 4e_1^2 E_1^2 \{ |X_2|^2 + |x_2|^2 - 2\Re(X_2) \cdot \Re(x_2) - 2\Im(X_2) \cdot \Im(x_2) \} \\ &= 4E_1^2 e_1^2 + 4E_1^2 e_2^2 - 2Q_2 q_2 - 2\sqrt{D(E_1, E_2, E_3)} \cdot \sqrt{D(e_1, e_2, e_3)} \\ &= 2(E_1^2 e_1^2 + E_1^2 e_2^2 + E_1^2 e_3^2 + E_2^2 e_1^2 + E_2^2 e_2^2 + E_2^2 e_3^2 - E_1^2 e_1^2 - E_2^2 e_2^2 - E_3^2 e_3^2) \\ &\quad - 2\sqrt{D(E_1, E_2, E_3)} \cdot D(e_1, e_2, e_3) \\ &\equiv 2\Delta(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) - 2\sqrt{D(E_1, E_2, E_3)} \cdot D(e_1, e_2, e_3) \end{aligned} \right.$$

wo $\Delta(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3)$ zur Abkürzung eingeführt ist. Betrachtet man anstatt $f(z)$ die konjugierte Funktion $\bar{f}(z)$, so ändert sich nur das Vorzeichen von $\Im(X_2)$. Es sei also unter den beiden konjugierten Funktionen $f(z)$ und $\bar{f}(z)$ diejenige ausgewählt, für welche die Vorzeichen von $\Im(X_2)$ und $\Im(x_2)$ übereinstimmen. Dass dieser Bedingung gleichzeitig für alle n^2 Dreiecke b_1, b_2, b_3 genügt werden kann, soll weiter unten gezeigt werden. Es ist also die Quadratwurzel im letzten Ausdrucke von (162) eine positive Grösse. Es ergibt sich weiter

$$(163) \quad \left\{ \begin{aligned} &|S(f(z); b_1, b_2, b_3)|^2 \\ &= 2 \frac{\Delta^2(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) - D(E_1, E_2, E_3) \cdot D(e_1, e_2, e_3)}{\Delta(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) + \sqrt{D(E_1, E_2, E_3)} \cdot D(e_1, e_2, e_3)} \end{aligned} \right.$$

Es wird nach (160) und (162)

$$\begin{aligned} &\Delta^2(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) - D(E_1, E_2, E_3) \cdot D(e_1, e_2, e_3) \\ &= 4(E_1^2 e_1^2 + E_1^2 e_2^2)^2 - 4(E_1^2 e_1^2 + E_1^2 e_2^2) Q_2 q_2 + Q_2^2 q_2^2 \\ &\quad - 16 E_1^2 E_3^2 e_1^2 e_2^2 + 4 E_1^2 E_3^2 q_2^2 + 4 e_1^2 e_2^2 Q_2^2 - Q_2^2 q_2^2 \\ &= 4(Q_2 e_1^2 - q_2 E_1^2)(Q_2 e_2^2 - q_2 E_1^2) + 4(E_1^2 e_1^2 - E_1^2 e_2^2)^2. \end{aligned}$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$(1 + \eta_1)^2 = 1 + \bar{\eta}_1, \quad (1 + \eta_2)^2 = 1 + \bar{\eta}_2, \quad (1 + \eta_3)^2 = 1 + \bar{\eta}_3,$$

woraus in Verbindung mit (147) und (154) folgt,

$$(164) \quad \left\{ \begin{aligned} &|\bar{\eta}_1| \\ &|\bar{\eta}_2| \\ &|\bar{\eta}_3| \end{aligned} \right\} < \bar{\sigma}$$

und setzt man

$$(165) \quad \left\{ \begin{aligned} R_2 &\equiv E_3^2 e_1^2 - E_1^2 e_3^2 = m^2(c_1) \cdot e_1^2 e_3^2 (\bar{\eta}_3 - \bar{\eta}_1) \equiv m^2(c_1) \cdot e_1^2 e_3^2 \bar{\xi}_2, \\ R_3 &\equiv E_1^2 e_2^2 - E_2^2 e_1^2 = m^2(c_1) \cdot e_2^2 e_1^2 (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) \equiv m^2(c_1) \cdot e_2^2 e_1^2 \bar{\xi}_3, \\ R_1 &\equiv E_2^2 e_3^2 - E_3^2 e_2^2 = m^2(c_1) \cdot e_2^2 e_3^2 (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_3) \equiv m^2(c_1) \cdot e_2^2 e_3^2 \bar{\xi}_1, \end{aligned} \right.$$

so ergibt sich

$$(166) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) - D(E_1, E_2, E_3) \cdot D(e_1, e_2, e_3) \\ &= 4(R_2 + R_3)(-R_2 - R_1) + 4R_1^2 \\ &= -4(R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_1 R_2) = -4e_1^2 e_2^2 e_3^2 \cdot m^4(c_1) \cdot (e_1^2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 + e_2^2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_1 + e_3^2 \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2). \end{aligned} \right.$$

Es ist nach (165)

$$(167) \quad \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3 = 0.$$

Es mögen $\bar{\xi}_x$ und $\bar{\xi}_y$ gleiches Vorzeichen besitzen, dann ist

$$\bar{\xi}_y = -\bar{\xi}_x - \bar{\xi}_\beta,$$

also unter Benutzung von (164)

$$(168) \quad \begin{cases} -(e_1^2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 + e_2^2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_1 + e_3^2 \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2) \\ = e_x^2 (\bar{\xi}_\beta \bar{\xi}_x + \bar{\xi}_\mu^2) + e_y^2 (\bar{\xi}_x \bar{\xi}_y + \bar{\xi}_\alpha^2) - e_y^2 \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\mu \\ < e_x^2 (\bar{\xi}_\mu \bar{\xi}_x + \bar{\xi}_\mu^2) + e_y^2 (\bar{\xi}_x \bar{\xi}_y + \bar{\xi}_x^2) - (e_x - e_y)^2 \bar{\xi}_x \bar{\xi}_\mu \\ = (e_x \bar{\xi}_\mu + e_y \bar{\xi}_x)^2 \leq e_1^2 (\bar{\xi}_x + \bar{\xi}_\mu)^2 = e_1^2 \bar{\xi}_y^2 < 4e_1^2 \bar{\sigma}^2. \end{cases}$$

Ferner definiere man entsprechend (159)

$$q_1 = e_2^2 + e_3^2 - e_1^2, \quad q_3 = e_1^2 + e_2^2 - e_3^2;$$

dann erhält man

$$(169) \quad \begin{cases} \Delta(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) \\ = m^2(c_3) \{ D(e_1, e_2, e_3) + \bar{n}_1 e_1^2 q_1 + \bar{n}_2 e_2^2 q_2 + \bar{n}_3 e_3^2 q_3 \} \\ > m^2(c_3) \{ D(e_1, e_2, e_3) - \bar{\sigma} (e_1^2 |q_1| + e_2^2 |q_2| + e_3^2 |q_3|) \}. \end{cases}$$

q_2 und q_3 sind immer positiv; in Bezug auf das Vorzeichen von q_1 unterscheide man zwei Fälle:

Fall (a): Es sei $q_1 \geq 0$, (das Dreieck $a_1 a_2 a_3$ sei spitzwinklig oder rechtwinklig). Dann ist also

$$(170) \quad D(e_1, e_2, e_3) = e_1^2 q_1 + e_2^2 q_2 + e_3^2 q_3 \leq e_1^2 (q_1 + q_2 + q_3) \leq 3e_1^4.$$

Fall (b): Es sei $q_1 < 0$, (das Dreieck $a_1 a_2 a_3$ sei also stumpfwinklig). Dann ist

$$(171) \quad \begin{cases} D(e_1, e_2, e_3) < e_1^2 |q_1| + e_2^2 |q_2| + e_3^2 |q_3| \\ = e_1^2 (e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + e_2^2 (e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) + e_3^2 (e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) = e_1^4 - (e_2^2 - e_3^2)^2 < 3e_1^4. \end{cases}$$

In beiden Fällen erhält man also aus (169)

$$(172) \quad \Delta(E_1, E_2, E_3; e_1, e_2, e_3) > m^2(c_3) \{ D(e_1, e_2, e_3) - 3\bar{\sigma} e_1^4 \}.$$

Unter Benutzung derselben Abschätzung erhält man

$$(173) \quad \begin{cases} D(E_1, E_2, E_3) = m^4(c_3) \{ D(e_1, e_2, e_3) + 2(\bar{n}_1 e_1^2 q_1 + \bar{n}_2 e_2^2 q_2 + \bar{n}_3 e_3^2 q_3) \\ + 2\bar{n}_1 e_1^2 \bar{n}_2 e_2^2 + 2\bar{n}_2 e_2^2 \bar{n}_3 e_3^2 + 2\bar{n}_3 e_3^2 \bar{n}_1 e_1^2 - \bar{n}_1^2 e_1^4 - \bar{n}_2^2 e_2^4 - \bar{n}_3^2 e_3^4 \} \\ > m^4(c_3) \{ D(e_1, e_2, e_3) - 6\bar{\sigma} e_1^4 - 9\bar{\sigma}^2 e_1^4 \}. \end{cases}$$

Setzt man (168) in (166) und dies gleichzeitig mit (172) und (173) in (163) ein, so

erhält man

$$\begin{aligned}
 & |S(f(\zeta); b_1, b_2, b_3)|^2 \\
 & < \frac{64e^2e_2^2e_3^2e_1^2\bar{\sigma}^2.m^4(e_3)}{m^2(c_3)\{2D(e_1, e_2, e_3) - 6\bar{\sigma}e_1^4 + 2\sqrt{D(e_1, e_2, e_3)}(D(e_1, e_2, e_3) - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)e_1^4)\}} \\
 & < \frac{64M^2.e_2^2e_3^2.e_1^2\bar{\sigma}^2}{2D(e_1, e_2, e_3) - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)e_1^4 + 2\sqrt{D(e_1, e_2, e_3)}(D(e_1, e_2, e_3) - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)e_1^4)}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$(174) \quad \left\{ \begin{aligned} |S(f(\zeta); b_1, b_2, b_3)| & < \frac{8 M e_1 e_2 e_3 \cdot e_1 \bar{\sigma}}{\sqrt{D(e_1, e_2, e_3)} + \sqrt{D(e_1, e_2, e_3) - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)e_1^4}} \\ & \leq \frac{2 M \cdot A_1^4 \bar{\sigma}}{n^2(\sqrt{D} + \sqrt{D - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)A_1^4})} = \frac{2 M (\sqrt{D} - \sqrt{D - (6\bar{\sigma} + 9\bar{\sigma}^2)A_1^4})}{n^2(6 + 9\bar{\sigma})}. \end{aligned} \right.$$

Nun folgt aber aus (148) in Verbindung mit (170), (171) und (143)

$$(175) \quad \bar{\sigma} < \frac{8 M \sqrt{D} \varepsilon - 6 \varepsilon^2}{16 A_1^4 M^2 + 9 \varepsilon^2} < \frac{M \sqrt{D} \varepsilon}{2 A_1^4 M^2} < \frac{M^4 D}{6 M^2 A_1^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Aus dem ersten Teile dieser Ungleichheitsbeziehung erhält man

$$(6 + 9\bar{\sigma})\varepsilon^2 - 8 M \sqrt{D} \varepsilon < -16 A_1^4 M^2 \bar{\sigma}$$

oder

$$(4 M \sqrt{D} - (6 + 9\bar{\sigma})\varepsilon)^2 < 16 M^2 (D - \bar{\sigma}(6 + 9\bar{\sigma}) A_1^4)$$

oder mit Benutzung des letzten Teiles von (175) und von (143)

$$(176) \quad \left\{ \begin{aligned} 4 M \sqrt{D} - \bar{\sigma}(6 + 9\bar{\sigma}) A_1^4 & > 4 M \sqrt{D} - (6 + 9\bar{\sigma})\varepsilon \\ & > 4 M \sqrt{D} - \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{3} M \sqrt{D} = \frac{1}{2} M \sqrt{D} > 0. \end{aligned} \right.$$

Die Quadratwurzel in (176) ist also reell. Setzt man den ersten Teil von (176) in (174) ein, so erhält man

$$(177) \quad |S(f(\zeta); b_1, b_2, b_3)| < \frac{\varepsilon}{2 n^2}.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass das Vorzeichen von $\Im(X)$ für alle n^2 in Betracht kommenden Dreiecke $b_1 b_2 b_3$ bzw. $c_1 c_2 c_3$ dasselbe ist. Es sind sämtliche Wertetripel $c_1 c_2 c_3$ in Σ_I und Σ_{II} von der Form

$$\zeta + \frac{\rho a_1}{2 n}, \quad \zeta + \frac{\rho a_2}{2 n}, \quad \zeta + \frac{\rho a_3}{2 n},$$

wo ζ gewisse Werte im Dreieck $a_1 a_2 a_3$ annimmt und $\rho = \pm 1$. Man lasse für ζ alle Werte in T , für ρ alle Werte vom absoluten Betrage 1 zu, dann ist X eine stetige Funktion von ζ und ρ , denn der Nenner von X ist absolut genommen nach (153),

(154) und der Endabschätzung von (175)

$$\begin{aligned} \left| f\left(\zeta + \frac{\rho a_1}{2n}\right) - f\left(\zeta + \frac{\rho a_2}{2n}\right) \right| &= \left| \frac{\rho(a_1 - a_2)}{2n} \right| \cdot m(\zeta) \cdot (1 + \eta) \\ &\geq \frac{A_1}{2n} \cdot m \cdot (1 - \sigma) = \frac{A_1}{2n} \cdot m(2 - \sqrt{1 + \sigma}) \\ &> \frac{A_1}{2n} \cdot m \cdot \left(2 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) > \frac{3 A_1 m}{8n} > 0. \end{aligned}$$

Ferner ist nach (161), (173) und den Endabschätzungen von (176) und (175)

$$\begin{aligned} \Im^2(X) &= \frac{D(E_1, E_2, E_3)}{4 E_1^4} > \frac{D - (6\sigma + 9\sigma^2) A_1^4}{4 A_1^4 (1 + \sigma)^4} \\ &> \frac{D}{8^2 \cdot 4 A_1^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{D}{576 A_1^4} > 0, \end{aligned}$$

also kann $\Im(X)$ nirgends 0 werden, also auch nicht das Vorzeichen wechseln, also hat $\Im(X)$ in allen Dreiecken c_1, c_2, c_3 ein ganz bestimmtes Vorzeichen für $f(\zeta)$ und das entgegengesetzte für $\bar{f}(\zeta)$. Wählt man diejenige der beiden Funktionen $f(\zeta)$ und $\bar{f}(\zeta)$, für die $\Im(X)$ und $\Im(X)$ gleiches Vorzeichen besitzen, so ist für diese Funktion (162) erfüllt, also alle folgenden Ungleichheitsbeziehungen, insbesondere (177). Jetzt folgt aber aus (151)

$$(178) \quad |S_1 + S_2 + S_3| = |\Sigma_I + \Sigma_{II}| \leq n^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2n^2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also ist nach (150) und (178)

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1 + I_2 + I_3 - S_1 - S_2 - S_3| + |S_1 + S_2 + S_3| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da aber die linke Seite dieser Gleichung als absoluter Betrag eines bestimmten Integrals eine feste Zahl ist, so muss

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

sein. Das Integral über den Umfang eines beliebigen Dreiecks ist 0; hieraus folgt aber, wie zu Anfang dieses Teiles der Arbeit erörtert, dass $f(\zeta)$ bzw. $\bar{f}(\zeta)$ eine reguläre analytische Funktion sein muss.

Besitzt $m(\zeta)$ eine isolierte Nullstelle, so ist $f(\zeta)$ bzw. $\bar{f}(\zeta)$ in einer endlichen Umgebung dieser Stelle regulär und an der Stelle selber stetig, also auch an dieser Stelle regulär nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie.

Die Voraussetzung dieses Satzes lässt sich etwas anders fassen.

HILFSSATZ III. — *Besitzt eine eindeutige Funktion $f(\zeta)$ einer komplexen Variablen ζ in einem einfach zusammenhängenden, abgeschlossenen Gebiete T gleichmässig den gewöhnlichen absoluten Differentialquotienten, so ist dieser eine stetige Funktion von ζ , und $f(\zeta)$ besitzt in T gleichmässig den erweiterten absoluten Differentialquotienten.*

Nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε lässt sich nach der Voraussetzung für alle Werte ζ in T gleichzeitig eine hinreichend kleine reelle po

sitive Grösse $\delta(\varepsilon)$ so bestimmen, dass, wenn

$$|b| < \delta(\varepsilon)$$

ist,

$$\left| \left| \frac{f(z+b) - f(z)}{b} \right| - m(z) \right| < \varepsilon$$

wird. Es soll zunächst gezeigt werden, dass $m(z)$ eine stetige Funktion von z ist. Man bestimme einen festen Wert h , der der Bedingung genüge

$$|b| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Es wird

$$\begin{aligned} |m(z_1) - m(z)| &= \left| \left(m(z_1) - \left| \frac{f(z_1+b) - f(z_1)}{b} \right| \right) \right. \\ &\quad + \left(\left| \frac{f(z_1+b) - f(z_1)}{b} \right| - \left| \frac{f(z+b) - f(z)}{b} \right| \right) \\ &\quad \left. + \left(\left| \frac{f(z+b) - f(z)}{b} \right| - m(z) \right) \right| \\ &\leq \left| \left| \frac{f(z_1+b) - f(z_1)}{b} \right| - m(z) \right| + \left| \frac{|f(z_1+b) - f(z_1)| - |f(z+b) - f(z)|}{b} \right| \\ &\quad + \left| \left| \frac{f(z+b) - f(z)}{b} \right| - m(z) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{(f(z_1+b) - f(z_1)) - (f(z+b) - f(z))}{b} \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \frac{(f(z_1+b) - f(z+b)) - (f(z_1) - f(z))}{b} \right| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{|f(z_1+b) - f(z+b)| + |f(z_1) - f(z)|}{|b|}. \end{aligned}$$

Wegen der Existenz des absoluten Differentialquotienten ist $f(z)$ überall in T stetig, also nach einem bekannten Satze gleichmässig stetig. Nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε ist also $\delta'(\varepsilon)$ reell und positiv so bestimmbar, dass, wenn ein Wertepaar z_1, z der Bedingung

$$|z_1 - z| < \delta'(\varepsilon)$$

genügt,

$$|f(z_1) - f(z)| < \varepsilon$$

wird. Man bestimme

$$|z_1 - z| < \delta'\left(\frac{|b|\varepsilon}{6}\right),$$

dann wird

$$|m(z_1) - m(z)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von $m(z)$ nachgewiesen.

Um die Existenz des erweiterten absoluten Differentialquotienten nachzuweisen,

bestimme man $\delta''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ so klein, dass für alle z_1 , für die

$$(179) \quad |z_1 - z| < \delta''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ist,

$$(180) \quad |m(z_1) - m(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Ausserdem bestimme man

$$(181) \quad \delta''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Wenn dann auch

$$|z_2 - z| < \delta''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

so ist

$$|z_2 - z_1| \leq |z_2 - z| + |z_1 - z| < 2\delta''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

also wird

$$(182) \quad \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z_1) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man erhält unter Benutzung von (180) und (182)

$$\begin{aligned} \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z) \right| &= \left| \left(\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z_1) \right) + (m(z_1) - m(z)) \right| \\ &\leq \left| \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| - m(z_1) \right| + |m(z_1) - m(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also existiert an jedem Punkte z der erweiterte absolute Differentialquotient und zwar gleichmässig, weil (179) und (181) gleichmässig für alle z in T erfüllbar sind. Die Voraussetzungen des Satzes (II) sind also gegeben.

Der Satz (II) lässt sich folgendermassen formulieren: *Besitzt eine eindeutige Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen z in einem abgeschlossenen, einfach zusammenhängenden Gebiete GLEICHMÄSSIG den gewöhnlichen absoluten Differentialquotienten, so ist entweder $f(z)$ oder ihre konjugierte $\bar{f}(z)$ eine analytische Funktion.*

Den analogen Satz für den erweiterten Signum-Differentialquotienten kann ich nur unter einschränkenden Voraussetzungen beweisen, die gewisse Anforderungen stellen an die Schnelligkeit der Annäherung des Signums des erweiterten Differenzenquotienten an den Signum-Differentialquotienten.

SATZ III. — Es sei die reelle positive Konstante $k_0 > 1$ definiert als die Lösung der transzendenten Gleichung

$$\log k + \frac{1}{k^2} = 1.$$

ferner K_0 durch die Gleichung

$$K_0 = \frac{2\sqrt{k_0^2 - 1}}{\log k_0} = \frac{2k_0^2}{\sqrt{k_0^2 - 1}}.$$

Die eindeutige Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z genüge in dem einfach zusammen-

menhängenden, abgeschlossenen Gebiete T folgender Bedingung. Für jeden einzelnen Wert von z in T existiere für alle reellen positiven

$$\delta < \delta_0(z)$$

wo $\delta_0(z)$ eine nur von z abhängige Konstante, eine reelle positive Funktion von $\log \delta^{-1}$

$$(183) \quad \tau(z, \log \delta^{-1}) < \frac{1}{K_0},$$

die mit wachsendem $\log \delta^{-1}$, (d. h. mit abnehmendem δ) nie zunimmt, und der Bedingung genügt,

$$(184) \quad \int_{\log \delta_0^{-1}}^{\infty} \frac{\tau(z, \log \delta^{-1})}{\log \delta^{-1}} d(\log \delta^{-1}) = \infty,$$

derart, dass, wenn

$$|z_1 - z| \quad \text{und} \quad |z_2 - z| < \delta$$

stets

$$(185) \quad \left| \operatorname{sgn} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - s(z) \right| < \frac{\frac{1}{K_0} - \tau(z, \log \delta^{-1})}{\log \delta^{-1}}$$

ist, wo $|s(z)| = 1$. Dann ist $f(z)$ eine reguläre analytische Funktion von z , deren Ableitung in T von 0 verschieden ist.

Es soll wieder bewiesen werden, dass das Integral über $f(z)$, erstreckt über den Umfang eines beliebigen Dreiecks, gleich 0 ist, woraus dasselbe für das Integral über einen beliebigen geschlossenen, aus geraden Stücken bestehenden Weg folgt. Hieraus folgt wieder nach dem verallgemeinerten MORERA'schen Satze, dass $f(z)$ eine in T reguläre analytische Funktion sein muss. Um aber den MORERA'schen Satz anwenden zu können, muss bewiesen werden, dass $f(z)$ eine stetige Funktion ist.

HILFSSATZ IV. — *Besitzt eine Funktion $f(z)$ an einer Stelle $z = z_0$ einen erweiterten Signum-Differentialquotienten, so ist sie an dieser Stelle stetig.*

Nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse δ bezeichne $\eta(\delta)$ die obere Grenze aller Werte, die

$$(186) \quad \left| \operatorname{sgn} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - s(z_0) \right|$$

annimmt, wenn z_1 und z_2 alle Wertepaare ungleicher Zahlen durchlaufen, die der Bedingung

$$|z_1 - z_0| \leq \delta, \quad |z_2 - z_0| \leq \delta$$

genügen. Dann bedeutet die Existenz des erweiterten Signum-Differentialquotienten

$$\lim_{\delta=0} \eta(\delta) = 0.$$

Man setze

$$e_0 = |z_1 - z_2|, \quad e_1 = |z_2 - z_0|, \quad e_2 = |z_0 - z_1|,$$

$$E_0 = |f(z_1) - f(z_2)|, \quad E_1 = |f(z_2) - f(z_0)|, \quad E_2 = |f(z_0) - f(z_1)|,$$

ferner

$$(187) \quad x_0 = \frac{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0}, \quad x_1 = \frac{\tilde{z}_0 - \tilde{z}_1}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1}, \quad x_2 = \frac{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2}{\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2},$$

$$(188) \quad X_0 = \frac{f(\tilde{z}_2) - f(\tilde{z}_0)}{f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_0)}, \quad X_1 = \frac{f(\tilde{z}_0) - f(\tilde{z}_1)}{f(\tilde{z}_2) - f(\tilde{z}_1)}, \quad X_2 = \frac{f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_2)}{f(\tilde{z}_0) - f(\tilde{z}_2)},$$

$$\text{Es ist} \quad q_0 = e_1^2 + e_2^2 - e_0^2, \quad q_1 = e_2^2 + e_0^2 - e_1^2, \quad q_2 = e_0^2 + e_1^2 - e_2^2.$$

$$x_1 = \frac{1}{1 - x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{1 - x_1}, \quad x_0 = \frac{1}{1 - x_2},$$

also haben die Imaginärteile von x_0, x_1, x_2 das gleiche Vorzeichen ω . Es ist also nach (159) und (160)

$$x_0 = \frac{q_0 + \omega i \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)}}{2e_2^2},$$

ferner nach (158)

$$(189) \quad |x_0| = \frac{e_1}{e_2},$$

Also wird

$$(190) \quad \operatorname{sgn} x_0 = \frac{q_0 + \omega i \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)}}{2e_1e_2},$$

ebenso

$$(191) \quad \operatorname{sgn} x_1 = \frac{q_1 + \omega i \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)}}{2e_2e_0},$$

$$(192) \quad \operatorname{sgn} x_2 = \frac{q_2 + \omega i \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)}}{2e_0e_1}.$$

Es ist also

$$(193) \quad e_0 : e_1 : e_2 = \Im(\operatorname{sgn} x_0) : \Im(\operatorname{sgn} x_1) : \Im(\operatorname{sgn} x_2).$$

Es werde gesetzt

$$(194) \quad \begin{cases} \operatorname{sgn}(f(\tilde{z}_2) - f(\tilde{z}_1)) = s(\tilde{z}_0) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) \cdot (1 + x_0), \\ \operatorname{sgn}(f(\tilde{z}_0) - f(\tilde{z}_2)) = s(\tilde{z}_0) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2) \cdot (1 + x_1), \\ \operatorname{sgn}(f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_0)) = s(\tilde{z}_0) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0) \cdot (1 + x_2). \end{cases}$$

Hierin ist nach (186)

$$|s(\tilde{z}_0) \cdot x_0| = |x_0| \leq \eta(\delta),$$

ebenso

$$|x_1| \leq \eta(\delta), \quad |x_2| \leq \eta(\delta).$$

Ferner ist

$$|1 + x_0| = 1$$

oder

$$1 + x_0 + \bar{x}_0 + x_0 \bar{x}_0 = 1$$

oder

$$\Re(x_0) = -\frac{|x_0|^2}{2},$$

also

$$\Im(x_0) = \pm \sqrt{|x_0|^2 - \frac{|x_0|^4}{4}} = \pm |x_0| \cdot \sqrt{1 - \frac{|x_0|^2}{4}},$$

ebenso für z_1 und x_2 . Setzt man (194) in (188) ein, so erhält man

$$(195) \quad \operatorname{sgn} X_0 = \operatorname{sgn} x_0 \cdot \frac{1 + x_1}{1 + x_2} = \operatorname{sgn} x_0 \cdot (1 + x_1)(1 + \bar{x}_2) \equiv \operatorname{sgn} x_0 \cdot (1 + \lambda_0),$$

ebenso

$$(196) \quad \operatorname{sgn} X_1 \equiv \operatorname{sgn} x_1 \cdot (1 + \lambda_1),$$

$$(197) \quad \operatorname{sgn} X_2 \equiv \operatorname{sgn} x_2 \cdot (1 + \lambda_2),$$

hierin sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zur Abkürzung eingeführt. Es ist

$$|\lambda_0| = |x_1 + (1 + x_1)\bar{x}_2| \leq |x_1| + |(1 + x_1)\bar{x}_2| = |x_1| + |x_2| \leq 2\eta(\delta),$$

ebenso

$$|\lambda_1| \leq 2\eta(\delta),$$

$$|\lambda_2| \leq 2\eta(\delta).$$

Aus den zu (189) und (193) analogen Gleichungen, die sich auf die X_0, E_0 usw. beziehen, unter Benutzung von (195), (196), (197), (191), (192) und schliesslich der (159) analogen Gleichung für $\Re(x_0)$ erhält man

$$(198) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} = X_0 = \operatorname{sgn} X_0 \cdot \frac{E_1}{E_2} = \operatorname{sgn} X_0 \cdot \frac{\Im(\operatorname{sgn} X_1)}{\Im(\operatorname{sgn} X_2)} \\ & = \operatorname{sgn} x_0 \cdot (1 + \lambda_0) \cdot \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{\omega \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)} (1 + \Re(\lambda_1)) + q_1 \cdot \Im(\lambda_1)}{\omega \sqrt{D(e_1, e_2, e_0)} (1 + \Re(\lambda_2)) + q_2 \cdot \Im(\lambda_2)} \\ & = (x_0) \cdot (1 + \lambda_0) \cdot \frac{\Im(x_0) \cdot (1 + \Re(\lambda_1)) + (1 - \Re(x_0)) \cdot \Im(\lambda_1)}{\Im(x_0) \cdot (1 + \Re(\lambda_2)) + (|x_0|^2 - \Re(x_0)) \cdot \Im(\lambda_2)}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$(199) \quad X_0 = x_0 + \xi_0,$$

so ist

$$(200) \quad \left\{ \begin{aligned} & |\xi_0| = |X_0 - x_0| \leq |X_0 - x_0(1 + \lambda_0)| + |x_0 \lambda_0| \\ & = \left| x_0 \cdot \frac{\Im(x_0) \cdot (\Re(\lambda_1) - \Re(\lambda_2)) + (1 - \Re(x_0)) \cdot \Im(\lambda_1) - (|x_0|^2 - \Re(x_0)) \cdot \Im(\lambda_2)}{\Im(x_0) (1 + \Re(\lambda_2)) + (|x_0|^2 - \Re(x_0)) \cdot \Im(\lambda_2)} \right| + |x_0 \lambda_0| \\ & \leq \frac{|x_0| \cdot 2\eta^2(\delta) + \frac{|x_0| + |x_0|^3 + 2|x_0| \cdot |\Re(x_0)|}{|\Im(x_0)|} \cdot 2\eta(\delta)}{1 - 2\eta^2(\delta) - \frac{|x_0|^2 + |\Re(x_0)|}{|\Im(x_0)|} \cdot 2\eta(\delta)} + 2|x_0| \cdot \eta(\delta). \end{aligned} \right.$$

Man denke sich $\eta(\delta)$ hierin so klein bestimmt, dass der Nenner nicht verschwindet und

$$(201) \quad \eta(\delta) < \frac{1}{100}.$$

Man betrachte diejenigen x_0 , die der Bedingung genügen

$$(202) \quad |x_0| \leq 1,$$

und unterscheide zwei Fälle.

Fall (a): Es sei

$$(203) \quad |\Re(x_0)| \leq |\Im(x_0)|.$$

Es wird nach (200)

$$(204) \quad \left\{ \begin{aligned} |\xi_0| &\leq \eta(\delta) \cdot \left(\frac{2\eta(\delta) + 4 + 4\sqrt{2}}{1 - 2\eta^2(\delta) - (2 + 2\sqrt{2})\eta(\delta)} + 2 \right) \\ &< \eta(\delta) \cdot \left(\frac{2\eta(\delta) + 10}{1 - 2\eta^2(\delta) - 5\eta(\delta)} + 2 \right) \\ &< \eta(\delta) \cdot \left(\frac{100 \cdot 200}{94 \cdot 98} + 2 \right) < 13\eta(\delta). \end{aligned} \right.$$

Fall (b): Es sei

$$(205) \quad |\Re(x_0)| \geq |\Im(x_0)|.$$

Man setze

$$x_0 = ix'_0, \quad i = x'_0,$$

ferner sei z' definiert durch die Gleichung

$$\frac{z' - z_0}{z_1 - z_0} = i.$$

Man setze ferner

$$\frac{f(z') - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} = X'_0,$$

$$\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z') - f(z_0)} = X''_0.$$

Ferner sei

$$X'_0 = x'_0 + \xi'_0 = i + \xi'_0,$$

$$X''_0 = x''_0 + \xi''_0.$$

Es ergibt sich

$$X_0 = X'_0 \cdot X''_0 = (i + \xi'_0)(x''_0 + \xi''_0) = ix''_0 + i\xi''_0 + x'_0\xi'_0 + \xi'_0\xi''_0 = x_0 + \xi_0,$$

also wird

$$(206) \quad |\xi_0| \leq |\xi'_0| + |\xi''_0| + |\xi'_0| \cdot |\xi''_0|.$$

Es genügt nach (200) ξ'_0 der Bedingung

$$|\xi'_0| \leq \eta(\delta) \cdot \left(\frac{2\eta(\delta) + 4}{1 - 2\eta^2(\delta) - 2\eta(\delta)} + 2 \right) < \eta(\delta) \left(\frac{40200}{9798} + 2 \right) < 7\eta(\delta).$$

Da x_0 der Bedingung (205) genügt, so genügt x''_0 der Bedingung (203), also ξ''_0 der Bedingung (204). Also wird nach (206)

$$(207) \quad |\xi_0| < \eta(\delta) \cdot (7 + 13 + 7 \cdot 13 \cdot \eta(\delta)) < 21\eta(\delta).$$

(207) gilt also für alle ξ_0 , deren x_0 (202) genügt.

Es sei x_0 von nun an ein fester nicht reeller Wert, dessen absoluter Betrag kleiner sei als 1. Für die Zwecke des zu beweisenden Hilfssatzes könnte man x_0 im übrigen willkürlich wählen. Ich will aber gleich denjenigen Wert von x_0 ermitteln, der für $|X_0|$ die günstigste Abschätzung liefert, da ich diesen zum Beweise des Hauptsatzes (III)

brauche. Aus (198) folgt

$$(208) \quad |X_0| \leq |x_0| \cdot \left(1 + \frac{2\eta^2(\delta) + \frac{1 - \Re(x_0) + ||x_0|^2 - \Re(x_0)||}{|\Im(x_0)|} \cdot 2\eta(\delta)}{1 - 2\eta^2\delta - \frac{||x_0|^2 - \Re(x_0)||}{|\Im(x_0)|} \cdot 2\eta(\delta)} \right).$$

Denkt man sich die Klammer nach Potenzen von $\eta(\delta)$ entwickelt, so lautet der Koeffizient der ersten Potenz von $2\eta(\delta)$ in der Klammer

$$\frac{1 - \Re(x_0) + ||x_0|^2 - \Re(x_0)||}{|\Im(x_0)|} = C.$$

Man halte zunächst $|x_0|$ fest und verfüge über $\operatorname{sgn} x_0$ so, dass dieser Koeffizient möglichst klein werde. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall (a): Es sei

$$\Re(x_0) \geq |x_0|^2.$$

Dann ist

$$C = \frac{1 - |x_0|^2}{|\Im(x_0)|} = \frac{1 - |x_0|^2}{1' |x_0|^2 - \Re^2(x_0)} \geq \frac{1 - |x_0|^2}{1' |x_0|^2 - |x_0|^4} = \sqrt{\frac{1}{|x_0|^2} - 1}.$$

Fall (b): Es sei

$$(209) \quad \Re(x_0) \leq |x_0|^2.$$

Dann ist

$$(210) \quad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1 - 2\Re(x_0) + |x_0|^2}{|\Im(x_0)|} = \frac{|1 - x_0|^2}{|\Im(x_0)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4|x_0|^2 - (1 + |x_0|^2 - |1 - x_0|^2)^2}{4|1 - x_0|^4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + |x_0|^2}{|1 - x_0|^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(1 - |x_0|^2)^2}{|1 - x_0|^4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{|x_0|^2}{(1 - |x_0|^2)^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 + |x_0|^2}{1 - |x_0|^2} - \frac{1 - |x_0|^2}{1 - |x_0|^2} \right)^2}}. \end{aligned} \right.$$

Da nach (209)

$$|1 - x_0|^2 = 1 - 2\Re(x_0) + |x_0|^2 \geq 1 - |x_0|^2,$$

so folgt aus (210)

$$C \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{|x_0|^2 - |x_0|^4}{(1 - |x_0|^2)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{|x_0|^2} - 1}.$$

Im Falle (a) wie im Falle (b) wird das Minimum von C erreicht für

$$\Re(x_0) = |x_0|^2$$

also

$$x_0 = |x_0|(|x_0| + i\sqrt{1 - |x_0|^2}),$$

(211)

$$C = \sqrt{\frac{1}{|x_0|^2} - 1}$$

(208) lautet in diesem speziellen Falle

$$(212) \quad \left\{ \begin{aligned} |X_0| &\leq |x_0| \cdot \left(1 + \frac{2C \cdot \eta(\delta) + 2\eta^2(\delta)}{1 - 2\eta^2(\delta)} \right) \\ &= |x_0| \cdot \left(1 + 2C \cdot \eta(\delta) + 2\eta^2(\delta) \cdot \frac{2C \cdot \eta(\delta) + 1}{1 - 2\eta^2(\delta)} \right) \\ &< |x_0| \cdot \left(1 + 2C \cdot \eta(\delta) + \eta^2(\delta) \cdot \frac{10000}{4999} \left(\frac{C}{50} + 1 \right) \right). \end{aligned} \right.$$

Es sei nun z eine Zahl, die der Bedingung

$$|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$$

genüge. Man definiere eine Reihe von Zahlen

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_v, \dots$$

durch die Gleichung

$$z_v - z_0 = (z_1 - z_0) \cdot x_0^{v-1}.$$

Ferner sei n so definiert, dass

$$|z_n - z_0| \geq |z - z_0| > |z_{n+1} - z_0|.$$

Dann ist nach (207) und (212)

$$(213) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z_n) - f(z_0)} \right| \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left| \frac{f(z_{v+1}) - f(z_0)}{f(z_v) - f(z_0)} \right| \\ &< (1 + 2\eta(\delta)) \cdot |x_0|^{n-1} \cdot \left(1 + 2C \cdot \eta(\delta) + \eta^2(\delta) \cdot \frac{10000}{4999} \left(\frac{C}{50} + 1 \right) \right)^{n-1} \\ &< \frac{121}{100} \cdot \frac{1}{|x_0|} \cdot |x_0|^{\frac{\log \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|}{\log |x_0|}} \cdot e^{\left(2C \cdot \eta(\delta) + \eta^2(\delta) \cdot \frac{10000}{4999} \left(\frac{C}{50} + 1 \right) \right) \frac{\log \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|}{\log |x_0|}} \\ &= \frac{121}{100} \cdot \frac{1}{|x_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{1 - \eta(\delta) \cdot \frac{2C}{\log |x_0| - 1} - \eta^2(\delta) \cdot \frac{10000}{4999} \cdot \frac{\frac{C}{50} + 1}{\log |x_0| - 1}}. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt aber, dass $|f(z) - f(z_0)|$ mit abnehmendem $|z - z_0|$ beliebig klein wird, also ist $f(z)$ an der Stelle $z = z_0$ stetig. Es ist aber noch mehr bewiesen worden.

Nach Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Grösse ε lässt sich eine hinreichend grosse reelle positive Zahl λ und eine hinreichend kleine reelle positive Zahl δ so bestimmen, dass für alle z , die der Bedingung

$$|z - z_0| < \delta$$

genügen,

$$|f(z) - f(z_0)| < \lambda \cdot |z - z_0|^{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$

wird. Bestimmt man ferner $\delta' \leq \delta$ so klein, dass

$$\lambda < \delta'^{-\frac{\varepsilon}{2}},$$

so wird, wenn

$$|z - z_0| < \delta'$$

ist,

$$|f(z) - f(z_0)| < |z - z_0|^{1-\epsilon}.$$

Damit rechtfertigt sich auch die Wahl des Beispiels (F)

$$f(z) = z \cdot \log |z|^{-1},$$

in dem also der Logarithmus durch keine noch so kleine Potenz von $|z|^{-1}$ hätte ersetzt werden dürfen.

[Ähnliche Einschränkungen würden sich unter der Voraussetzung der Existenz des erweiterten *absoluten* Differentialquotienten an einer Stelle $z = z_0$ für $\operatorname{sgn}(f(z) - f(z_0))$ finden lassen; doch gehe ich darauf nicht ein. Zum Beweise des Satzes (II) waren sie ja nicht nötig].

Bevor ich zum Beweise des Satzes (III) übergehe, will ich für den Koeffizienten von $\epsilon(\lambda)$ im Exponenten des letzten Ausdrucks in (213) das Minimum bestimmen. Ich setze

$$|x_0|^{-1} = k.$$

Es handelt sich also um das Minimum K_0 von

$$\frac{2C}{\log |x_0|^{-1}} = \frac{2\sqrt{k^2 - 1}}{\log k} = K$$

für $k > 1$. Dieser Ausdruck wird mit Annäherung von k an 1 unendlich gross, wird ferner unendlich gross für unendlich grosse Werte von k . Dazwischen muss mindestens *ein* Minimum liegen. Es ist

$$0 = \frac{d}{dk} \left(\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{\log k} \right) = \left(\frac{k \log k}{\sqrt{k^2 - 1}} - \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} \right) \cdot \frac{1}{\log^2 k} = \frac{k^2 \log k - k^2 + 1}{k \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot \log^2 k},$$

wenn

$$(214) \quad \log k + \frac{1}{k^2} = 1.$$

Diese Gleichung ist zunächst erfüllt für den nicht brauchbaren Wert $k=1$. Die linke Seite von (214) wird positiv unendlich gross für $k=0$ und für $k=\infty$. Dazwischen muss mindestens *ein* Minimum liegen. Es ist

$$0 = \frac{d}{dk} \left(\log k + \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3}$$

für $k = \pm \sqrt{2}$. Für $k > 1$ kommt nur der Wert $k = \sqrt{2}$ in Betracht, existiert also auch nur *ein* Minimum der linken Seite von (214) und *kein* Maximum.

Für $k = \sqrt{2}$ wird

$$\log k + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} < 1.$$

Also nimmt die linke Seite von (214) den Wert 1 genau noch einmal an für einen

Wert $k_0 > \sqrt{2}$; und zwar liegt dieser Wert im Intervall

$$2,21 < k_0 < 2,22.$$

Also kann auch K nur an dieser Stelle sein Minimum haben. Es ist ferner wegen (214)

$$K_0 = \frac{2k_0^2}{\sqrt{k_0^2 - 1}},$$

also liegt K_0 im Intervall

$$4,93 < K_0 < 4,98.$$

Es ist nach (211)

$$C_0 = \sqrt{k_0^2 - 1},$$

also liegt C_0 im Intervall

$$(215) \quad 1,97 < C_0 < 1,99.$$

Bezeichnet man mit $\int_{(a_1, a_2, a_3)}$ das geschlossene Integral über die Strecken $a_1 \dots a_3$, $a_3 \dots a_1$, $a_1 \dots a_2$ so gilt die Identität

$$\begin{aligned} \int_{(a_1, a_2, a_3)} f(z) dz &= \int_{\left(a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}\right)} f(z) dz + \int_{\left(\frac{a_2+a_1}{2}, a_2, \frac{a_2+a_3}{2}\right)} f(z) dz \\ &+ \int_{\left(\frac{a_3+a_1}{2}, \frac{a_3+a_2}{2}, a_3\right)} f(z) dz + \int_{\left(\frac{a_2+a_3}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}\right)} f(z) dz. \end{aligned}$$

Wenn die linke Seite dieser Gleichung von 0 verschieden, so können auch nicht alle vier rechtsstehenden Integrale 0 sein. Man bezeichne die Ecken des Integrationsweges desjenigen Integrals der rechten Seite, das den grössten absoluten Betrag besitzt, *der Reihe nach* mit a'_1, a'_2, a'_3 . Sollten die absoluten Beträge mehrerer Integrale der rechten Seite einander gleich sein, so bevorzuge man das in der Summe voranstehende Integral. Man erhält

$$\left| \int_{(a_1, a_2, a_3)} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{(a'_1, a'_2, a'_3)} f(z) dz \right|.$$

Auf das Integral der rechten Seite wende man wiederholt dieselbe Formel an und erhält

$$(216) \quad \left| \int_{(a_1, a_2, a_3)} f(z) dz \right| \leq 4^r \left| \int_{(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)})} f(z) dz \right|$$

wo r eine positive ganze Zahl. Denkt man sich $a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)}$ für beliebig grosse r ermittelt, so wird

$$\lim_{r=\infty} a_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} a_2^{(r)} = \lim_{r=\infty} a_3^{(r)} = z_0.$$

Man bestimme nun zunächst eine reelle positive ganze Zahl n_0 erstens so gross dass

$$\frac{1}{k_0^{n_0}} < \delta_0(z_0),$$

zweitens so gross, dass

$$(217) \quad \frac{1}{K_0 n_0 \log k_0} \leq \frac{1}{100}$$

oder dass

$$(218) \quad n_0 \geq \frac{50}{\frac{1}{k_0^2} - 1} = \frac{50}{C_0}.$$

Hierzu genügt es nach (215),

$$n_0 \geq 26$$

zu machen. Sodann bestimme man einen Wert z_i , derart dass

$$|z_i - z_0| = k_0^{-n_0}.$$

Dann wird nach (185) und (217)

$$n(|z_i - z_0|) < \frac{1}{K_0 n_0 \log k_0} \leq \frac{1}{100},$$

also ist (201) erfüllt.

Wegen (184) divergiert

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\tau(z_0, (n_0 + v - 1) \log k_0)}{(n_0 + v - 1) \log k_0} \geq \frac{1}{\log k_0} \cdot \int_{n_0 \log k_0}^{\infty} \frac{\tau(z_0, \log \delta^{-1})}{\log \delta^{-1}} d(\log \delta^{-1}) = \infty.$$

Also ist

$$(219) \quad \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{\tau(z_0, (n_0 + v - 1) \log k_0)}{(n_0 + v - 1) \log k_0} \right) = 0.$$

Es ist wegen (183) und (217)

$$1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{\tau(z_0, (n_0 + v - 1) \log k_0)}{(n_0 + v - 1) \log k_0} > 1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{n_0 K_0 \log k_0} > 1 - \frac{3}{80},$$

also sind alle Faktoren des unendlichen Produktes (219) positiv. Man bestimme nun n so gross, dass

$$(220) \quad \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{\tau(z_0, (n_0 + v - 1) \log k_0)}{(n_0 + v - 1) \log k_0} \right) < \frac{3\varepsilon}{4A_1^2} \cdot \left| \frac{z_i - z_0}{f(z_i) - f(z_0)} \right|,$$

wo A_1, A_2, A_3 durch die Gleichungen (141) und (142) definiert seien. Man setze wieder

$$z_n - z_0 = (z_i - z_0) \cdot x_0^{n-1},$$

worin

$$x_0 = \frac{1}{k_0} \left(\frac{1}{k_0} + i \sqrt{\frac{1}{k_0^2} - 1} \right).$$

Dann erhält man durch wiederholte Anwendung von (212) und unter Benutzung

von (185)

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(\tilde{z}_n) - f(\tilde{z}_0)}{f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_0)} \right| \\
 (221) \quad & \left\{ \begin{aligned} & < k_0^{-(n-1)} \prod_{v=1}^{n-1} (1 + 2 C_0 \cdot \tau(k_0^{-n_0-v+1}) + 3 \tau^2(k_0^{-n_0-n+1})) \\ & < \left| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0} \right| \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 + \frac{2 C_0}{K_0(n_0+v-1) \log k_0} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2 C_0 \cdot \tau(\tilde{z}_0, (n_0+v-1) \log k_0)}{(n_0+v-1) \log k_0} + \frac{3}{K_0^2(n_0+v-1)^2 \log^2 k_0} \right) \\ & < \left| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0} \right| \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n_0+v-1} \right) \left(1 + \frac{1}{5(n_0+n-1)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2 C_0}{(1+\frac{1}{26})(1+\frac{1}{3380})} \cdot \frac{\tau(\tilde{z}_0, (n_0+v-1) \log k_0)}{(n_0+v-1) \log k_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_0+v-1} \right) \left(1 + \frac{1}{5(n_0+v-1)^2} \right) \right\} \\ & < \left| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0} \right| \cdot \frac{n_0+n-1}{n_0} \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{5(n_0+v-1)^2} \right) \\ & \quad \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{\tau(\tilde{z}_0, (n_0+v-1) \log k_0)}{(n_0+v-1) \log k_0} \right); \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

hierin ist

$$\begin{aligned}
 (222) \quad & \left(\prod_{v=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{5(n_0+v-1)^2} \right) \right) < e^{\frac{1}{5} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+v-1)^2}} \\
 & \left(< e^{\frac{1}{5} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+v-1)(n_0+v-2)}} = e^{\frac{1}{5(n_0-1)}} \leq e^{\frac{1}{124}} < \frac{125}{124} \right).
 \end{aligned}$$

Also erhält man aus (221) unter Benutzung von (222) und (220)

$$\begin{aligned}
 (223) \quad & \left\{ \begin{aligned} & |f(\tilde{z}_n) - f(\tilde{z}_0)| \\ & < \left| \frac{f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_0)}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0} \right| \cdot |\tilde{z}_n - \tilde{z}_0| (n_0 + n - 1) \cdot \frac{125}{124 \cdot 26} \cdot \frac{3 \varepsilon}{4 A_1^2} \cdot \left| \frac{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0}{f(\tilde{z}_1) - f(\tilde{z}_0)} \right| \\ & = |\tilde{z}_n - \tilde{z}_0| \cdot (n_0 + n - 1) \cdot \frac{375}{124 \cdot 104} \cdot \frac{\varepsilon}{A_1^2}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Für alle Werte $\tilde{z}$, die der Bedingung

$$(224) \quad |\tilde{z} - \tilde{z}_0| \leq |\tilde{z}_n - \tilde{z}_0|$$

genügen, erhält man nach (207), (185) und (223)

$$\begin{aligned}
 (225) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \left| f(\tilde{z}) - f(\tilde{z}_0) - \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_n - \tilde{z}_0} (f(\tilde{z}_n) - f(\tilde{z}_0)) \right| < 21 \cdot \eta(|\tilde{z}_n - \tilde{z}_0|) \cdot |f(\tilde{z}_n) - f(\tilde{z}_0)| \\ & < \frac{21}{K_0(n_0 + n - 1) \log k_0} \cdot |\tilde{z}_n - \tilde{z}_0| \cdot (n_0 + n - 1) \cdot \frac{375}{124 \cdot 104} \cdot \frac{\varepsilon}{A_1^2} \\ & < \frac{315}{124 \cdot 16} \cdot |\tilde{z}_n - \tilde{z}_0| \cdot \frac{\varepsilon}{A_1^2}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Man bestimme r so, dass

$$(226) \quad \frac{A_1}{2^{r-1}} > |\zeta_n - \zeta_0| \geq \frac{A_1}{2^r}.$$

Es wird infolgedessen

$$(227) \quad \left| f(\zeta) - f(\zeta_0) - \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_n - \zeta_0} (f(\zeta_n) - f(\zeta_0)) \right| < \frac{315}{124 \cdot 8} \cdot \frac{\varepsilon}{A_1} \cdot \frac{1}{2^r}.$$

Es lässt sich ζ_0 darstellen in der Form

$$\zeta_0 = \alpha_1 \zeta_1^{(r)} + \alpha_2 \zeta_2^{(r)} + \alpha_3 \zeta_3^{(r)},$$

wo

$$(228) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reelle positive Zahlen. Ebenso lässt sich jeder Punkt des geraden Integrationsweges $\zeta_1^{(r)} \dots \zeta_j^{(r)}$ darstellen in der Form

$$\zeta = \beta_2 \zeta_2^{(r)} + \beta_3 \zeta_3^{(r)},$$

wo

$$(229) \quad \beta_2 + \beta_3 = 1$$

und β_2, β_3 ebenfalls reelle positive Zahlen sind. Es wird

$$\begin{aligned} \zeta - \zeta_0 &= -\alpha_1 \zeta_1^{(r)} + (\beta_2 - \alpha_2) \zeta_2^{(r)} + (\beta_3 - \alpha_3) \zeta_3^{(r)} \\ &= \gamma_1 \zeta_1^{(r)} + \gamma_2 \zeta_2^{(r)} + \gamma_3 \zeta_3^{(r)}, \end{aligned}$$

worin nach (228) und (229)

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

Also besitzen zwei der Grössen γ das gleiche Vorzeichen, die dritte das entgegengesetzte. Es sei z. B.

$$\operatorname{sgn} \gamma_1 = -\operatorname{sgn} \gamma_2 = -\operatorname{sgn} \gamma_3,$$

dann ist

$$(230) \quad \left\{ \begin{aligned} |\zeta - \zeta_0| &= |\gamma_2 (\zeta_2^{(r)} - \zeta_1^{(r)}) + \gamma_3 (\zeta_3^{(r)} - \zeta_1^{(r)})| \\ &\leq |\gamma_2| \cdot |\zeta_2^{(r)} - \zeta_1^{(r)}| + |\gamma_3| \cdot |\zeta_3^{(r)} - \zeta_1^{(r)}| \\ &\leq (|\gamma_2| + |\gamma_3|) \cdot \frac{A_1}{2^r} = |\gamma_1| \cdot \frac{A_1}{2^r} \leq \frac{A_1}{2^r}; \end{aligned} \right.$$

denn $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ können als Differenzen zweier positiver Grössen absolut nicht grösser sein als die grössere der beiden. Also folgt für alle Punkte des Integrationsweges von

$$\int_{(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)})} f(\zeta) d\zeta$$

aus (230) und (226), dass (224) erfüllt, also auch (225) oder (227) anwendbar ist.

Da das Integral $\int f(\zeta) d\zeta$ über einen geschlossenen Integrationsweg verschwindet, wenn speziell $f(\zeta) = 1$ oder $f(\zeta) = \zeta$, so ist nach (216) und (227)

$$\begin{aligned} \left| \int_{(a_1, a_2, a_3)} f(\zeta) d\zeta \right| &\leq 4^r \cdot \left| \int_{(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)})} \left(f(\zeta) - f(\zeta_0) - \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_n - \zeta_0} (f(\zeta_n) - f(\zeta_0)) \right) d\zeta \right| \\ &\leq 4^r \cdot \int_{(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)})} \left| f(\zeta) - f(\zeta_0) - \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_n - \zeta_0} (f(\zeta_n) - f(\zeta_0)) \right| \cdot |d\zeta| \\ &< 4^r \cdot \frac{315}{124 \cdot 8} \cdot \frac{\varepsilon}{A_1} \cdot \frac{1}{2^r} \cdot 3 \cdot \frac{A_1}{2^r} = \frac{945}{992} \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es war aber ε eine beliebig kleine Zahl. Also ist

$$\int_{(a_1, a_2, a_3)} f(z) dz = 0,$$

was zu beweisen war. $f(z)$ ist eine analytische Funktion, deren Ableitung in T nicht verschwinden kann, da an einer Nullstelle der Ableitung die Abbildung nicht winkeltreu wäre.

Zu bemerken ist noch, dass für jede analytische Funktion an einer Stelle, an der sie regulär ist und ihre Ableitung nicht verschwindet, (185) tatsächlich erfüllt ist.

Nach (184) darf $\tau(z, \log \delta^{-1})$ speziell eine Konstante sein. Man kann also z. B.

$$\frac{1}{K_0} - \tau = \frac{1}{j} < \frac{1}{K_0}$$

setzen. Es sei nun

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

für $|z| \leq r$ absolut konvergent, wo $a_1 \neq 0$ und r kleiner sei als der wahre Konvergenzradius. Dann ist

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = a_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \left\{ a_v \cdot \sum_{i=0}^{v-1} z_1^i z_2^{v-i-1} \right\}.$$

Wenn nun

$$|z_1| \leq \delta \quad \text{und} \quad |z_2| \leq \delta,$$

so wird

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - a_1 \right| \leq \delta \cdot \sum_{v=2}^{\infty} v |a_v| r^{v-2} = \delta \cdot G,$$

wo G eine von δ unabhängige Konstante ist. Also ist

$$\left| \frac{1}{a_1} \cdot \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - 1 \right| \leq \delta \cdot \frac{G}{|a_1|},$$

mithin nach (23)

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{sgn} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - \operatorname{sgn} a_1 \right| &= \left| \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right) - 1 \right| \\ &< \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \frac{\delta^2 G^2}{|a_1|^2}}} < \delta H < \frac{1}{j \log \delta^{-1}} \end{aligned}$$

für alle hinreichend kleinen δ . Hierin bedeutet H eine passend gewählte, von $\frac{G}{|a_1|}$ abhängige, von δ unabhängige Konstante.

Berlin, den 19. Juli 1913.

ROBERT REMAK.