Die Kaskadenschaltung zweier mehrphasiger Induktionsmaschinen in analytischer und graphischer Behandlung.

Von

Dr. Ing. H. Kafka.

1. Ersatzstromkreis der mehrphasigen Induktionsmaschine. Für die mehrphasige Induktionsmaschine (allgemeiner Wechselstromtransformator) gilt bei Reduktion der sekundären Größen auf die primäre Windungszahl, Wicklungsart und Kreisfrequenz pro Phase der Ersatzstromkreis Abb. 1. Dabei sind die Eisenverluste im Ständer und Läufer in einer den wirklichen Verhältnissen nahe kommenden Weise berücksichtigt.

Bezüglich der verwendeten Bezeichnungen ist zu bemerken, daß vektorielle Größen mit deutschen Buchstaben, ihre absoluten Werte mit lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden. Die Operationszeichen in Gleichungen mit vektoriellen Größen sind vektoriell aufzufassen. Alle Entwicklungen gelten, wenn nicht anders bemerkt, pro Phase.

Abb. 1.

Bezeichnungen:

- $\mathfrak{U}_1$ Effektivwert der primär zugeführten Klemmenspannung.
- $\mathfrak{E}_1$ dem Ständerfluß Φ_1 entsprechende Spannung.
- $\mathfrak{E}$ dem gemeinsamen Fluß Φ entsprechende Spannung.
- $\mathfrak{E}_2$ dem Läuferfluß Φ_2 entsprechende Spannung.
- r_1, S_1 Wirkwiderstand und Streuinduktionskoeffizient der Ständerwicklung.
- r_2, S_2 reduzierter Wirkwiderstand und Streuinduktionskoeffizient der Läuferwicklung.
- M reduzierter gegenseitiger Induktionskoeffizient der beiden Wicklungen der Induktionsmaschine.
- ω_1 Kreisfrequenz der Ständerströme.
- ω_2 Kreisfrequenz der Läuferströme.
- $s = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ Schlüpfung.
- $\omega_1 q_{h1}$ fiktiver Wirkwiderstand, welcher die Hysteresisverluste im Ständereisen (prop. $\omega_1 \Phi_1^2$) berücksichtigt.
- q_{w1} fiktiver Wirkwiderstand, welcher die Wirbelströme im Ständereisen (prop. $\omega_1^2 \Phi_1^2$) berücksichtigt.
- $\pm \omega_1 q_{h2}$ fiktiver Wirkwiderstand, welcher die Hysteresisverluste im Läuferisen berücksichtigt; das doppelte Vorzeichen soll den Hysteresissprung zum Ausdruck bringen und zwar gilt das $\pm$ Zeichen für $s \geq 0$.
- q_{w2} fiktiver Wirkwiderstand, welcher die Wirbelströme im Läuferisen berücksichtigt.

Die Berücksichtigung der Läuferhysteresis hat zur Folge, daß die Leistungslinie im Kreisdiagramm der Induktionsmaschine keine Gerade ist. Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, die Läuferhysteresis zu vernachlässigen und die den Ständerisenverlusten entsprechenden fiktiven Wirkwiderstände $\omega_1 \varrho_{h1}$ und ϱ_{w1} im Ersatzstromkreis parallel zum Blindwiderstand $j\omega_1 M$ zu legen (siehe Abb. 2); die genannten Eisenverluste werden damit auf die dem gemeinsamen Fluß Φ entsprechenden Induktionen bezogen.

2. Drehzahl- und Schlüpfungsverhältnisse der Kaskadenschaltung.

Die beiden in Kaskade geschalteten Induktionsmaschinen sollen durch die Bezeichnung „vordere“ und „hintere“ Maschine unterschieden werden. Die Ständerwicklung der vorderen Maschine sei an das Mehrphasennetz angeschlossen; ihre Läuferwicklung kann entweder mit der Ständer- oder mit der Läuferwicklung der hinteren Maschine verbunden sein, wobei auf die richtige Verbindung der einzelnen Phasen zu achten ist.

Abb. 2.

Die beiden Maschinen mit den Polpaarzahlen p_1 und p_2 seien mit dem Übersetzungsverhältnis

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2} \quad 1)$$

gekuppelt; n_1 und n_2 sind die minutlichen Umdrehungszahlen ihrer Läufer.

Die der Ständerwicklung der vorderen Maschine zugeführten Mehrphasenströme der Periodenzahl f_1 erzeugen ein Drehfeld mit der minutlichen Umdrehungszahl

$$N_1 = \frac{60 f_1}{p_1}, \quad 2)$$

der Differenz der Umdrehungszahlen ($N_1 - n_1$) entspricht die Periodenzahl

$$f_2 = \frac{(N_1 - n_1) p_1}{60} \quad 3)$$

der Mehrphasenströme, welche in den hintereinander geschalteten Wicklungen der beiden Maschinen fließen. In der hinteren Maschine erzeugen diese Ströme ein Drehfeld mit der minutlichen Umdrehungszahl

$$N_2 = \frac{60 f_2}{p_2} = (N_1 - n_1) \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad 4)$$

der Differenz der Umdrehungszahlen ($N_2 - n_2$) entspricht die Periodenzahl

$$f_3 = \frac{(N_2 - n_2) p_2}{60} \quad 5)$$

der in der Sekundärwicklung der hinteren Maschine fließenden Mehrphasenströme.

Wir haben demnach bei der Kaskadenschaltung 3 Stromkreise zu unterscheiden, in denen Mehrphasenströme der Periodenzahlen f_1 , f_2 und f_3 fließen. Der „Primärkreis der Kaskadenschaltung“ besteht aus der Ständerwicklung der vorderen Maschine (primäre Periodenzahl f_1), der „Sekundärkreis“ aus den hintereinander geschalteten Wicklungen der beiden Maschinen (sekundäre Periodenzahl f_2) und der „Tertiärkreis“ aus der Sekundärwicklung der hinteren Maschine (tertiäre Periodenzahl f_3).

Wenn der Läufer der hinteren Maschine synchron mit ihrem Drehfeld rotiert ($n_2 = N_2$), wird $f_3 = 0$; dieser Betriebszustand wird als Synchronismus der Kaskadenschaltung bezeichnet. Die Bedingungsgleichung für die synchronen Umdrehungszahlen der beiden Läufer n_{10} und n_{20} ist nach 4)

$$n_{20} = (N_1 - n_{10}) \cdot \frac{p_1}{p_2};$$

da nach 1)

$$\frac{n_{10}}{n_{20}} = \gamma,$$

wird

$$n_{10} = N_1 \cdot \frac{\gamma p_1}{\gamma p_1 + p_2} = \gamma \cdot \frac{60 f_1}{\gamma p_1 + p_2} \quad (6)$$

und

$$n_{20} = N_1 \cdot \frac{p_1}{\gamma p_1 + p_2} = \frac{60 f_1}{\gamma p_1 + p_2}. \quad (7)$$

Nach Einführung der Verhältniszahlen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma p_1}{\gamma p_1 + p_2}, \\ \beta &= \frac{p_1}{\gamma p_1 + p_2} \end{aligned} \right\} (\alpha + \beta = 1) \quad (8)$$

lassen sich die synchronen Umdrehungszahlen in der Form

$$n_{10} = \alpha N_1 \quad (6a)$$

und

$$n_{20} = \frac{\alpha N_1}{\gamma} = \beta \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot N_1 \quad (7a)$$

schreiben.

Als Schlüpfung der Kaskadenschaltung wird das Verhältnis

$$s = \frac{n_{10} - n_1}{n_{10}} = \frac{n_{20} - n_2}{n_{20}} \quad (9)$$

der Differenz zwischen der synchronen und der tatsächlichen Umdrehungszahl einer Maschine zu ihrer synchronen Umdrehungszahl bezeichnet.

Die Eigenschlüpfungen der beiden Maschinen sind

$$s_1 = \frac{N_1 - n_1}{N_1} \quad (10)$$

und

$$s_2 = \frac{N_2 - n_2}{N_2}. \quad (11)$$

Da

$$n_1 = n_{10} (1 - s)$$

und

$$N_1 = \frac{n_{10}}{\alpha} \quad (6a),$$

wird

$$\frac{n_1}{N_1} = \alpha (1 - s)$$

und damit die Eigenschlüpfung der vorderen Maschine (da $1 - \alpha = \beta$)

$$s_1 = 1 - \frac{n_1}{N_1} = \alpha s + \beta. \quad (10a)$$

Um die Eigenschlüpfung der hinteren Maschine s_2 durch s und die Konstanten α und β auszudrücken, ermitteln wir zunächst aus 4) und 10a) das Verhältnis

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(1 - \frac{n_1}{N_1}\right) \cdot \frac{P_1}{P_2} = (\alpha s + \beta) \cdot \frac{P_1}{P_2};$$

wenn wir in 7a) N_1 durch N_2 ausdrücken, wird die synchrone Umdrehungszahl der hinteren Maschine

$$n_{20} = \frac{\beta}{\alpha s + \beta} \cdot N_2. \quad (7b)$$

Aus den Beziehungen

$$n_2 = n_{20} (1 - s), \quad N_2 = n_{20} \cdot \frac{\alpha s + \beta}{\beta} \quad (7b) \quad \text{und} \quad \frac{n_2}{N_2} = \frac{\beta (1 - s)}{\alpha s + \beta}$$

ergibt sich schließlich die Eigenschlüpfung der hinteren Maschine

$$s_2 = 1 - \frac{n_2}{N_2} = \frac{s}{\alpha s + \beta}. \quad (11a)$$

Das Produkt der Eigenschlüpfungen ist

$$s_1 s_2 = s. \quad (12)$$

Für die Schlüpfung $s = -\frac{\beta}{\alpha}$ wird die Eigenschlüpfung der vorderen Maschine $s_1 = 0$, d. h. ihr Läufer rotiert synchron mit dem Drehfeld ($n_1 = N_1$). Im folgenden wird dieser Betriebszustand als „Synchronismus der vorderen Maschine“ bezeichnet.

Die Eigenschlüpfung der vorderen Maschine bestimmt auch das Verhältnis der sekundären zur primären Periodenzahl (bzw. Kreisfrequenz)

$$s_1 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha s + \beta; \quad (13)$$

die Eigenschlüpfung der hinteren Maschine bestimmt das Verhältnis der tertiären zur sekundären Periodenzahl

$$s_2 = \frac{f_3}{f_2} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{s}{\alpha s + \beta}. \quad (14)$$

Abb. 3a.

Abb. 3b.

Die Multiplikation von 13) und 14) ergibt das Verhältnis der tertiären zur primären Periodenzahl (bzw. Kreisfrequenz)

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = s. \quad (15)$$

Bei direkter Kupplung der Läuferwellen ($\gamma = 1$) wird

$$n_1 = n_2 = n$$

und die synchrone Umdrehungszahl

$$n_0 = \frac{60 f_1}{P_1 + P_2}; \quad (16)$$

ferner ist dann

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{P_1}{P_1 + P_2}, \\ \beta &= \frac{P_2}{P_1 + P_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3. Der Ersatzstromkreis der Kaskadenschaltung zweier mehrphasiger Induktionsmaschinen läßt sich aus den in den Abb. 3a und 3b dargestellten Ersatzstrom-

kreisen der vorderen und hinteren Maschine zusammensetzen, welche in ihrem Aufbau der Abb. 2 entsprechen. Dabei sind die Konstanten der Sekundärwicklung der vorderen Maschine und beider Wicklungen der hinteren Maschine auf die Windungszahl und Wicklungsart der Primärwicklung der vorderen Maschine reduziert gedacht. Außerdem wurden die Kreisfrequenzen des Sekundärkreises jeder Maschine durch Multiplikation der sekundären Scheinwiderstände mit dem Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bzw. $\frac{\omega_2}{\omega_3}$ auf die Kreisfrequenz ω_1 bzw. ω_2 ihres Primärkreises reduziert. Die auf die beiden Maschinen bezug habenden Konstanten sind durch die oberen Zeiger „v“ bzw. „h“ unterschieden. Alle Entwicklungen gelten wieder pro Phase.

Wenn der Ersatzstromkreis der hinteren Maschine durch Multiplikation aller seiner Scheinwiderstände mit dem Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ auf die Kreisfrequenz ω_1 reduziert wird, lassen sich die Abb. 3 a und 3 b zu dem Ersatzstromkreis Abb. 4 zusammenfassen. Dabei empfiehlt es sich, zunächst den die Wirbelströme im Läuferisen der vorderen Maschine berücksichtigenden Wirkwiderstand $\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \varrho_{w_2}^v$ zu vernachlässigen, da er eine durch seine Bedeutung nicht gerechtfertigte Komplikation der Behandlungsweise zur Folge hätte.

Abb. 4.

Die Hysteresis und die Wirbelströme im Eisen des Primärteiles der hinteren Maschine liefern Beiträge zum Drehmoment. Beim Durchgang des Aggregates durch die Schlüpfung $s = -\frac{\beta}{\alpha}$, bei welcher der Läufer der vorderen Maschine synchron mit ihrem Drehfeld rotiert ($n_1 = N_1$), kehrt sich die Richtung des Drehfeldes in der hinteren Maschine um. Im Zusammenhang damit ändern auch die genannten Beiträge ihren Sinn und zwar sind sie unterhalb der der Schlüpfung $s = -\frac{\beta}{\alpha}$ entsprechenden Umdrehungszahl positiv, oberhalb derselben negativ. Die Änderung des Beitrages der Wirbelströme, die sich durch Vorzeichenänderung des Verhältnisses $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\alpha s + \beta}$ ausdrückt, geht stetig vor sich; der Hysteresisbeitrag ändert dagegen ähnlich wie bei der einfachen Induktionsmaschine; sprunghaft seinen Sinn. Um dies analytisch zum Ausdruck zu bringen, ist dem Wirkwiderstand $\omega_1 \varrho_{h_1}^h$, welcher die Hysteresis im Primärteil der hinteren Maschine berücksichtigt, ein doppeltes Vorzeichen zu geben. Das „+“-Zeichen gilt für $n_1 < N_1$, das „-“-Zeichen für $n_1 > N_1$.

Die Berücksichtigung der Wirbelströme im Eisen des Primärteiles der hinteren Maschine hat im Ersatzstromkreis Abb. 4 das Auftreten eines mit der Schlüpfung veränderlichen Wirkwiderstandes $\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \varrho_{w_1}^h = \frac{\varrho_{w_1}^h}{\alpha s + \beta}$ im Gefolge, welcher die Behand-

lung der Kaskadenschaltung ziemlich erschwert. Die Hysteresis im Primärteil der hinteren Maschine bringt andererseits eine Unstetigkeit mit sich. Wir werden daher im folgenden die Hysteresis und die Wirbelströme im Eisen des Primärteiles der hinteren Maschine vernachlässigen, da dieselben in Wirklichkeit nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Die drei parallel geschalteten Widerstände $\omega_1 \varrho_{h1}^v$, ϱ_{w1}^v und $j\omega_1 M^v$ des Ersatzstromkreises Abb. 4 lassen sich zu einem Scheinwiderstand $\mathfrak{z}_a = r_a + jx_a$ zusammenfassen; für den Scheinleitwert dieser Parallelschaltung gilt die Beziehung

$$g_a - jb_a = \left(\frac{I}{\omega_1 \varrho_{h1}^v} + \frac{I}{\varrho_{w1}^v} \right) - j \frac{I}{\omega_1 M^v};$$

die Komponenten des Scheinwiderstandes $\mathfrak{z}_a$ sind daher

$$\left. \begin{aligned} r_a &= \frac{g_a}{g_a^2 + b_a^2} = \frac{\frac{I}{\omega_1 \varrho_{h1}^v} + \frac{I}{\varrho_{w1}^v}}{\left(\frac{I}{\omega_1 \varrho_{h1}^v} + \frac{I}{\varrho_{w1}^v} \right)^2 + \left(\frac{I}{\omega_1 M^v} \right)^2}, \\ x_a &= \frac{b_a}{g_a^2 + b_a^2} = \frac{\frac{I}{\omega_1 M^v}}{\left(\frac{I}{\omega_1 \varrho_{h1}^v} + \frac{I}{\varrho_{w1}^v} \right)^2 + \left(\frac{I}{\omega_1 M^v} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

Die Wirkwiderstände $\pm \omega_1 \varrho_{h1}^h$ und $\frac{\varrho_{w1}^h}{\alpha s + \beta}$ werden vernachlässigt. Wir setzen schließlich

$$j\omega_1 M^2 = jx_b, \quad 19)$$

welcher Blindwiderstand der einfachen Schreibweise wegen gelegentlich auch mit $\mathfrak{z}_b$ bezeichnet werden wird.

Wir führen weiter folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} r_1^v &= r_1; & \omega_1 S_1^v &= x_1, \\ r_2^v + r_1^h &= r_2; & \omega_1 (S_2^v + S_1^h) &= x_2, \\ r_2^h &= r_3; & \omega_1 S_2^h &= x_3. \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Die Wirkwiderstände $r_2^h = r_3$ und ϱ_{w2}^h fassen wir zu dem totalen sekundären Wirkwiderstand der hinteren Maschine

$$r_{3t} = \frac{I}{\frac{I}{r_s} + \frac{I}{\varrho_{w2}^h}} \quad 21)$$

zusammen. Schließlich setzen wir noch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= r_1 + jx_1, \\ \mathfrak{z}_{2s} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot r_2 + jx_2 = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + jx_2, \\ \mathfrak{z}_{3s} &= \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot r_{3t} + jx_3 = \frac{r_{3t}}{s} + jx_3. \end{aligned} \right\} \quad 22)$$

Mit diesen Einführungen läßt sich der Ersatzstromkreis Abb. 4 in der vereinfachten Form Abb. 5 darstellen, welche der Ermittlung des Leitwert-(Strom-)diagramms der Kaskadenschaltung zugrunde gelegt werden soll. Dabei sind von den Eisenverlusten

1. die Wirbelströme und die Hysteresis im Ständer der vorderen Maschine und
2. die Wirbelströme im Sekundärteil der hinteren Maschine in einer den wirklichen Verhältnissen nahe kommenden Weise berücksichtigt. Vernachlässigt sind dagegen:

1. Wirbelströme und Hysteresis im Läufer der vorderen Maschine,
2. Wirbelströme und Hysteresis im Primärteil der hinteren Maschine und
3. Hysteresis im Sekundärteil der hinteren Maschine.

In dem von Prof. Arnold verwendeten Ersatzstromkreis der Kaskadenschaltung (siehe „Wechselstromtechnik“ V. Band, I. Teil, S. 492), welcher im wesentlichen der Abb. 5 entspricht, werden die Stromzweige der Magnetisierungsströme durch die

Abb. 5.

Scheinleitwerte $\mathcal{Y}_a = g_a + j b_a$ und $\mathcal{Y}_b = g_b + j b_b$ bestimmt. Wie aus dem Vergleich mit der Abb. 4 hervorgeht, kann durch die Wirkkomponente des letzteren nur die Hysteresis im Primärteil der hinteren Maschine berücksichtigt werden, wobei aber das Vorzeichen von g_b zu wechseln ist, wenn die vordere Maschine relativ zu ihrem Drehfeld übersynchron läuft (S. 5).

4. Ermittlung des Leitwertdiagramms der Kaskadenschaltung.

Durch Zusammenfassung der Scheinwiderstände $\mathcal{Z}_{2s}$, $\mathcal{Z}_b$ und $\mathcal{Z}_{3s}$ zu dem Scheinwiderstand

$$\mathcal{Z}_{2s} = R_{2s} + jX_{2s} = \mathcal{Z}_{2s} + \frac{\mathcal{Z}_b \mathcal{Z}_{3s}}{\mathcal{Z}_b + \mathcal{Z}_{3s}} \quad (23)$$

kann der Ersatzstromkreis der Kaskadenschaltung auf die in Abb. 5 a dargestellte Form gebracht werden. Der resultierende Scheinleitwert desselben

Abb. 5 a.

Abb. 6.

$$\mathcal{Y}_s = \frac{\mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_{2s}}{\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_{2s} + \mathcal{Z}_a \mathcal{Z}_{2s}} \quad (24)$$

läßt sich in einen konstanten Teil

$$\mathcal{Y} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{I}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_a} \quad (25)$$

und einen mit der Schlüpfung s veränderlichen Teil

$$\mathcal{Y}_s = \frac{I}{\left(\frac{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_a} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_a} + \mathcal{Z}_{2s} \right)} \quad (26)$$

zerlegen. Mit Einführung des vektoriellen Verhältnisses

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_a} \quad (27)$$

und des Scheinwiderstandes

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_a}{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_a} = \frac{\hat{\beta}_1}{\mathfrak{G}_1} \quad (28)$$

wird

$$\mathcal{Y}_s = \frac{1}{\mathfrak{G}_1^2} \cdot \frac{1}{\hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_{2s}} \quad (26a)$$

bzw.

$$\mathcal{Y}_s = \mathcal{Y}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \mathcal{Y}'_s = \frac{1}{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_a} + \frac{1}{\mathfrak{G}_1^2} \cdot \frac{1}{\hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_{2s}}. \quad (24a)$$

Wir wollen nun die Bedeutung der einzelnen Größen dieser Gleichung näher untersuchen. Für $s = -\frac{\beta}{\alpha}$ (Synchronismus der vorderen Maschine) wird

$\hat{\beta}_{2s} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + j x_2$ und damit $\hat{\beta}_{2s}$ unendlich groß und der Ersatzstromkreis Abb. 5a reduziert sich auf die hintereinander geschalteten Scheinwiderstände $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_a$; das erste Glied von 24a) stellt demnach den Scheinleitwert des Ersatzstromkreises für diese Schlüpfung dar.

Die Scheinwiderstände, welche das im zweiten Glied von 24a) auftretende vektorielle Verhältnis $\mathfrak{G}_1$ bestimmen, sind in Abb. 6 spiegelbildlich¹⁾ eingetragen; es ist dabei das Verhältnis der Vektoren

$$\frac{\overline{O4}}{\overline{O2}} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_a}{\hat{\beta}_a}$$

und

$$\angle(4 O 2) = \gamma_1.$$

Das in 27) eingeführte vektorielle Verhältnis kann auch in der Form

$$\mathfrak{G}_1 = C_1 e^{-j\gamma_1} \quad (27a)$$

geschrieben werden, wobei

$$C_1^2 = \frac{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2}{z_a^2} \quad (27b)$$

das Quadrat seines Betrages und γ_1 den Winkel bedeutet, um den ein Vektor bei der Multiplikation mit $\mathfrak{G}_1$ verdreht wird.

Nach Abb. 6 ist

$$\gamma_1 = \psi_a - \varphi_{10}$$

und daher

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{x_a}{r_a} - \frac{x_1 + x_a}{r_1 + r_a}}{1 + \frac{x_a}{r_a} \cdot \frac{x_1 + x_a}{r_1 + r_a}}. \quad (29)$$

Die Komponenten des in 28) eingeführten Scheinwiderstandes $\hat{\beta}_1^*$ sollen mit r_1^* und x_1^* bezeichnet werden. Wenn in dieser Gleichung für $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_a$ die komplexen Ausdrücke eingeführt werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1^* = r_1^* + j x_1^* &= \frac{(r_1 + j x_1)(r_a + j x_a)}{(r_1 + r_a) + j(x_1 + x_a)} \\ &= \frac{r_1 z_a^2 + z_a^2 r_a + j(x_1 z_a^2 + z_a^2 x_a)}{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2} \end{aligned}$$

¹⁾ Bezüglich der geometrischen Darstellung der Scheinleitwerte und Ströme ist zu bemerken, daß dieselbe auf rechtwinkelige Koordinatensysteme bezogen wurde, wobei die pos. Wirkkomponenten in Richtung der pos. Ordinatenachse und die pos. (induktiven) Blindkomponenten in Richtung der neg. Abszissenachse des in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Koordinatensystems aufgetragen wurden. Dementsprechend sind pos. (induktive) Blindwiderstände in Richtung der neg. Abszissenachse aufzutragen. Zur Vereinfachung der auszuführenden Inversionen wurden jedoch die Scheinwiderstände an den Ordinatenachsen gespiegelt.

und daraus

$$\left. \begin{aligned} r_1^* &= \frac{r_1 z_a^2 + z_1^2 r_a}{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2}, \\ x_1^* &= \frac{x_1 z_a^2 + z_1^2 x_a}{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2}. \end{aligned} \right\} 30)$$

Da nach 27 b) für den Nenner dieser Ausdrücke die Beziehung
 $(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2 = C_1^2 z_a^2$

Abb. 7.

gilt, können die Komponenten von δ_1^* auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} r_1^* &= \frac{I}{C_1^2} \left[r_1 + r_a \left(\frac{z_1}{z_a} \right)^2 \right], \\ x_1^* &= \frac{I}{C_1^2} \left[x_1 + x_a \left(\frac{z_1}{z_a} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} 30a)$$

geschrieben werden.

Wir wollen nun den geometrischen Ort ermitteln, welchen der Vektor des Scheinleitwertes $\mathcal{Y}_s = \mathcal{Y} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) + \mathcal{Y}_s$ (siehe 24a) bei veränderlicher Schlüpfung s beschreibt. Zu diesem Behufe tragen wir in dem Koordinatensystem (u, v) der Abb. 7 zunächst den dem Synchronismus der vorderen Maschine entsprechenden konstanten Scheinleitwert

$$\overline{OP} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{I}{\delta_1 + \delta_a} = \frac{I}{(r_1 + r_a) + j(x_1 + x_a)} \quad 31)$$

ein. Der geometrische Ort des dem zweiten Gliede von 24a) entsprechenden Scheinleitwertes

$$\mathfrak{Y}_s = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{(\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}) e^{-j2\gamma_1}} \quad (32)$$

kann durch Inversion aus den Scheinwiderständen $(\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}) e^{-j2\gamma_1}$ abgeleitet werden, wobei die erhaltenen Scheinleitwerte noch im Verhältnis $\frac{1}{C_1^2}$ zu reduzieren sind. Wir führen hierzu ein neues Koordinatensystem $(u'v')$ mit dem Ursprung $O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}}$ ein, welches gegen (uv) um den $\angle 2\gamma_1$ entgegen dem Uhrzeigersinn verdreht ist und tragen in dasselbe die gespiegelten Scheinwiderstände $\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}$ ein; auf $(u'v')$ bezogen, stellen diese Vektoren die gespiegelten Scheinwiderstände $(\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}) e^{-j2\gamma_1}$ dar

Die Scheinwiderstände $(\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s})$ setzen sich aus dem konstanten Teile

$$\mathfrak{z}_1^* = r_1^* + j x_1^*$$

und den mit der Schlüpfung s veränderlichen Teilen

$$\mathfrak{z}_{2s} = R_{2s} + j X_{2s}$$

zusammen, diese wieder nach 23) aus den Scheinwiderständen

$$\mathfrak{z}_{2s} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + j x_2$$

und

$$\mathfrak{z}_{3s}^* = r_{3s}^* + j x_{3s}^* = \frac{\mathfrak{z}_b \mathfrak{z}_{3s}}{\mathfrak{z}_b + \mathfrak{z}_{3s}} \quad (33)$$

Wenn wir die konstanten von den mit der Schlüpfung veränderlichen Teilen trennen, erhalten wir

$$\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s} = r_1^* + j(x_1^* + x_2) + \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* + j x_{3s}^* \quad (34)$$

In Abb. 7 ist dies dargestellt und zwar ist zunächst

$$\overline{O'o_2} = \mathfrak{z}_1^* = r_1^* + j x_1^*$$

und

$$\overline{o_2 o_3} = x_2.$$

Der geometrische Ort des Scheinwiderstandes $\mathfrak{z}_{3s}^* = r_{3s}^* + j x_{3s}^*$, der sich am einfachsten aus der Zerlegung

$$\mathfrak{z}_{3s}^* = \mathfrak{z}_b - \frac{\mathfrak{z}_b^2}{\mathfrak{z}_b + \mathfrak{z}_{3s}} = j x_b + \frac{x_b^2}{\frac{r_{3t}}{s} + j(x_b + x_3)} \quad (35)$$

ergibt, ist in dem Koordinatensystem $(u_3 v_3) \parallel (u'v')$ der Abb. 7 spiegelbildlich zur Darstellung gebracht. Für $s = 0$ wird

$$\mathfrak{z}_{30}^* = j x_b = \overline{o_3 p_{g0}} \quad (36)$$

Zu $\overline{o_3 p_{g0}}$ ist der Scheinwiderstand

$$\overline{p_{g0} p_g} = \frac{x_b^2}{\frac{r_{3t}}{s} + j(x_b + x_3)} \quad (37)$$

zu addieren, der bei veränderlicher Schlüpfung einen Kreis k_g mit dem Durchmesser

$$2 r_g = \frac{x_b^2}{x_b + x_3} \quad (\text{aus 37) zu ersehen}) \quad (38)$$

beschreibt; der Mittelpunkt m_g dieses Kreises liegt auf der u_3 -Achse und hat vom Ursprung o_3 den Abstand

$$\overline{o_3 m_g} = \overline{o_3 p_{g0}} - r_g = x_b - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_b^2}{x_b + x_3} \quad (39)$$

Aus 37) geht hervor, daß für einen beliebigen Punkt p_g des Kreises die Beziehung

$$\operatorname{tg} \angle (p_g p_{g0} o_3) = \frac{\frac{r_{3t}}{s}}{x_b + x_3} \quad (40)$$

gilt, welche die Ermittlung der den verschiedenen Schlüpfungswerten entsprechenden Kreispunkte ermöglicht. Für $s = 1$ (Stillstand) ist

$$\operatorname{tg} \angle (p_g s t p_{g0} o_3) = \frac{r_{3t}}{x_b + x_3}; \quad (41)$$

der der Schlüpfung $s = \pm \infty$ entsprechende Punkt $p_{g\infty}$ fällt wie p_{g0} in die u_3 -Achse.

Die auf $(u_3 v_3)$ bezogenen Ordinaten der Punkte p_g stellen die Wirkwiderstände r_{3s} , ihre Abszissen die Blindwiderstände x_{3s} dar. Um den geometrischen Ort der Scheinwiderstände $\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s}$ zu erhalten, sind nach 34) noch die mit der Schlüpfung veränderlichen Wirkwiderstände

$$\overline{p_g p} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} \quad (42)$$

von den Kreispunkten p_g parallel zur v -Achse aufzutragen. Die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte p stellt, auf $(u' v')$ bezogen, das Spiegelbild des geometrischen Ortes der Scheinwiderstände $\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s}$ dar (im folgenden $(\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s})$ -Kurve genannt).

Vom Punkte p_{g0} ($s = 0$) ist der Wirkwiderstand $\overline{p_{g0} p_0} = \frac{r_2}{\beta}$ und vom Punkte p_{gst} ($s = 1$) der Wirkwiderstand $\overline{p_{gst} p_{st}} = r_2$ aufzutragen. Für $s = \pm \infty$ wird $\overline{p_{g\infty} p_{\infty}} = 0$, d. h. der Punkt p_{∞} der $(\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s})$ -Kurve fällt mit dem Punkte $p_{g\infty}$ des Kreises k_g zusammen.

Für $s = -\frac{\beta}{\alpha}$ (Synchronismus der vorderen Maschine) wird $\alpha s + \beta = 0$ und der Wirkwiderstand $\frac{r_2}{\alpha s + \beta}$ unendlich groß; die in Abb. 7 durch den dieser Schlüpfung entsprechenden Kreispunkt $p_g(-\frac{\beta}{\alpha})$ gezogene Parallele zur v -Achse ist eine Asymptote der $(\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s})$ -Kurve.

Die $(\tilde{z}_1^* + \tilde{z}_{2s})$ -Kurve besitzt weiters einen Doppelpunkt p_d , welcher zwei Schlüpfungswerten $\pm s_d$ entspricht; für die ihn bestimmenden Scheinwiderstände gilt die Bedingung

$$\tilde{z}_2(+s_d) + \tilde{z}_3(+s_d) = \tilde{z}_2(-s_d) + \tilde{z}_3(-s_d).$$

Nach Einführung der komplexen Ausdrücke für die Scheinwiderstände $\tilde{z}_{2s}$ und $\tilde{z}_{3s}^*$, wobei letzterer nach 35) zerlegt wird, ergibt sich

$$\frac{r_2}{\alpha s + \beta} + j x_2 + j x_b + \frac{x_b^2}{\frac{r_{3t}}{s_d} + j(x_b + x_3)} = \frac{r_2}{-\alpha s_d + \beta} + j x_2 + j x_b + \frac{x_b^2}{-\frac{r_{3t}}{s_d} + j(x_b + x_3)}$$

und daraus

$$s_d = \pm \sqrt{\frac{\frac{\beta^2}{\alpha} \cdot x_b^2 - r_2 r_{3t}}{\alpha x_b^2 + \frac{r_2}{r_{3t}} \cdot (x_b + x_3)^2}} \quad (43)$$

Die Punkte des Kreises k_g , welche kleinen Schlüpfungswerten entsprechen, erfüllen verhältnismäßig große Teile des Kreisumfangs zu beiden Seiten des Punktes p_{g0} . Dies hat zur Folge, daß sich die Werte der von den Punkten p_g aufzutragenden

Wirkwiderstände $\frac{r_2}{\alpha s + \beta}$ auf diesen Teilen des Kreises nur wenig von dem Werte $\frac{r_2}{\beta}$ für $s = 0$ unterscheiden; die $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve wird sich daher in der Umgebung ihres Synchronismuspunktes p_0 dem Kreise k_n mit dem Mittelpunkte m_n nähern, welcher durch Verschiebung des Kreises k_g parallel zur v -Achse um die Strecke $\frac{r_2}{\beta}$ erhalten werden kann. Wie aus Abb. 7 zu ersehen ist, schließt dieser Kreis die sich beiderseits des Synchronismuspunktes p_0 bis zum Doppelpunkte p_d erstreckenden Teile der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve ein.

Durch Inversion der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve in bezug auf den Pol O' , wobei die erhaltenen Leitwerte nach 32) im Verhältnis $\frac{1}{C_1^2}$ zu reduzieren sind, ergibt sich der geometrische Ort der Scheinleitwerte $\mathfrak{Y}_s$ bei veränderlicher Schlüpfung, welcher auf (u, v) bezogen das gesuchte Leitwertdiagramm der Kaskadenschaltung darstellt. In Abb. 7 ist nur ein Punkt P dieses Diagramms eingetragen, welcher aus dem entsprechenden Punkte der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve durch Inversion nach 32) abgeleitet zu denken ist, so daß

$$\overline{O'P} = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\overline{O'P}}. \quad (44)$$

Das vorstehend beschriebene Verfahren für die Ermittlung des Kaskadendiagramms kann dadurch vereinfacht werden, daß direkt die Konstruktion der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve in bezug auf den Punkt O' als Pol inversiert wird; bei der Inversion ist das in 32) auftretende Reduktionsverhältnis $\frac{1}{C_1^2}$ zu berücksichtigen.

Die Punkte der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve wurden durch Auftragen der Strecken $\overline{p_g p} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta}$ von den Punkten p_g des Kreises k_g auf Parallelen zur v -Achse erhalten. Wir denken uns nun in Abb. 7 zunächst den genannten Kreis in bezug auf den Pol O' mit Berücksichtigung des Reduktionsverhältnisses $\frac{1}{C_1^2}$ inversiert, wobei wir den Leitwertkreis K_g mit dem Mittelpunkte M_g erhalten. Die direkte Konstruktion dieses Kreises, der als „Grundkreis des Kaskadendiagramms“ bezeichnet werden möge, wird in den Abschnitten 6 und 7 gezeigt werden.

Die Punkte P_g des Grundkreises entsprechen den Punkten p_g des Kreises k_g . Die durch die Punkte p_g gezogenen Parallelen zur v -Achse gehen bei der in Rede stehenden Inversion in Kreise über, welche durch die Punkte P_g des Grundkreises und den Pol O' gehen und deren Mittelpunkte M_h auf der u -Achse liegen. Auf diesen „Hilfskreisen“ liegen daher auch die den Punkten p der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve entsprechenden Punkte P des Kaskadendiagramms.

Nach Abb. 7 ist

$$\operatorname{tg} \angle (P O' u) = \operatorname{tg} \angle (p O' u) = \frac{r_1^* + r_{3s}^*}{x_1^* + X_{2s}} + \frac{\frac{r_2}{\alpha s + \beta}}{x_1^* + X_{2s}};$$

da

$$\operatorname{tg} \angle (P_g O' u) = \operatorname{tg} \angle (p_g O' u) = \frac{r_1^* + r_{3s}^*}{x_1^* + X_{2s}},$$

ist auch

$$\operatorname{tg} \angle (P O' u) = \operatorname{tg} \angle (P_g O' u) + \frac{\frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{x_1^* + X_{2s}}{\alpha s + \beta}}{r_2}$$

Wenn wir Zähler und Nenner des Bruchausdruckes mit dem Verhältnis $\frac{I}{C_1^2}$ multiplizieren und dann

$$\frac{\frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{x_1^* + X_{2s}}{\alpha s + \beta}}{\frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{1}{r_2}} = \operatorname{tg} \psi_s \quad (45)$$

setzen, wird

$$\operatorname{tg} \angle (P O' u) = \operatorname{tg} \angle (P_g O' u) + \operatorname{tg} \psi_s \quad (46)$$

In dieser Beziehung ist bei gegebenem Grundkreis $\operatorname{tg} \angle (P_g O' u)$ bekannt, während sich $\operatorname{tg} \psi_s$ nach 45) ermitteln läßt. Wie aus Abb. 7 zu ersehen ist, entspricht der Blindwiderstand $x_1^* + X_{2s}$ dem Abstand der durch die Punkte p_g des Kreises k_g gezogenen Parallelen zur v' -Achse vom Ursprung O' ; es stellen daher die Blindleitwerte

$$\frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{1}{x_1^* + X_{2s}} = 2 R_h \quad (47)$$

die Durchmesser der Hilfskreise dar, in welche diese Parallelen bei der mit Berücksichtigung des Reduktionsverhältnisses $\frac{I}{C_1^2}$ durchgeführten Inversion übergehen.

Wenn wir nun durch einen beliebigen Punkt P_g des Grundkreises den Hilfskreis ziehen und seinen Halbmesser R_h in dem der Schlüpfung s des Punktes P_g entsprechenden Abstand

$$\frac{I}{2 C_1^2} \cdot \frac{\alpha s + \beta}{r_2} \quad (48)$$

senkrecht zur u' -Achse auftragen, so ist die Verbindungsgerade des erhaltenen Punktes ψ mit O' nach 45) unter dem $\angle \psi_s$ gegen die u' -Achse geneigt. Im gleichen Maßstabe mißt der Abschnitt $\pi_g u'_s$ dieser Senkrechten zwischen der Verbindungsgeraden $O' P_g$ und der u' -Achse $\operatorname{tg} \angle (P_g O' u)$. Tragen wir daher vom Punkte π_g den Halbmesser $R_h = \overline{\pi_g \pi}$ des Hilfskreises auf, so ist die Strecke $\overline{\pi u'_s}$ nach 46) $\operatorname{tg} \angle (P O' u)$ proportional. Im Schnitte der Verbindungsgeraden $O' \pi$ mit dem Hilfskreis ergibt sich schließlich der der betreffenden Schlüpfung entsprechende Punkt P des Kaskadendiagramms. — Die Punkte u'_s stellen auf der u' -Achse eine lineare Schlüpfungsskala dar und lassen sich daher leicht eintragen.

5. Beziehungen für das Stromdiagramm der Kaskadenschaltung.

Bevor wir auf die direkte Konstruktion des Grundkreises eingehen, wollen wir aus Abb. 7 einige wichtige Beziehungen für das Stromdiagramm der Kaskadenschaltung ableiten, welche die graphische Darstellung der Drehmomente ermöglichen.

Wenn die Scheinleitwerte $\mathfrak{Y}_s$ mit der als konstant vorausgesetzten primären Klemmenspannung $\mathfrak{P}_1$ multipliziert werden, ergeben sich die primären Stromaufnahmen der Kaskadenschaltung; es kann aber auch direkt das Leitwertdiagramm als Stromdiagramm für konstante primäre Klemmenspannung angesehen werden, wenn die Strecken desselben in einem dieser Spannung entsprechenden Strommaßstabe gemessen werden. Die auf diesen Fall bezug habenden Größen sollen durch den unteren Zeiger „Strom“ unterschieden werden.

Im Stromdiagramm stellen die Vektoren

$$\overline{OP}_{\text{Strom}} = \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Y}_s \quad (49)$$

die Primärströme dar, welche mit dem in die Richtung der pos. v-Achse fallenden Vektor der primären Klemmenspannung die primären Phasenwinkel $\varphi_1 = \angle(POv)$ einschließen. Die primäre elektrische Leistung der Kaskadenschaltung

$$W_1 = P_1 I_1 \cos \varphi_1$$

wird durch die auf (u v) bezogenen Ordinaten

$$v(P)_{\text{Strom}} = I_1 \cos \varphi_1$$

der Punkte P des Stromdiagramms im Maßstabe $\frac{W_1}{P_1}$ gemessen.

Es soll nun untersucht werden, welche Bedeutung die Vektoren

$$\overline{O'P}_{\text{Strom}} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Y}'_s \quad (\text{siehe 26 a}) \quad (50)$$

im Stromdiagramm der Kaskadenschaltung besitzen.

Nach Abb. 5 a ist das Verhältnis zwischen dem Sekundär- und Primärstrom der Kaskadenschaltung

$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_{2s}}; \quad (51)$$

da nach 49) und 24)

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Y}_s = \mathfrak{P}_1 \cdot \frac{\mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_{2s}}{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_{2s} + \mathfrak{z}_a \mathfrak{z}_{2s}}, \quad (49 a)$$

wird

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1 \cdot \frac{\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_{2s}} = \mathfrak{P}_1 \cdot \frac{\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_{2s} + \mathfrak{z}_a \mathfrak{z}_{2s}}. \quad (52)$$

Der vorstehende Ausdruck kann nach Einführung des vektoriellen Verhältnisses $\mathfrak{C}_1$ (27) und des Scheinwiderstandes $\mathfrak{z}_1^*$ (28) in der Form

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_1} \cdot \frac{I}{\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}} \quad (52 a)$$

geschrieben werden; wenn wir hierin nach 26 a)

$$\frac{I}{\mathfrak{C}_1} \cdot \frac{I}{\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}} = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{Y}'_s$$

setzen, wird

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{Y}'_s. \quad (52 b)$$

Aus 52 b) und 50) folgt die Beziehung

$$\overline{O'P}_{\text{Strom}} = \frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{C}_1}. \quad (50 a)$$

Da das vektorielle Verhältnis $\mathfrak{C}_1$ konstant ist, sind die Vektoren $\overline{O'P}$ den Sekundärströmen $\mathfrak{J}_2$ der Kaskadenschaltung proportional.

Aus 52 a) ergibt sich der Betrag des Sekundärstromes zu

$$I_2 = \frac{P_1}{C_1} \cdot \frac{I}{\sqrt{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}}. \quad (53)$$

Schließlich wollen wir noch untersuchen, welche Bedeutung die Abschnitte $\overline{Pa}$, $\overline{ab}$ und $\overline{Pb}$ (siehe Abb. 7) der auf (u' v') bezogenen Ordinaten $v'(P)$ der Punkte P im Stromdiagramm der Kaskadenschaltung besitzen. Die Punkte a liegen auf den Verbindungsgeraden des Punktes O' mit den Fußpunkten f_g der auf ($u_g v_g$) bezogenen Ordinaten der Punkte p_g des Kreises k_g , die Punkte b auf den Verbindungsgeraden $O'P_g$.

Nach Abb. 7 besteht die Proportion

$$\overline{P_{a\text{Strom}}} : \overline{O'P_{\text{Strom}}} = \overline{p f_3} (= R_{2s}) : \overline{O'p}.$$

Aus der Beziehung

$$\overline{O'P_{\text{Strom}}} = \frac{P_1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\overline{O'p}} = \frac{I_2}{C_1} \quad (44 \text{ und } 50a)$$

ergibt sich

$$\overline{O'p} = \frac{P_1}{C_1 I_2}$$

und damit

$$\overline{P_{a\text{Strom}}} = \frac{I_2^2 R_{2s}}{P_1} \quad (54)$$

Für die Abschnitte $\overline{ab_{\text{Strom}}}$ und $\overline{Pb_{\text{Strom}}}$ ergeben sich auf eine ähnliche Weise die Beziehungen

$$\overline{ab_{\text{Strom}}} = \frac{I_2^2 r_{3s}^*}{P_1} \quad (55)$$

bzw.

$$\overline{Pb_{\text{Strom}}} = \frac{I_2^2 \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta}}{P_1} \quad (56)$$

Die Abschnitte $\overline{Pa_{\text{Strom}}}$, $\overline{ab_{\text{Strom}}}$ und $\overline{Pb_{\text{Strom}}}$ messen demnach im Stromdiagramm der Kaskadenschaltung die Leistungen $I_2^2 R_{2s}$, $I_2^2 r_{3s}^*$ bzw. $I_2^2 \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta}$ in demselben Maßstabe wie die auf (uv) bezogenen Ordinaten $v(P)_{\text{Strom}}$ der Punkte P die primäre elektrische Leistung W_1 ; dieses Ergebnis wird bei der Darstellung der Drehmomente der Kaskadenschaltung (Abschnitt 8) verwendet werden.

6. Direkte Konstruktion des Grundkreises.

Wenn wir in 26a) für den zusammengefaßten Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}_{2s}$ den Ausdruck 23) einführen und

$$\mathfrak{Z}_1^* + \mathfrak{Z}_{2s} = \mathfrak{Z}_{II s} \quad (57)$$

setzen, erhalten wir

$$\mathfrak{Y}_s = \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_b + \mathfrak{Z}_{3s}^*}{\mathfrak{Z}_{II s} \mathfrak{Z}_b + \mathfrak{Z}_{II s} \mathfrak{Z}_{3s} + \mathfrak{Z}_b \mathfrak{Z}_{3s}^*}, \quad (58)$$

mit Einführung des vektoriellen Verhältnisses

$$\mathfrak{D}_{II s} = D_{II s} e^{-j\delta_{II s}} = \frac{\mathfrak{Z}_{II s} + \mathfrak{Z}_b}{\mathfrak{Z}_b} \quad (59)$$

und des Scheinwiderstandes

$$\mathfrak{Z}_{II s}^* = \frac{\mathfrak{Z}_{II s}}{\mathfrak{D}_{II s}} \quad (60)$$

läßt sich $\mathfrak{Y}_s$ in ähnlicher Weise wie früher $\mathfrak{Y}_s$ (siehe 24) bis 28) und 24a) in zwei Summanden zerlegen:

$$\mathfrak{Y}_s = \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_{II s} + \mathfrak{Z}_b} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{D}_{II s}^*} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_{II s}^* + \mathfrak{Z}_{3s}^*} \quad (61)$$

Der resultierende Scheinleitwert der Kaskadenschaltung ist dann

$$\mathfrak{Y}_s = \frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_a} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_{II s} + \mathfrak{Z}_b} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{D}_{II s}^*} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_{II s}^* + \mathfrak{Z}_{3s}^*} \quad (62)$$

Für den Grundkreis ist $\frac{r_2}{\alpha s + \beta} = 0$; es sind daher die in 57) und 60) eingeführten Scheinwiderstände $\mathfrak{Z}_{II s}$ und $\mathfrak{Z}_{II s}^*$ sowie das vektorielle Verhältnis $\mathfrak{D}_{II s}$ (59) für den Grundkreis konstant, was durch Weglassung des Zeigers s hervorgehoben werden soll ($\mathfrak{Z}_{II}$, $\mathfrak{Z}_{II}^*$, $\mathfrak{D}_{II} = D_{II} e^{-j\delta_{II}}$).

Wenn wir diese Größen in 62) einführen, erhalten wir den dem Grundkreis entsprechenden Scheinleitwert

$$\mathfrak{Y}_s \left(\frac{r_2}{\alpha s + \beta} = 0 \right) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_a} + \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\beta_{II} + \beta_b} + \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2} \cdot \frac{1}{\beta_{II}^* + \beta_{3s}}, \quad (63)$$

welcher auch in der Form

$$\mathfrak{Y}_s \left(\frac{r_2}{\alpha s + \beta} = 0 \right) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_a} + \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{(\beta_{II} + \beta_b) e^{-j\delta_{II} \gamma_1}} + \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2} \cdot \frac{1}{(\beta_{II}^* + \beta_{3s}) e^{-j(\delta_{II} \gamma_1 + 2\delta_{II})}}. \quad (63a)$$

Diese Gleichung ermöglicht nun, wie in Abb. 8 gezeigt, die direkte Konstruktion des Grundkreises, auf dem in weiterer Folge das Kaskadendiagramm aufgebaut werden kann. Dabei wurden folgende Widerstands- und Polpaarzahlverhältnisse zugrunde gelegt:

$$\begin{array}{llll} r_1 = 0.8 & r_a = 8 & r_2 = 2 & r_{3t} = 1.2 \\ x_1 = 1.6 & x_a = 40 & x_2 = 4 & x_b = 60 & x_3 = 2.4 \\ \alpha = \frac{3}{5} & & & & \\ \beta = \frac{2}{5} & & & & \end{array}$$

Das erste Glied von 63a) ist nach früherem der Scheinleitwert $\mathfrak{Y} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)$ der

Kaskadenschaltung für die Schlüpfung $s = -\frac{\beta}{\alpha}$, welche dem Fall entspricht, daß der Läufer der vorderen Maschine synchron mit ihrem Drehfelde rotiert. In dem Koordinatensystem (u v) der Abb. 8 wird dieser Leitwert durch die Strecke $\overline{OO'}$ dargestellt. Die auf (u v) bezogenen Koordinaten des Punktes $O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}}$ sind

Abb. 8.

$$\left. \begin{aligned} v \left(O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}} \right) &= \frac{r_1 + r_a}{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2} = 0,0049 \text{ L. E.,} \\ u \left(O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}} \right) &= \frac{x_1 + x_a}{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2} = 0,023 \text{ L. E.} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

(Leitwertseinheiten)

Durch den Punkt $O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}}$ als Ursprung legen wir das uns schon bekannte Achsensystem ($u'v'$), welches gegen (uv) um den Winkel $2\gamma_1$ entgegen dem Uhrzeigersinne verdreht ist; der einfache Winkel γ_1 läßt sich aus dem nach 29) für

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{x_a}{r_a} \cdot \frac{x_1 + x_a}{r_1 + r_a}}{1 + \frac{x_a}{r_a} \cdot \frac{x_1 + x_a}{r_1 + r_a}} = \frac{1}{90,9} \quad (65)$$

errechneten Zahlenverhältnis ermitteln. Es bietet gewisse Vorteile, wenn die graphische Darstellung so gestaltet wird, daß die u' -Achse horizontal und die v' -Achse vertikal in die Zeichenebene zu liegen kommt.

Wenn wir den dem zweiten Gliede von 63a) entsprechenden Scheinleitwert

$$\overline{O'O''} = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{(\beta_{II} + \beta_b) e^{-j 2 \gamma_1}} \quad (66)$$

auf ($u'v'$) beziehen, entfällt das Drehglied $e^{-j 2 \gamma_1}$, so daß

$$\overline{O'O''}_{(u'v')} = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\beta_{II} + \beta_b} = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^* + j(x_1^* + x_2 + x_b)}; \quad (67)$$

dabei ist nach 27 b)

$$C_1^2 = \frac{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2}{z_a^2} = 1,087 \quad (68)$$

und nach 30a)

$$\left. \begin{aligned} r_1^* &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \left[r_1 + r_a \left(\frac{z_1}{z_a} \right)^2 \right] = 0,75 \text{ W. E.} \\ x_1^* &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \left[x_1 + x_a \left(\frac{z_1}{z_a} \right)^2 \right] = 1,544 \text{ W. E.} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

(Widerstandseinheiten)

Aus 67) ergeben sich die auf ($u'v'$) bezogenen Koordinaten des Punktes O'' zu

$$\left. \begin{aligned} v'(O'') &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{r_1^*}{(r_1^*)^2 + (x_1^* + x_2 + x_b)^2} = 0,00016 \text{ L. E.,} \\ u'(O'') &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{x_1^* + x_2 + x_b}{(r_1^*)^2 + (x_1^* + x_2 + x_b)^2} = 0,014 \text{ L. E.} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Der geometrische Ort des dem dritten Gliede von 63a) entsprechenden Scheinleitwertes

$$\mathfrak{Y}_s \left(\frac{r_2}{\alpha_s + \beta} = 0 \right) = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2} \cdot \frac{1}{(\beta_{II}^* + \beta_{3s}) e^{-j(2\gamma_1 + 2\delta_{II})}} \quad (71)$$

kann durch Inversion aus dem geometrischen Orte des Scheinwiderstandes $(\beta_{II}^* + \beta_{3s}) e^{-j(2\gamma_1 + 2\delta_{II})}$ abgeleitet werden, wobei die erhaltenen Scheinleitwerte im Verhältnis $\frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2}$ zu reduzieren sind.

Das vektorielle Verhältnis

$$\mathfrak{D}_{II} = D_{II} e^{-j \delta_{II}} = \frac{\beta_{II} + \beta_b}{\beta_b} \quad (72)$$

wird durch die Scheinwiderstände $\mathfrak{z}_{II} + \mathfrak{z}_b$ (wobei $\mathfrak{z}_{II} = \mathfrak{z}_I^* + j x_2$) und $\mathfrak{z}_b = j x_b$ in ähnlicher Weise bestimmt, wie $\mathfrak{C}_1 = C_1 e^{-j \gamma_1}$ durch $(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_a)$ und $\mathfrak{z}_a$; desgleichen besteht zwischen den Scheinwiderständen

$$\mathfrak{z}_{II}^* = \frac{\mathfrak{z}_{II}}{\mathfrak{D}_{II}} \quad (73)$$

und $\mathfrak{z}_1^* = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{C}_1}$ eine Analogie. Dementsprechend ergeben sich die auf diese Größen bezug habenden Ausdrücke

$$\operatorname{tg} \delta_{II} = \frac{r_1^*}{x_1^* + x_2 + x_b} = \frac{1}{87,3}, \quad (74)$$

$$D_{II}^2 = \frac{(r_1^*)^2 + (x_1^* + x_2 + x_b)^2}{x_b^2} = 1,193, \quad (72 a)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{II}^* &= \frac{r_1^*}{D_{II}^2} = 0,629 \text{ W. E.}, \\ x_{II}^* &= \frac{1}{D_{II}^2} \cdot \left[x_1^* + x_2 + x_b \left(\frac{z_{II}}{x_b} \right)^2 \right] = 5,085 \text{ W. E.}; \quad z_{II}^* = (r_1^*)^2 + (x_1^* + x_2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Wir führen nun in Abb. 8 ein neues Koordinatensystem ($u'' v''$) mit O'' als Ursprung ein, welches gegen ($u' v'$) um den Winkel $2 \delta_{II}$, gegen ($u v$) daher um den Winkel $(2 \gamma_1 + 2 \delta_{II})$ entgegen dem Uhrzeigersinne verdreht ist, und tragen in dasselbe die gespiegelten Scheinwiderstände

$$(\mathfrak{z}_{II}^* + \mathfrak{z}_{3s}) = r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s} + j(x_{II}^* + x_3)$$

ein; auf ($u v$) bezogen, stellen diese Vektoren die gespiegelten Scheinwiderstände $(\mathfrak{z}_{II}^* + \mathfrak{z}_{3s}) e^{-j(2 \gamma_1 + 2 \delta_{II})}$ dar.

Bei veränderlicher Schlüpfung s beschreibt der Endpunkt p_g'' der genannten Vektoren eine Gerade g'' , welche im Abstand

$$\overline{O'' f''} = x_{II}^* + x_3 = 7,485 \text{ W. E.} \quad (76)$$

von O'' parallel zur v'' -Achse verläuft. Die den einzelnen Schlüpfungswerten entsprechenden Punkte dieser Geraden werden durch Auftragen der Strecken

$$\overline{f'' p_{g\infty}''} + \overline{p_{g\infty}'' p_g''} = r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s} \quad (77)$$

erhalten. Für $s = 0$ wird $\frac{r_{3t}}{s} = \infty$; diesem Schlüpfungswert entspricht der unendlich ferne Punkt der Geraden g'' . Der der Schlüpfung $s = 1$ (Stillstand) entsprechende Punkt p_{gst}'' ergibt sich durch Auftragen der Strecke

$$\overline{p_{g\infty}'' p_{gst}''} = r_{3t} = 1 \cdot 2 \text{ W. E.}; \quad (78)$$

der Punkt $p_{g\infty}''$ selbst entspricht den Schlüpfungswerten $\pm \infty$, da hierfür $\frac{r_{3t}}{s} = 0$ wird.

Durch Inversion der im Abstände $x_{II}^* + x_3$ von O'' parallel zur v'' -Achse verlaufenden Geraden g'' in bezug auf den Pol O'' ergibt sich bei dem zu berücksichtigenden Reduktionsverhältnis $\frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2}$ ein Kreis mit dem Durchmesser

$$2 R_g = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{D_{II}^2} \cdot \frac{1}{x_{II}^* + x_3} = 0,1032 \text{ L. E.}, \quad (79)$$

welcher durch den Pol O'' geht und dessen Mittelpunkt M_g auf der u'' -Achse liegt. Dieser Kreis stellt, auf ($u v$) bezogen, den geometrischen Ort der Scheinleitwerte $\mathfrak{Y}_s \left(\frac{r_s}{\alpha s + \beta} = 0 \right)$ und damit den gesuchten Grundkreis K_g des Kaskadendiagramms

dar. Die Verbindungsgeraden $\overline{O''p_g''}$ schneiden den Kreis in Punkten P_g , wobei die Vektoren $\overline{O''P_g}$ auf (uv) bezogen, die den Schlüpfungswerten der Punkte p_g'' entsprechenden Scheinleitwerte $\mathfrak{Y}_s'' \left(\frac{r_2}{\alpha s + \beta} = 0 \right)$ darstellen. Für die besonderen

Schlüpfungswerte $s = 0, 1$ und $\pm \infty$ ergeben sich auf diese Weise die Kreispunkte $P_{g0} \equiv O''$, P_{gSt} und $P_{g\infty}$, aus welchen sich mit Hilfe der in Abb. 8 gezeichneten Schlüpfungsgeraden g_s , die allen anderen Schlüpfungswerten entsprechenden Kreispunkte ermitteln lassen.

Werden die Leitwertvektoren $\overline{O''P_g}$ auf das gegen (uv) um den Winkel $2\gamma_1 + 2\delta_{II}$ entgegen dem Uhrzeigersinne verdrehte Koordinatensystem $(u''v'')$ bezogen, so entfällt das Drehglied $e^{-j(2\gamma_1 + 2\delta_{II})}$ in 71) und es ist

$$\overline{O''P_g(u''v'')} = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{D_{II}^2} \cdot \frac{I}{\mathfrak{g}_{II}^* + \mathfrak{g}_{3s}} = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{D_{II}^2} \cdot \frac{I}{\left(r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s} \right) + j(x_{II}^* + x_3)}; \quad 80)$$

aus dieser Gleichung ergeben sich die auf $(u''v'')$ bezogenen Koordinaten der Punkte P_g des Grundkreises zu

$$\left. \begin{aligned} v''(P_g) &= \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{D_{II}^2} \cdot \frac{r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s}}{\left(r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + (x_{II}^* + x_3)^2}, \\ u''(P_g) &= \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{D_{II}^2} \cdot \frac{x_{II}^* + x_3}{\left(r_{II}^* + \frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + (x_{II}^* + x_3)^2}. \end{aligned} \right\} \quad 81)$$

Für $s = 1$ bzw. $s = \pm \infty$ resultieren aus diesen Ausdrücken die auf $(u''v'')$ bezogenen Koordinaten der Punkte P_{gSt} und $P_{g\infty}$ des Grundkreises.

Konstruktion des Kaskadendiagramms.

Auf dem Grundkreise K_g läßt sich nach dem im Abschnitt 4 angegebenen Verfahren das Kaskadendiagramm punktweise aufbauen. Wir tragen zu diesem Behuf auf der u' -Achse die lineare Schlüpfungsskala

$$\overline{O'u'_s} = \frac{I}{2C_1^2} \cdot \frac{\alpha s + \beta}{r_2} \quad 82)$$

auf. Dem Schlüpfungswert $s = 0$ entspricht der Abstand

$$\overline{O'u'_0} = \frac{I}{2C_1^2} \cdot \frac{\beta}{r_2} = 0,0921 \text{ L. E.}, \quad 82a)$$

der Schlüpfung $s = 1$ der Abstand

$$\overline{O'u'_{St}} = \frac{I}{2C_1^2} \cdot \frac{I}{r_2} = 0,23 \text{ L. E.} \quad 82b)$$

Für $s = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2}{3}$ wird $\alpha s + \beta = 0$; der diesem Werte entsprechende Punkt der Schlüpfungsskala fällt mit O' zusammen.

Um aus einem beliebigen Punkte P_g des Grundkreises, welcher dem auf der Geraden g_s abzulesenden Schlüpfungswert s entspricht, den Punkt P des Kaskadendiagramms für die gleiche Schlüpfung abzuleiten, gehen wir folgendermaßen vor. Wir ziehen den durch P_g bestimmten Hilfskreis, welcher durch den Punkt O'' geht und dessen Mittelpunkt M_h auf der u' -Achse liegt; ferner errichten wir in dem der Schlüpfung s entsprechenden Punkt u'_s der Schlüpfungsskala eine Senkrechte zur u' -Achse und bringen sie mit der Verbindungsgeraden $O'P_g$ zum Schnitte. Von

dem Schnittpunkte π_g tragen wir schließlich den Halbmesser $R_h(P_g) = \overline{\pi_g \pi}$ des früher gezeichneten Hilfskreises auf; es schneidet dann die Verbindungsgerade $O' \pi$ den Hilfskreis in dem gesuchten Punkte P des Kaskadendiagramms. Die Halbmesser der Hilfskreise sind von den Punkten π_g stets nach aufwärts aufzutragen. Für einzelne Punkte wird eine proportionale Verkleinerung oder Vergrößerung der angegebenen Konstruktion erforderlich sein.

In Abb. 8 ist P_o der Synchronismuspunkt ($s = 0$) und P_{St} der Stillstandspunkt ($s = 1$) des Kaskadendiagramms. Der den Schlüpfungswerten $s = \pm \infty$ entsprechende Punkt P_∞ desselben fällt mit dem Punkte $P_{g\infty}$ des Grundkreises zusammen. Der Punkt $O' \equiv P_{-\frac{\beta}{\alpha}}$ entspricht nach früherem der Schlüpfung $s = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Da die Hilfskreise den Grundkreis K_g in je zwei Punkten schneiden, welche den Schlüpfungswerten $\pm s$ entsprechen, liegen auch je zwei Punkte des Kaskadendiagramms auf einem Hilfskreise. Dabei ist zu beachten, daß in Abb. 8

$$\text{die Kurvenstücke} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{P_\infty \quad P_{St}} \\ \overbrace{P_{St} \quad P_o} \\ \overbrace{P_o \quad P_{-\frac{\beta}{\alpha}}} \\ \overbrace{P_{-\frac{\beta}{\alpha}} \quad P_\infty} \end{array} \right\} \text{ des Kaskadendiagramms} \quad \text{den Bögen} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{P_{g\infty} \quad P_{gSt}} \\ \overbrace{P_{gSt} \quad P_{go}} \\ \overbrace{P_{go} \quad P_{g(-\frac{\beta}{\alpha})}} \\ \overbrace{P_{g(-\frac{\beta}{\alpha})} \quad P_{g\infty}} \end{array} \right\}$$

des Grundkreises entsprechen. Diesem Umstand ist bei der Konstruktion des Diagramms eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen, um Verwechslungen zu vermeiden.

Geometrisch betrachtet stellt das Kaskadendiagramm eine Kurve vierter Ordnung dar. Sein Doppelpunkt P_d entspricht dem Doppelpunkt p_d der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve in Abb. 7. Für die beiden Schlüpfungswerte im Doppelpunkt ergeben sich bei den der Abb. 8 zugrundegelegten Widerstands- und Polpaarzahlverhältnissen aus 43) die Werte

$$s_d = \pm \sqrt{\frac{\frac{\beta^2}{\alpha} \cdot x_b^2 - r_2 r_{3t}}{\alpha x_b^2 + \frac{r_2}{r_{3t}} \cdot (x_b + x_3)^2}} = \pm 0,333, \quad (83)$$

welche die Bestimmung des Doppelpunktes ermöglichen.

Wenn die Vektoren $\overline{O'P}$ auf das gegen $(u'v')$ um den Winkel $2\gamma_1$ entgegen dem Uhrzeigersinne verdrehte Koordinatensystem $(u'v')$ bezogen werden, entfällt das Drehglied $e^{-j2\gamma_1}$ in 32) und es ist

$$\overline{O'P}_{(u'v')} = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{\beta_1^* + \beta_{2s}} = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{I}{(r_1^* + R_{2s}) + j(x_1^* + X_{2s})}. \quad (84)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die auf $(u'v')$ bezogenen Koordinaten der Punkte P zu

$$\left. \begin{array}{l} v'(P) = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{r_1^* + R_{2s}}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}, \\ u'(P) = \frac{I}{C_1^2} \cdot \frac{x_1^* + X_{2s}}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}. \end{array} \right\} \quad (85)$$

R_{2s} und X_{2s} sind die Komponenten des Scheinwiderstandes $\mathfrak{Z}_{2s}$, welcher sich nach 23) aus den Scheinwiderständen

$$\mathfrak{Z}_{2s} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + j x_2$$

und

$$\mathfrak{Z}_{3s}^* = r_{3s}^* + j x_{3s}^* = \frac{\mathfrak{Z}_b \mathfrak{Z}_{3s}}{\mathfrak{Z}_b + \mathfrak{Z}_{3s}}$$

zusammensetzt; letzterer läßt sich nach Einführung des mit der Schlüpfung veränderlichen vektoriellen Verhältnisses

$$\mathfrak{D}_{3s} = \frac{\mathfrak{Z}_b + \mathfrak{Z}_{3s}}{\mathfrak{Z}_b} \quad (86)$$

auch in der Form

$$\mathfrak{Z}_{3s}^* = \frac{\mathfrak{Z}_{3s}}{\mathfrak{D}_{3s}} \quad (87)$$

schreiben. Die Komponenten von $\mathfrak{Z}_{3s}^*$ sind

$$\left. \begin{aligned} r_{3s}^* &= \frac{1}{D_{3s}^2} \cdot \frac{r_{3t}}{s}, \\ x_{3s}^* &= \frac{1}{D_{3s}^2} \cdot \left[x_b \left(\frac{z_{3s}}{x_b} \right)^2 + x_3 \right]; \quad z_{3s}^2 = \left(\frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + x_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

wobei

$$D_{3s}^2 = \frac{\left(\frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + (x_b + x_3)^2}{x_b^2} \quad (89)$$

das Quadrat des Betrages von $\mathfrak{D}_{3s}$ bedeutet.

Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned} R_{2s} &= \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + \frac{1}{D_{3s}^2} \cdot \frac{r_{3t}}{s}, \\ X_{2s} &= x_2 + x_{3s}^* = x_2 + \frac{1}{D_{3s}^2} \cdot \left[x_b \left(\frac{z_{3s}}{x_b} \right)^2 + x_3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

7. Anderes Verfahren für die Ermittlung des Grundkreises.

Der Grundkreis K_g des Kaskadendiagramms läßt sich auch auf eine andere Weise ermitteln, welche in Abb. 9 dargestellt ist. Wir erinnern uns, daß der Kreis K_g durch Inversion aus dem in Abb. 7 gezeichneten Widerstandskreis k_g abgeleitet werden kann, wobei das Reduktionsverhältnis $\frac{1}{C_1^2}$ zu berücksichtigen ist (siehe Abschnitt 4). Wir wollen nun zunächst die beiden Tangenten des Kreises k_g parallel zur v -Achse samt ihren Berührungspunkten p_g und $p_{g\infty}$ invertieren, welche nach Abb. 7 von O die Abstände

$$u'(p_{g0}) = x_1^* + x_2 + x_b$$

bzw.

$$u'(p_{g\infty}) = u'(p_{g0}) - 2r_g = x_1^* + x_2 + \frac{x_b x_3}{x_b + x_3}$$

haben. Die Berührungspunkte p_{g0} und $p_{g\infty}$ liegen auf der u_3 -Achse, welche im Abstande

$$v'(m_g) = r_1^*$$

parallel zur u -Achse verläuft.

die Hilfskreise; sein Mittelpunkt M_g ist durch den Schnitt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_{g0}P_{g\infty}}$ mit der Verbindungsgeraden $P_{g\infty}M_{h\infty}$ bestimmt.

Um den der Schlüpfung $s = 1$ entsprechenden Punkt P_{gst} des Grundkreises zu ermitteln, tragen wir in Analogie zur Abb. 8 auf dem Mittelpunktssstrahle $P_{g0}M_g$ die Strecke

$$\overline{P_{g0}f''} = x_{11}^* + x_g$$

und senkrecht dazu

$$\overline{f''P_{g\infty}} + \overline{P_{g\infty}P_{gst}} = r_{11}^* + r_{3t}$$

auf. Die Verbindungsgerade $P_{g0}P_{gst}$ schneidet den Grundkreis im Punkte P_{gst} . Die Punkte P_{g0} , $P_{g\infty}$ und P_{gst} müssen bei richtiger Konstruktion auf einer Geraden liegen.

Bei der Besprechung der $(\beta_1^* + \beta_{2s})$ -Kurve im Abschnitte 4, Seite 11, wurde bemerkt, daß die sich beiderseits ihres Synchronismuspunktes p_0 bis zum Doppelpunkte p_d erstreckende Schleife derselben von dem in Abb. 7 gezeichneten Kreise k_n mit dem Mittelpunkte m_n eingeschlossen wird, welcher durch Verschiebung des Kreises k_g um den Betrag $\frac{r_2}{\beta}$ parallel zur v -Achse erhalten wurde. Die parallel zur v -Achse gezogenen Tangenten des Kreises k_g berühren den Kreis k_n in den Punkten p_0 und b_n . Es wird demnach auch die entsprechende Schleife der Kaskadenkurve von einem Kreise $K_n(P_0)$ eingeschlossen werden, welcher aus k_n durch Inversion in bezug auf den Pol O' abgeleitet werden kann. Es ist klar, daß der Kreis $K_n(P_0)$ die in Abb. 12 gezeichneten Hilfskreise K_{h0} und $K_{h\infty}$ berühren muß.

Für den Kreis $K_n(P_0)$ ergibt sich nach dieser Überlegung folgende Konstruktion. Wir ermitteln zunächst nach dem im Abschnitte 6, Seite 17, angegebenen Verfahren aus dem Punkte P_{g0} des Grundkreises den Synchronismuspunkt P_0 des Kaskadendiagramms (in welchem der Kreis $K_n(P_0)$ den Hilfskreis K_{h0} berührt), indem wir im Abstand

$$\overline{O'u_0} = \frac{1}{2C_1^2} \cdot \frac{\beta}{r_2} \quad (82a)$$

von O' eine Senkrechte zur u -Achse ziehen, sie mit der Verbindungsgeraden $O'P_{g0}$ zum Schnitte bringen und von dem Schnittpunkte π_{g0} den Halbmesser $R_{h0} = \overline{\pi_{g0}P_0}$ des Hilfskreises K_{h0} auftragen; die Verbindungsgerade $O'\pi_{g0}$ schneidet den Hilfskreis K_{h0} im Punkte P_0 . In ganz ähnlicher Weise läßt sich auch der Berührungspunkt B_n des gesuchten Kreises mit dem Hilfskreise $K_{h\infty}$ finden, wenn wir von dem Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $O'P_{g\infty}$ mit der früher gezogenen Senkrechten den Halbmesser $R_{h\infty}$ auftragen; die Verbindungsgerade des so erhaltenen Punktes mit O' schneidet den Hilfskreis im Punkte B_n . Der Mittelpunkt $M_n(P_0)$ des Kreises $K_n(P_0)$ ergibt sich schließlich im Schnitte der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_0B_n}$ mit der Verbindungsgeraden $B_nM_{h\infty}$. Der genannte Kreis schließt die sich beiderseits des Synchronismuspunktes P_0 bis zum Doppelpunkt P_d erstreckende Schleife der Kaskadenkurve ein.

Für eine rasche Orientierung über den Verlauf der Kaskadenkurve empfiehlt sich die Ermittlung des Doppelpunktes P_d , welcher aus den durch die Schlüpfungswerte $\pm s_d$ (83) bestimmten Punkten des Grundkreises abgeleitet werden kann. Der den Schlüpfungswerten $\pm \infty$ entsprechende Punkt P_∞ der Kaskadenkurve fällt mit dem Punkte P_{gs} des Grundkreises zusammen. Vom Punkte P_∞ an entfernt sich die Kurve vom Hilfskreise $K_{h\infty}$, passiert den Doppelpunkt P_d und nähert sich hierauf dem Kreise $K_n(P_0)$ bis zum Synchronismuspunkte P_0 . Im weiteren Verlaufe entfernt sich die Kurve wieder von dem Kreise $K_n(P_0)$, passiert ein zweites Mal den Doppelpunkt P_d und nähert sich schließlich dem Hilfskreise K_{h0} bis zum Punkte

Abb. 11a.

Abb. 11b.

Abb. 11c.

Die Komponenten von $\mathfrak{Z}_{2s}^*$ sind

$$\left. \begin{aligned} R_{2s}^* &= \frac{1}{C_{2s}^2} \cdot \left[r_a \left(\frac{Z_{2s}}{z_a} \right)^2 + R_{2s} \right], \\ X_{2s}^* &= \frac{1}{C_{2s}^2} \cdot \left[x_a \left(\frac{Z_{2s}}{z_a} \right)^2 + X_{2s} \right], \end{aligned} \right\} \quad 98)$$

wobei

$$C_{2s}^2 = \frac{(r_a + R_{2s})^2 + (x_a + X_{2s})^2}{z_a^2} \quad 99)$$

das Quadrat des Betrages von $\mathfrak{C}_{2s}$ darstellt.

Aus 97) ergeben sich die auf (u v) bezogenen Komponenten des Primärstromes, welche mit den Koordinaten der Punkte P des Stromdiagramms identisch sind, zu

$$\left. \begin{aligned} I_1 \cos \varphi_1 &= v(P)_{\text{Strom}} = P_1 \cdot \frac{r_1 + R_{2s}^*}{(r_1 + R_{2s}^*)^2 + (x_1 + X_{2s}^*)^2}, \\ I_1 \sin \varphi_1 &= u(P)_{\text{Strom}} = P_1 \cdot \frac{x_1 + X_{2s}^*}{(r_1 + R_{2s}^*)^2 + (x_1 + X_{2s}^*)^2}, \end{aligned} \right\} \quad 100)$$

Da

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_{2s}} = \frac{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_a + \mathfrak{z}_{2s}} = \frac{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_{2s}}{\frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_a} + \mathfrak{z}_{2s}} = \frac{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_{2s}}{\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}} \quad 101)$$

ist auch

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{P}_1 \cdot \frac{\mathfrak{C}_{2s}}{\mathfrak{C}_1} \cdot \frac{1}{\mathfrak{z}_1^* + \mathfrak{z}_{2s}} \quad 97a)$$

Ferner gilt die Identität

$$(r_1 + R_{2s}^*)^2 + (x_1 + X_{2s}^*)^2 = \frac{C_1^2}{C_{2s}^2} \cdot [(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2];$$

wenn wir den Nenner der Gleichungen 100) durch den letzteren Ausdruck ersetzen und in den Zählern für R_{2s}^* bzw. X_{2s}^* die Ausdrücke 98) einführen, wird

$$\left. \begin{aligned} I_1 \cos \varphi_1 &= v(P)_{\text{Strom}} = \frac{P_1}{C_1^2} \cdot \frac{r_1 C_{2s}^2 + r_a \left(\frac{Z_{2s}}{z_a} \right)^2 + R_{2s}}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}, \\ I_1 \sin \varphi_1 &= u(P)_{\text{Strom}} = \frac{P_1}{C_1^2} \cdot \frac{x_1 C_{2s}^2 + x_a \left(\frac{Z_{2s}}{z_a} \right)^2 + X_{2s}}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}. \end{aligned} \right\} \quad 100a)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung 100a) mit dem Betrage P_1 der primären Klemmenspannung ergibt sich schließlich die primäre elektrische Leistung

$$W_1 = P_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{r_1 C_{2s}^2 + r_a \left(\frac{Z_{2s}}{z_a} \right)^2 + R_{2s}}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2} \quad 94a)$$

Wenn wir andererseits die erste Gleichung 100a) durch den Betrag des Primärstromes

$$I_1 = P_1 \cdot \frac{C_{2s}}{C_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}} \quad (\text{aus 97a) abzulesen}) \quad 97b)$$

dividieren, erhalten wir den primären Leistungsfaktor

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{C_1 C_{2s}} \frac{r_1 C_{2s}^2 + r_a \left(\frac{Z_{2s}}{Z_a} \right)^2 + R_{2s}}{\sqrt{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}} \quad (102)$$

Die dem Kaskadendiagramm Abb. 10 entsprechende Abhängigkeit dieses Faktors von der Schlüpfung s ist aus Abb. 11c zu ersehen.

Nach dem Ersatzstromkreis Abb. 5a läßt sich die primäre elektrische Leistung in die Leistungssumme

$$W_1 = I_1^2 r_1 + I_a^2 r_a + I_2^2 R_{2s} \quad (94b)$$

zerlegen; $I_1^2 r_1$ sind die Kupferverluste in der Primärwicklung und $I_a^2 r_a$ die Eisenverluste im Ständer der vorderen Maschine. Die nach Abzug dieser Verluste von W_1 übrig bleibende Leistung

$$W_d^v = W_1 - I_1^2 r_1 - I_a^2 r_a = I_2^2 R_{2s} \quad (103)$$

wird in den Motorarbeitsgebieten der Kaskadenschaltung auf das mit N_L minutlichen Umdrehungen rotierende Drehfeld der vorderen Maschine übertragen; wir wollen sie die „Drehfeldleistung der vorderen Maschine“ nennen. Diese Leistung wird im Stromdiagramm nach 54) durch die Abschnitte

$$\overline{Pa}_{\text{Strom}} = \frac{I_2^2 R_{2s}}{P_1} = \frac{W_d^v}{P_1} \quad (104)$$

der auf (u^v) bezogenen Ordinaten $v^v(P)_{\text{Strom}}$ der Diagrammpunkte in demselben Maßstabe dargestellt, wie die primäre elektrische Leistung W_1 durch die Ordinaten $v(P)_{\text{Strom}}$.

Die Punkte a liegen nach Abb. 7 im Schnitte der Verbindungsgeraden $O'f_g$ mit den Ordinaten $v^v(P)$; die Punkte f_g sind die Fußpunkte der Ordinaten $v^v(p_g)$ des Kreises k_g auf der im Abstände r_1^* parallel zur u^v -Achse verlaufenden u_g -Achse. Um die Punkte a in dem direkt auf dem Grundkreise K_g aufgebauten Kaskadendiagramm zu ermitteln, denken wir uns die Parallelen zur v^v -Achse (auf welchen die Ordinaten $v^v(p_g)$ liegen) und die u_g -Achse in bezug auf den Pol O' mit Berücksichtigung des Reduktionsverhältnisses $\frac{I}{C_1}$ inversiert. Die genannten Parallelen gehen dabei in die Hilfskreise über, die u_g -Achse inversiert sich in den Kreis $K_{(R_{2s}=0)}$ mit dem Durchmesser (im Strommaßstabe)

$$2 R_{(R_{2s}=0)} = \frac{P_1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^*}, \quad (105)$$

welcher durch den Pol O' geht und dessen Mittelpunkt auf der v^v -Achse liegt. Auf diesem Kreise liegen nach früherem (S. 20) auch die Punkte P_{g0} und $P_{g\infty}$ des Grundkreises.

Die Schnittpunkte F des Kreises $K_{(R_{2s}=0)}$ mit den durch die Punkte P des Kaskadendiagramms gezogenen Hilfskreisen entsprechen inversionsgemäß den Fußpunkten f_g auf der u_g -Achse; die Verbindungsgeraden $O'F$ schneiden daher die Ordinaten $v^v(P)$ in den gesuchten Punkten a , wobei zusammengehörige Punkte F und P auf einem Hilfskreise liegen. — Die oberhalb (unterhalb) der Verbindungsgeraden $O'F$ liegenden Ordinatenabschnitte $\overline{Pa}$ sind positiv (negativ) zu rechnen.

Wenn wir die Drehfeldleistung W_d^v der vorderen Maschine, welche der Umdrehungszahl N_1 ihres Drehfeldes entspricht, durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{n_{10}}{N_1} = \alpha$ (6a) auf die synchrone Umdrehungszahl n_{10} reduzieren, erhalten wir das Drehmoment der vorderen Maschine in synchronen Watt

$$W^v = \alpha W_d^v = \alpha I_2^2 R_{2s}; \quad (106)$$

die mechanische Leistung der vorderen Maschine ist dann

$$W_m^v = \frac{n_1}{n_{10}} \cdot W^v = (1 - s) \alpha I_2^2 R_{2s}. \quad (107)$$

Die Leistungen W^v und W_m^v lassen sich auf die im Strommaßstabe gemessenen Ordinatenabschnitte $\overline{Pa}_{\text{Strom}}$ beziehen, und zwar ist mit Rücksicht auf 104)

$$\alpha \cdot \overline{Pa}_{\text{Strom}} = \frac{W^v}{P_1} \quad (108)$$

und

$$(1 - s) \alpha \cdot \overline{Pa}_{\text{Strom}} = \frac{W_m^v}{P_1}. \quad (109)$$

In Abb. 11a sind die aus den Ordinatenabschnitten $\overline{Pa}$ der Abb. 10 ermittelten Drehmomente der vorderen Maschine in Abhängigkeit von der Schlüpfung s eingetragen.

Die Differenz zwischen der Drehfeldleistung W_d^v und der mechanischen Leistung der vorderen Maschine W_m^v

$$W_2 = [1 - (1 - s) \alpha] I_2^2 R_{2s} = (\alpha s + \beta) I_2^2 R_{2s} \quad (110)$$

wird in den Motorarbeitsgebieten dem Sekundärkreise der Kaskadenschaltung in Form elektrischer Leistung zugeführt.

Die dem zusammengefaßten Scheinwiderstande

$$Z_{2s} = R_{2s} + j X_2 = \left(\frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right) + j (x_2 + x_{3s}^*)$$

entsprechende Leistung $I_2^2 R_{2s}$ läßt sich in zwei Summanden zerlegen:

$$I_2^2 R_{2s} = I_2^2 \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + I_2^2 r_{3s}^*;$$

die Multiplikation dieser Gleichung mit $\alpha s + \beta$ ergibt

$$(\alpha s + \beta) I_2^2 R_{2s} = I_2^2 r_2 + (\alpha s + \beta) I_2^2 r_{3s}^*. \quad (111)$$

$(\alpha s + \beta) I_2^2 R_{2s}$ ist nach 110) die dem Sekundärkreise der Kaskadenschaltung zugeführte elektrische Leistung W_2 , $I_2^2 r_2$ sind die Kupferverluste in den hintereinander geschalteten Wicklungen der beiden Maschinen. Die nach Abzug dieser Verluste von W_2 übrig bleibende Leistung

$$W_d^h = (\alpha s + \beta) I_2^2 r_{3s}^*, \quad (112)$$

welche auf das mit N_2 minutlichen Umdrehungen rotierende Drehfeld der hinteren Maschine übertragen wird, soll als „Drehfeldleistung der hinteren Maschine“ bezeichnet werden.

Wenn wir die Leistung W_d^h durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{n_{20}}{N_2} = \frac{\beta}{\alpha s + \beta}$ (7b) auf die synchrone Umdrehungszahl n_{20} reduzieren, erhalten wir das Drehmoment der hinteren Maschine in synchronen Watt

$$W^h = \beta I_2^2 r_{3s}^* \quad (113)$$

und daraus ihre mechanische Leistung

$$W_m^h = (1 - s) W^h = (1 - s) \beta I_2^2 r_{3s}^*. \quad (114)$$

Die Leistungen $I_2^2 r_{3s}^*$ werden nach 55) durch die Abschnitte

$$\overline{ab}_{\text{Strom}} = \frac{I_2^2 r_{3s}^*}{P_1} \quad (115)$$

der auf (u^v) bezogenen Ordinaten $v^v(P)$ der Punkte P des Kaskadendiagramms in demselben Maßstabe dargestellt, wie die Drehfeldleistungen der vorderen Maschine W_d^v durch die Abschnitte $\overline{Pa}_{\text{Strom}}$. Die Punkte b liegen nach Abb. 7 im Schnitte der Verbindungsgeraden $O'P_g$ mit den Ordinaten $v^v(P)$.

Bei der Ermittlung der Abschnitte $\overline{ab}_{\text{Strom}}$ ist auf die richtige Zugehörigkeit ihrer Begrenzungspunkte zu achten; diese Abschnitte sind für positive (negative) Schlüpfungswerte s positiv (negativ) zu rechnen.

Die Leistungen W^h und W_m^h lassen sich aus den Ordinatenabschnitten $\overline{ab}_{\text{Strom}}$ mit Hilfe der Beziehungen

$$\beta \cdot \overline{ab}_{\text{Strom}} = \frac{W^h}{P_1} \quad (116)$$

und

$$(1-s) \beta \cdot \overline{ab}_{\text{Strom}} = \frac{W_m^h}{P_1} \quad (117)$$

in demselben Maßstab ermitteln, wie die entsprechenden Größen der vorderen Maschine W^v und W_m^v aus den Abschnitten $\overline{Pa}_{\text{Strom}}$. In Abb. 11a sind die der Abb. 10 entsprechenden Leistungen W^h im gleichen Maßstabe wie W^v dargestellt.

Das Gesamtdrehmoment in synchronen Watt der beiden in Kaskade geschalteten Maschinen ergibt sich durch Summierung der Drehmomente W^v und W^h zu

$$W = W^v + W^h = I_2^2 (\alpha R_{2s} + \beta r_{3s}^*); \quad (118)$$

wenn wir hierin

$$R_{2s} = \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^*$$

$$\text{setzen, wird } W = I_2^2 \left[\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + (\alpha s + \beta) r_{3s}^* \right] = I_2^2 \left[\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right]. \quad (118a)$$

Das Gesamtdrehmoment W läßt sich im Kaskadendiagramm in verhältnismäßig einfacher Weise darstellen. Nach 56) sind die Abschnitte

$$\overline{Pb}_{\text{Strom}} = \frac{I_2^2 \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta}}{P_1} \quad (119)$$

der Ordinaten $v'(P)$ den Leistungen $I_2^2 \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta}$ proportional; im gleichen Maßstabe messen die Abschnitte $\overline{ab}_{\text{Strom}}$ dieser Ordinaten die Leistungen $I_2^2 r_{3s}^*$. Die Abschnitte $\overline{Pb}$ sind dabei positiv (negativ) zu rechnen, wenn $(\alpha s + \beta)$ positiv (negativ) ist; die Abschnitte $\overline{ab}$ sind dagegen nach früherem positiv (negativ) für positive (negative) Schlüpfungswerte. Wenn wir demnach in Abb. 10 die Abschnitte $\overline{ab}$ mit den dem Verhältnis α proportionalen Teilen

$$\overline{bw} = \alpha \cdot \overline{Pb} \quad (120)$$

der Abschnitte $\overline{Pb}$ unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen zusammensetzen, so sind die resultierenden Strecken $\overline{aw}$ den Leistungen

$$I_2^2 \left(\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right)$$

und damit nach 111a) dem Gesamtdrehmomente W der Kaskadenschaltung proportional. Für $\alpha = \beta$ sind die Abschnitte $\overline{Pb}$ einfach zu halbieren.

Im Stromdiagramm messen die Strecken

$$\overline{aw}_{\text{Strom}} = \frac{I_2^2 \left(\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right)}{P_1} = \frac{W}{P_1} \quad (121)$$

das Gesamtdrehmoment in synchronen Watt W in dem uns schon bekannten Maßstabe.

Aus dem Gesamtdrehmomente W ergibt sich die gesamte mechanische Leistung

$$W_m = (1 - s)W = (1 - s)I_2^2 \left(\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right). \quad (122)$$

Wenn in 118a) und 122) für I_2^2 der Wert aus 53) eingesetzt wird, resultieren die folgenden Ausdrücke für das Gesamtdrehmoment in synchronen Watt

$$W = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^*}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2} \quad (118b)$$

und die gesamte mechanische Leistung der beiden Maschinen

$$W_m = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{(1 - s) \left(\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right)}{(r_1^* + R_{2s})^2 + (x_1^* + X_{2s})^2}. \quad (122a)$$

In den Motorarbeitsgebieten der Kaskadenschaltung sind von W_m die Reibungsverluste abzuziehen, um die nutzbare mechanische Leistung zu erhalten; in den Generatorarbeitsgebieten sind die Reibungsverluste zu addieren.

Aus Abb. 11a ist der dem Kaskadendiagramm Abb. 10 entsprechende Verlauf des Gesamtdrehmoments W , aus Abb. 11b der Verlauf der gesamten mechanischen Leistung zu ersehen.

Durch Division von 122a) und 94a) ergibt sich schließlich der den berücksichtigten Verlusten entsprechende elektrische Wirkungsgrad der Kaskadenschaltung in den Motorarbeitsgebieten

$$\eta_e = \frac{W_m}{W_1} = \frac{(1 - s) \left(\alpha \cdot \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^* \right)}{r_1 C_{2s}^2 + r_a \left(\frac{Z_{2s}}{Z_a} \right)^2 + R_{2s}}; \quad (123)$$

für die Generatorarbeitsgebiete gilt der reziproke Wert dieses Bruches.

Die aus den Leistungskurven der Abb. 11b ermittelten Wirkungsgrade sind in Abb. 11c dargestellt.

Nachstehend sind die in den abgeleiteten Ausdrücken vorkommenden Größen zusammengestellt:

$$C_1^2 = \frac{(r_1 + r_a)^2 + (x_1 + x_a)^2}{Z_a^2} \quad (27b),$$

$$\left. \begin{aligned} r_1^* &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \left[r_1 + r_a \left(\frac{Z_1}{Z_a} \right)^2 \right], \\ x_1^* &= \frac{1}{C_1^2} \cdot \left[x_1 + x_a \left(\frac{Z_1}{Z_a} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (30a),$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma P_1}{\gamma P_1 + P_2}, \\ \beta &= \frac{P_2}{\gamma P_1 + P_2} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha + \beta = 1) \quad (8),$$

$$\left. \begin{aligned} R_{2s} &= \frac{r_2}{\alpha s + \beta} + r_{3s}^*, \\ X_{2s} &= x_2 + x_{3s}^* \end{aligned} \right\} \quad (90),$$

$$\left. \begin{aligned} r_{3s}^* &= \frac{I}{D_{3s}^2} \cdot \frac{r_{3t}}{s}, \\ x_{3s}^* &= \frac{I}{D_{3s}^2} \cdot \left[x_b \left(\frac{z_{3s}}{x_b} \right)^2 + x_s \right]; \quad z_{3s}^2 = \left(\frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + x_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (88),$$

$$D_{3s}^2 = \frac{\left(\frac{r_{3t}}{s} \right)^2 + (x_b + x_s)^2}{x_b^2} \quad (89),$$

$$\begin{aligned} Z_{2s}^2 &= R_{2s}^2 + X_{2s}^2, \\ C_{2s}^2 &= \frac{(r_a + R_{2s})^2 + (x_a + X_{2s})^2}{Z_a^2} \quad (99). \end{aligned}$$

Wenn wir in IIIb) $s = 1$ setzen, erhalten wir das gesamte Anlaufdrehmoment in synchronen Watt bei kurzgeschlossenem Anlasser

$$W_{St} = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{\alpha r_2 + r_{3St}^*}{(r_1^* + R_{2St})^2 + (x_1^* + X_{2St})^2}, \quad (124)$$

welches durch Einschaltung von Widerständen in den Sekundärkreis der hinteren Maschine (Tertiärkreis der Kaskadenschaltung) verändert werden kann. Dabei ist

$$\begin{aligned} R_{2St} &= r_2 + r_{3St}^* = r_2 + \frac{x_b^2 r_{3t}}{r_{3t}^2 + (x_b + x_s)^2}, \\ X_{2St} &= x_2 + x_{3St}^* = x_2 + \frac{x_b (r_{3t}^2 + x_s^2) + x_b^2 x_s}{r_{3t}^2 + (x_b + x_s)^2}. \end{aligned} \quad (125)$$

Schlußbemerkung. Das in den vorstehenden Abschnitten entwickelte Verfahren ermöglicht auch eine verhältnismäßig einfache Untersuchung der Anlaufverhältnisse der Kaskadenschaltung (Abhängigkeit des Anlaufdrehmoments von den in den Sekundärkreis der hinteren Maschine eingeschalteten Widerständen), sowie des Einflusses der dauernden Einschaltung von Widerständen in den Sekundärkreis der hinteren Maschine. Diese Fragen sollen an einer anderen Stelle behandelt werden.

Die Konstruktion des Leitwert-(Strom-)Diagramms der Kaskadenschaltung wird wesentlich vereinfacht, wenn die früher berücksichtigten Eisenverluste und die Kupferverluste in der Primärwicklung der vorderen Maschine vernachlässigt werden. Wir erhalten damit ein Diagramm, welches in seinen Voraussetzungen dem bekannten Heylanddiagramm der einfachen Induktionsmaschine entspricht.