Die Grenzkreis-Uniformisierung analytischer Gebilde.

Von Josef Plemelj in Czernowitz.

Seitdem durch die Untersuchungen von H. Poincaré ¹⁾ und P. Koebe ²⁾ die Uniformisierbarkeit beliebiger analytischen Funktionen mit Hilfe von Grenzkreisfunktionen endgültig feststeht, sind von verschiedenen Seiten und nach verschiedenen Prinzipien mehrere Beweise des genannten Theorems bekannt geworden. Der einfachste und naturgemäße aller dieser Beweise ist der erste von P. Koebe gegebene. Eine kleine Lücke, die in diesem Beweis die Anwendung des Harnackschen Satzes über positive Potentiale zurückließ, vermeidet eine folgende Darstellung von Koebe, jedoch auf Kosten der Einfachheit und Kürze.²⁾

Der Beweis, den ich für das Uniformisierungstheorem in den folgenden Zeilen mitteile, liegt in engem Anschluß an den ersten Beweis von P. Koebe, er erzielt aber diesem gegenüber noch eine nicht unwesentliche Vereinfachung. Von der durchzuführenden Alternative, ob die uniformisierende Variable einen endlichen Kreis (1. Fall) oder die ganze Ebene (2. Fall) ausfüllt, erledigt den 1. Fall eine einfache Anwendung des Poissonschen Integrals, wobei die Frage, ob die uniformisierende Transzendente den Einheitskreis auch wirklich voll ausfüllt, was bei Poincaré, wie bei Koebe gerade eine Hauptschwierigkeit war, durch einige Striche mit beantwortet wird. Auch für den 2. Fall erziele ich

¹⁾ H. Poincaré: Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Acta Matem., t. XXXI, 1907.

²⁾ P. Koebe: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Gött. Nachr. 1907.

³⁾ P. Koebe: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I. Math. Ann., B. XXVII, 1909.

In dieser Arbeit, sowie im Crelle J. Bd. 138, gibt P. Koebe eine ausführliche Literatur zu den Uniformisierungsproblemen an, wo man das nähere hierüber nachsehe.

eine bedeutende Reduktion, indem ich die Konvergenz einer direkt aus den Greenschen Funktionen hergeleiteten Funktionenfolge zeige und zwar mit Hilfe eines Potenzreihensatzes, der von Koebe herrührt und überhaupt bei Uniformierungsfragen eine zentrale Rolle einnimmt. Nach dieser Darstellung sind die Hilfsmittel tatsächlich ganz elementar und die Beweisführung so naturgemäß, daß jeder Schritt den folgenden von selbst auslöst. Trotz voller Ausführlichkeit ist der Umfang der Darstellung ganz klein, so daß nunmehr dieser Theorem zu den einfachsten Existenzsätzen der Funktionentheorie zu zählen ist.

P. Koebe bemerkt treffend, daß das vorliegende Theorem eigentlich in der natürlichen Fortführung des Weierstraßschen funktionentheoretischen Ideenganges liegt, während es durch Hilfsmittel der Riemannschen Richtung bewiesen wurde. Erwägt man jedoch, daß für den ganzen Existenzbeweis, selbst zur Aufstellung der hier nötigen Greenschen Funktionen, nur elementare Sätze der Funktionentheorie verwendet werden, so namentlich der Satz vom Mittelpunktswert analytischer Funktionen in einem Kreis, wovon das Poissonsche Integral nur eine geeignete Ausdrucksform ist, so wird man erkennen, daß schon jetzt die ganze Beweisführung unschwer der Weierstraßschen Darstellungsweise sich anpassen läßt.

Vom Riemannschen Standpunkte aus handelt es sich um die konforme Abbildung einer beliebigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche. Diese Riemannsche Fläche kann man sich etwa folgendermaßen entstanden denken: Die zu uniformisierende Funktion sei zunächst im Sinne von Weierstraß etwa durch eine Potenzreihe definiert gegeben. An den Konvergenzkreis dieser Potenzreihe hefte man die Konvergenzkreise von Potenzreihen an, die aus der analytischen Fortsetzung sukzessive auseinander hervorgehen. Die Umgebung von Windungspunkten endlich höher Ordnung ist dabei stets zuerst in bekannter Weise in den eindeutigen Zustand zu versetzen. Man hat bei diesem Aufbau der Riemannschen Fläche darauf zu achten, daß niemals der einfache Zusammenhang verloren geht und hat den Prozeß unbegrenzt weiter zu treiben, solange die Fortsetzbarkeit der analytischen Funktion nicht etwa eine natürliche Grenze findet. Freilich kann sich bei diesem Prozeß das Anheften desselben Bereiches in unbegrenzter Wiederholung als notwendig herausstellen, und zwar wird dies immer der Fall sein, wenn sich die zu uniformisierende Funktion auf geschlossenen Wegen reproduziert, die sich im Regularitätsgebiet nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Dies tritt schon bei algebraischen Funktionen vom Geschlechte $p=1$ auf, wobei uns das doppelt periodische Parallelogrammgitter eine leichte topologische Versinnlichung vom sukzessiven Aufbau der Riemannschen Fläche gestattet. Offenbar erweist sich die Anzahl der anzuheftenden Teilbereiche unter allen Umständen als abzählbar.

Der Existenzbeweis.

Die abzubildende einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche S , die über der Ebene der komplexen Veränderlichen x endlich oder unendlich oft ausgebreitet ist, wird als Grenzfall einer unendlichen Folge einfach zusammenhängender Flächen $S_1, S_2, S_3, \dots$ aufgefaßt, deren jede in allen folgenden ganz enthalten, nur endlich vielblättrig und durch lauter Stücke analytischer Kurven, etwa durch Kreisbogen, in endlicher Anzahl begrenzt ist. Ein beliebig gewählter Punkt von S kommt, wenn n hinreichend groß gewählt wird, in die Fläche S_n zu liegen und dann natürlich in jede der folgenden $S_{n+1}, S_{n+2}, \dots$. Die Gebiete $S_1, S_2, S_3, \dots$ sind jedes einzeln in den Einheitskreis abbildbar, wobei die eindeutige analytische Zuordnung auch auf die Randpunkte sich erstreckt.

Man konstruiere die Folge $u_1, u_2, u_3, \dots$ der zu den Flächen $S_1, S_2, S_3, \dots$ gehörigen Greenschen Funktionen in der Weise, daß u_n bei Annäherung an die Berandung von S_n stetig in Null übergeht, im Innern von S_n aber ein überall reguläres logarithmisches Potential ist, bis auf einen fest gewählten Punkt x_0 , der im Innern sämtlicher Flächen $S_1, S_2, S_3, \dots$ liegt und kein Windungspunkt ist. In diesem Punkte soll u_n die Gestalt haben

$$u_n = \log \frac{1}{|x - x_0|} + c_n + (0)_n, \quad (1)$$

wobei c_n eine Konstante, $(0)_n$ aber ein im ganzen Gebiete S_n reguläres, im Punkte x_0 verschwindendes Potential bedeutet. Das Potential u_n wächst bei Annäherung des x an x_0 über jeden positiven Betrag und da es am Rande von S_n verschwindet, nimmt es innerhalb S_n nur positive Werte an. Die Differenz $u_{n+v} - u_n$ ist, wegen (1), auch im Punkte x_0 regulär und, da sie auf der Randkurve von S_n positiv ist, kann sie im Innern von S_n auch nur positiv sein. Daraus folgen die Ungleichungen

$$u_1 < u_2 < u_3 < \dots, \quad (2)$$

und gleichzeitig auch die folgenden

$$c_1 < c_2 < c_3 < \dots, \quad (3)$$

da die Differenz $c_{n+v} - c_n$ als der Wert von $u_{n+v} - u_n$ im Punkte x_0 positiv ausfällt.

Für die Folge sind zwei Möglichkeiten in Betracht zu ziehen.

1. Fall. Es gibt einen endlichen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

Hier läßt sich die Konvergenz der Folge $u_1, u_2, u_3, \dots$ gegen eine Grenzfunktion $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ beweisen.

Man konstruiere zu jedem u_n die konjugierte Potentialfunktion v_n und setze

$$z_n = e^{-u_n - i v_n} \quad (4)$$

Die Funktion z_n vermittelt eine konforme Abbildung von S_n in den Einheitskreis der z_n -Ebene. Der Kreismittelpunkt ist das Bild von x_0 .

Im Gebiete S_n kann jede der Funktionen z_{n+v} als analytische Funktion von z_n betrachtet werden, demzufolge kann man also jedes u_{n+v} als ein Potential des reellen und des imaginären Bestandteiles von z_n auffassen. Betrachtet man in dieser Weise die Differenz $u_{n+v} - u_n$, die in S_n überall regulär ist, als Potential von z_n , so ist sie im z_n -Einheitskreise regulär und auf demselben jedenfalls stetig. Ein solches Potential ist durch das Poissonsche Integral über den Einheitskreis darstellbar. Setzt man allgemein $z_n = |z_n| \cdot e^{i\varphi}$ und für die Punkte des Einheitskreises: $z_n = e^{i\theta}$, so lautet die Darstellung

$$u_{n+v} - u_n = \int_0^{2\pi} (u_{n+v} - u_n) \cdot \frac{1 - |z_n|^2}{1 + |z_n|^2 - 2|z_n| \cos(\theta - \varphi)} \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \quad (5)$$

Unter dem Integral sind alle Faktoren positiv und der Nenner $\geq (1 - |z_n|)^2$. Man bekommt also die Abschätzung

$$u_{n+v} - u_n < \frac{1 + |z_n|}{1 - |z_n|} \cdot \int_0^{2\pi} (u_{n+v} - u_n) \cdot \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Das Integral hierin ist nach (5) der Wert von $u_{n+v} - u_n$ für $|z_n| = 0$, d. h. für den Punkt x_0 von S . Dieser Wert ist $c_{n+v} - c_n$. Da nun noch $c_{n+v} < c$, so haben wir die Ungleichung

$$u_{n+v} - u_n < \frac{1 + |z_n|}{1 - |z_n|} (c - c_n). \quad (6)$$

Jetzt ist es leicht, die Konvergenz der Folge $u_1, u_2, u_3, \dots$ nachzuweisen. Aber noch mehr! Wenn man n hinreichend groß wählt, werden alle u_{n+v} gleichzeitig und zwar in ihrem ganzen Definitionsbereich, soweit er außerhalb S_n liegt, nach Wunsch klein. Es ist nämlich

$$u_{n+v} < (3 + \dots) \sqrt{c - c_n} \text{ außerhalb } S_n, \quad (7)$$

wobei die Punkte ... einen mit $c - c_n$ gegen Null abnehmenden Ausdruck vertreten. Zur Bestätigung setze man $u_n = \log \frac{1}{|z_n|} = \sqrt{c - c_n}$ in (6) ein. Diese z_n -Werte bilden einen Kreis, dem auf S eine

innerhalb S_n verlaufende geschlossene Kurve K entspricht, die offenbar den Punkt x_0 einschließt. Die angegebene Substitution gibt unmittelbar die Gültigkeit der Ungleichung (7) längs der Kurve K ; da aber $u_{n+\nu}$ am Rande von $S_{n+\nu}$ verschwindet, ist (7) außerhalb der Kurve K überall richtig, insbesondere also auch längs der Berandung von S_n . W. z. b. w. Eine unmittelbare Folge ist das Bestehen der Ungleichung

$$u_{n+\nu} - u_n < (3 + \dots) \sqrt{c - c_n} \text{ innerhalb } S_n, \quad (8)$$

denn längs des Randes von S_n , wo $u_n = 0$ ist, gilt dies wegen (7).

Die Funktionen $u_1, u_2, u_3, \dots$ konvergieren somit in jedem Gebiete S_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\lim_{n=\infty} u_n = u$, die wieder ein Potential ist, wie man aus (5) erkennt, worin offenbar u für $u_{n+\nu}$ eingesetzt werden darf. Aus (7) folgt für die Funktion u die Ungleichheit

$$u < (3 + \dots) \sqrt{c - c_n} \text{ außerhalb } S_n. \quad (9)$$

Bildet man nun das zu u konjugierte Potential v und setzt

$$z = e^{-u - iv}, \quad (10)$$

so liefert die Funktion z eine derartige Abbildung der ganzen Fläche S in den Einheitskreis, bei der wegen (9) die Bildkurven der Ränder von $S_1, S_2, S_3, \dots$ mit wachsendem Index ihrem ganzen Verlaufe nach unbegrenzt gegen den z -Einheitskreis sich drängen. Daß jedem Punkte von S ein und nur ein Punkt im z -Einheitskreis entspricht, ist ohne weiteres klar, aber es ist auch die umgekehrte Beziehung eine eindeutige. Es sei nämlich $|a| < 1$. Wegen (9) u. (10) wird, falls n hinreichend groß ist, längs der ganzen Berandung von S_n die Ungleichung $|z| > |a|$ bestehen. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int d \log(z - a)$, erstreckt über die Randkurve von S_n , gibt an, wie oft innerhalb S_n der Wert a von z angenommen wird. Dieses Integral ist nun gleich $\frac{1}{2\pi i} \int d \log z$, weil der Ausdruck $\log \left(1 - \frac{a}{z}\right)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe sich entwickeln läßt, so daß sich das Integral $\int d \log \left(1 - \frac{a}{z}\right) = 0$ ergibt. Nun ist aber $\frac{1}{2\pi i} \int d \log z = 1$, da dem Punkte $z = 0$ nur $x = x_0$ entspricht. Der Einheitskreis wird also von z einfach und voll ausgefüllt.

2. Fall. Die Konstanten $c_1, c_2, c_3, \dots$ wachsen unbegrenzt.

Man betrachte hier statt der Funktionen (4) die folgenden

$$z_n = e^{c_n - u_n - i v_n}. \quad (11)$$

Verfügt man in leicht ersichtlicher Weise über die additive Konstante in v_n , so wird wegen (1) in der Umgebung von x_0 eine Entwicklung gelten

$$z_n = x - x_0 + (x - x_0)^2 \mathfrak{P}_n(x - x_0). \quad (12)$$

Die Funktion z_n liefert eine konforme Abbildung des Bereiches S_n in das Innere eines Kreises vom Radius e^{c_n} . Da dieser Radius mit n über alle Grenzen wächst, das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung im Punkte x_0 aber nach (12) unabhängig von n immer $= 1$ bleibt, liegt die Vermutung nahe, daß die obigen Funktionen $z_1, z_2, z_3, \dots$ gegen eine Grenzfunktion $\lim_{n=\infty} z_n = z$

konvergieren, die eine Abbildung von S in die ganze Ebene mit Ausschluß von $z = \infty$ gibt. In der Tat konvergiert hier die Folge $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \dots$ gegen eine Funktion $\frac{1}{z}$.

Im Bereiche S_n kann man jedes $z_{n+\nu}$ als analytische Funktion von z_n auffassen und es gilt, wegen (12), eine Potenzreihenentwicklung

$$z_{n+\nu} = z_n + a z_n^2 + \dots, \quad (13)$$

die offenbar im ganzen Kreise $|z_n| < e^{c_n}$ konvergent ist.

Die Differenz $\frac{1}{z_{n+\nu}} - \frac{1}{z_n}$ ist im ganzen Gebiete S_n regulär, da sich nach (12) die Unstetigkeit an der Stelle x_0 weghebt. Als Funktion von z_n aufgefaßt ist also $\frac{1}{z_{n+\nu}} - \frac{1}{z_n}$ regulär-analytisch im Kreise $|z_n| < e^{c_n}$. Auf der Randkurve von S_n hat nun $\frac{1}{z_n}$ den Absolutwert e^{-c_n} , der mit wachsendem n unter jeden Betrag sinkt, weil dabei $|z_n| = e^{c_n}$ über jeden Betrag wächst. Wenn nun noch gezeigt wird, daß auch der Absolutwert der Potenzreihe (13) für $z_{n+\nu}$ mit $|z_n|$ gleichzeitig über alle Grenzen wächst, so wird die Konvergenz der Folge $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \dots$ nachgewiesen sein, da der maximale Absolutbetrag einer analytischen Funktion, hier der Funktion $\frac{1}{z_{n+\nu}} - \frac{1}{z_n}$, nicht im Regularitätsgebiet liegt. Dies führt zu folgendem von Koebe herrührenden überaus wichtigen Potenzreihensatz, der die Konvergenzbetrachtung schließt:

Nimmt die Potenzreihe

$$f(z) = z + az^2 + a_1 z^3 + a_2 z^4 + \dots$$

im Kreise $|z| \leq \rho$ keinen Wert zweimal an, so gilt unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $f(z)$ im ganzen Kreise $|z| \leq \rho$ die Ungleichheit

$$|f(z)| > \frac{1}{10} \cdot |z|^{\cdot 1)} \quad (14)$$

Beweis. Die Funktion $1:f(z)$, wofür eine Entwicklung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} - a + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

gilt, vermittelt eine konforme Abbildung des Kreises $|z| \leq \rho$ in das Äußere einer ganz im Endlichen liegenden, den Nullpunkt einschließenden Kurve. Aus diesem Grunde ist auf jedem Kreise $|z| = r \leq \rho$ der Wert von $\left| \frac{1}{f(z)} \right|$ nicht größer als der Absolutbetrag der Schwankung von $\frac{1}{f(z)}$ auf demselben Kreise. Die Schwankung von $\frac{1}{f(z)}$ ist nun, weil die Konstante a dafür einflußlos ist, gleich der Schwankung von

$$F(z) = \frac{1}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

und absolut genommen jedenfalls nicht größer, als der doppelte Maximalwert von $|F(z)|$ auf dem Kreise $|z| = r$. Ausschlaggebend ist nun die Bemerkung, daß der Maximalwert von $|F(z)|$ mit wachsendem $|z|$ beständig abnimmt, da auch $F(z)$ eine konforme Abbildung des Kreises $|z| < \rho$ in das Äußere einer im Endlichen liegenden Kurve liefert. Die Funktion $\frac{1}{z} F(z) - \frac{1}{z^2}$ ist innerhalb $|z| < \rho$ regulär, folglich gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{z} F(z) - \frac{1}{z^2} \right|_{|z|=r} < \text{Max. von } \left| \frac{1}{z} F(z) - \frac{1}{z^2} \right|_{|z|>r}$$

¹⁾ Die Konstante $\frac{1}{10}$ ist hier unwesentlich. Von dem Satze lassen sich verschiedene Beweise geben und auch die Abschätzung verschärfen, der vorliegende ganz elementare Beweis stammt im wesentlichen von P. Koebe (Math. Ann., Bd. 69, 1910, S. 46—49). Der sogenannte „Verzerrungssatz von Koebe“, dessen Entdeckung die großartige Erledigung aller Kleinschen Existenztheoreme über eindeutige automorphe Funktionen mit sich brachte, ist eine einfache Folge des hier angeführten Satzes.

Bezeichnet man die Maxima von $|F(z)|$ für $|z| = r$ und $|z| = \rho$ mit M_r und M_ρ , so hat man also die Ungleichung

$$\frac{1}{r} M_r - \frac{1}{r^2} < \frac{1}{\rho} M_\rho + \frac{1}{\rho^2},$$

die noch verstärkt wird, wenn darin statt M_r der kleinere Wert M_ρ eingesetzt wird. Nimmt man dann noch z. B. $r = \frac{\rho}{2}$, so ergibt sich $M_\rho < \frac{5}{\rho}$. Da nach dem gesagten $\left| \frac{1}{f(z)} \right|$ kleiner ist, als der doppelte Maximalwert des $|F(z)|$ auf demselben z -Kreise, so gilt $\left| \frac{1}{f(z)} \right| < \frac{10}{\rho}$, d. h. die Ungleichheit (14).

Die Funktion $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ gibt eine konforme Abbildung von S in die ganze einfache Ebene mit Ausschluß des Punktes $z = \infty$. Nachträglich kann ∞ als Bildpunkt von x_∞ angesehen werden, wenn die Randkurven von $S_1 S_2 S_3 \dots$ mit wachsendem Index sich ihrem ganzen Verlaufe nach immer mehr gegen den Punkt x_∞ zusammenziehen, die Riemannsche Fläche S also eine geschlossene in x_∞ punktierte ist und das Geschlecht Null hat.

In ähnlicher Weise läßt sich die Existenz der Greenschen Funktion auch beim Newtonschen Potential für beliebige Bereiche zeigen, wobei der zweite Fall nicht vorkommen kann.