ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik;*
von Arthur Szarvassi.

Bei statistischen oder quantentheoretischen Untersuchungen ist die Wahl der zur Konstruktion des Phasenraumes dienenden unabhängigen Veränderlichen von vornherein nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß diese ein kanonisches System bilden müssen. Es ist aber häufig nötig, von einem System kanonischer Veränderlicher zu einem anderen solchen überzugehen. So hat Schwarzschild¹⁾ darauf aufmerksam gemacht, welche große Vereinfachung dadurch erzielt wird, daß man von den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen zu „Winkel- und Wirkungsvariablen“ übergeht. In diesem Zusammenhange liegt die Frage nach den Eigenschaften der Transformation nahe, welche ein kanonisches Variabelensystem wieder in ein solches überführt. Die Antwort auf diese Frage ist in einer besonders den Bedürfnissen der Astronomie angepaßten Form längst bekannt. Sie lautet: Sind x_λ , y_λ die ursprünglichen, u_λ , v_λ die neuen kanonischen Veränderlichen, und sind die Transformationsgleichungen in der Form angesetzt

$$\begin{aligned} x_\lambda &= f_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n; v_1, v_2 \dots v_n) \\ y_\lambda &= g_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n; v_1, v_2 \dots v_n) \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2 \dots n,$$

so sind die Bedingungsgleichungen zu erfüllen:

$$(u_\lambda, u_\mu) = 0, (v_\lambda, v_\mu) = 0, (u_\lambda, v_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \mu \\ 1 & \text{für } \lambda = \mu \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = 1, 2 \dots n, \\ \mu = 1, 2 \dots n, \end{matrix}$$

indem man das Poissonsche Klammersymbol

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\lambda=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_\lambda} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \right)$$

einführt.

1) Zur Quantenhypothese, Berl. Akad. d. Wiss. 1916. S. 548.

Ich möchte aber zeigen, daß sich die Bedingung auch in ganz anderer Form geben läßt, und daß gerade diese für die Quantentheorie ein besonderes Interesse hat, besonders deshalb, weil sie eine Fundamentealeigenschaft des Phasenraumes aufdeckt. Es seien nämlich $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ kanonische Veränderliche, d. h. es mögen die Gleichungen bestehen

$$(1) \quad \dot{x}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial y_\lambda}, \quad \dot{y}_\lambda = - \frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n,$$

indem die Hamiltonsche charakteristische Funktion mit $H(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ bezeichnet wird. Will man von den x_λ, y_λ zu neuen kanonischen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n$ übergehen, so geschieht dies durch Vermittlung einer Funktion $S(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung, nämlich daß die neuen Variablen wieder ein kanonisches System bilden, ist die, daß die Transformationsgleichungen die Form haben

$$(2) \quad y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Die Funktion S unterliegt dabei noch der Bedingung, daß die Hessesche Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial x_\lambda \partial v_\mu} \right|$$

von Null verschieden sein muß, da die x_λ, y_λ voneinander und ebenso die u_λ, v_λ voneinander unabhängig sein sollen. Gegenüber der Transformation (2) sind also die kanonischen Gleichungen invariant.

Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung (2) hinreicht; d. h. wir setzen voraus, es würden die x_λ, y_λ auf die neuen Veränderlichen u_λ, v_λ transformiert vermittelt der Gleichungen (2), und wir haben zu beweisen, daß dann auch die Gleichungen bestehen:

$$(3) \quad \dot{u}_\lambda = \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u, \quad \dot{v}_\lambda = - \left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda} \right)_v \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Dabei soll mit dem Symbol

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda} \right)_v$$

bezeichnet werden, daß man mittels der Substitution (2) die Funktion H zunächst durch die u_λ, v_λ ausgedrückt hat, und

dann in gewöhnlicher Weise die partiellen Ableitungen nach den v_λ bzw. u_λ bildet.

Es ist nun

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial \Pi}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u + \frac{\partial H}{\partial y_\lambda} \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left[-\dot{y}_\mu \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u + \dot{x}_\mu \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right]. \end{aligned} \quad [\text{nach (1)}]$$

Ferner haben wir nach (2)

$$\dot{y}_\mu = \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} \dot{v}_\nu \right)$$

und

$$\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u = \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u &= - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} \dot{v}_\nu \right) \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \dot{x}_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda} \dot{x}_\mu - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\nu} \right)_u \dot{v}_\nu. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach (2)

$$\dot{u}_\lambda = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial x_\mu} \dot{x}_\mu + \frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} \dot{v}_\mu \right).$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{u}_\lambda - \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} \dot{v}_\mu + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \dot{v}_\nu \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_\mu \partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial v_\mu \partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right) \dot{v}_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left(\frac{\partial S}{\partial v_\mu} \right) \right]_u \dot{v}_\mu = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \dot{v}_\mu = 0. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda} \right)_v &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v + \frac{\partial H}{\partial y_\mu} \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v \right] \\
 &= \sum_{\mu=1}^n \left[-\dot{y}_\mu \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v + \dot{x}_\mu \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v \right] \\
 &= - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \dot{y}_\nu \right) \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v \\
 &\quad + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} \right)_v \dot{x}_\mu \\
 &= - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v \dot{v}_\nu;
 \end{aligned}$$

und da

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial S}{\partial v_\nu} \right) \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda} \right)_v = \left[\frac{\partial}{\partial u_\lambda} \left(\frac{\partial S}{\partial v_\nu} \right) \right]_v,$$

so ist

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda} \right)_v = - \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial u_\lambda} \left(\frac{\partial S}{\partial v_\nu} \right) \right]_v \dot{v}_\nu = - \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial u_\lambda} \right)_v \dot{v}_\nu = - \dot{v}_\lambda.$$

Also erfüllen wirklich die u_λ , v_λ die kanonischen Gleichungen (3).

Nunmehr soll gezeigt werden, daß die Form (2) der Substitutionsgleichungen auch notwendig ist für das Bestehen der Gleichungen (3). Wir nehmen also an, wir hätten zwei Gruppen von Veränderlichen, nämlich die x_λ , y_λ einerseits, die u_λ , v_λ andererseits; die erste Gruppe erfülle die Gleichungen (1), die zweite das Gleichungssystem (3). Die beiden Gruppen werden durch Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
 x_\lambda &= x_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n; v_1, v_2 \dots v_n) \\
 y_\lambda &= y_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n; v_1, v_2 \dots v_n)
 \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2 \dots n$$

miteinander verknüpft sein. Wir können aber, indem wir die erste Reihe dieser Gleichungen nach den u_λ aufgelöst und diese Werte in die zweite Reihe eingesetzt denken, die Transformationsgleichungen in den Form annehmen:

$$(4) \quad \begin{cases} y_\lambda = f_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n; v_1, v_2 \dots v_n) \\ u_\lambda = g_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n; v_1, v_2 \dots v_n). \end{cases} \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

(Es ist also vorausgesetzt, daß die Auflösung der Transformationsgleichungen für x_λ nach den u_λ möglich ist.) Nun handelt es sich um die Natur der Funktionen f_λ, g_λ .

Wir bilden zunächst

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u + \frac{\partial H}{\partial y_\mu} \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \quad [\text{nach (1)}] \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left[-\dot{y}_\mu \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u + \dot{x}_\mu \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \quad [\text{nach (4)}] \\ &= - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \dot{x}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial v_\nu} \dot{v}_\nu \right) \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \dot{x}_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} \right) \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \dot{x}_\mu \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \dot{v}_\mu, \end{aligned}$$

wobei davon Gebrauch gemacht ist, daß man die Reihenfolge der Summationen nach μ und ν vertauschen kann. Da ferner nach (4)

$$\dot{u}_\lambda = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu} \dot{x}_\mu + \frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} \dot{v}_\mu \right),$$

so ist nach (3)

$$\begin{aligned} \dot{u}_\lambda - \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda} \right)_u &= \sum_{\mu=1}^n \left[\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \dot{x}_\mu \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u \right] \dot{v}_\mu = 0. \end{aligned}$$

Da aber

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu} \right)_u = \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} \right)_u = \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial v_\mu} \right)_u = 0,$$

so läßt sich der letzten Gleichung die Form geben

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^n \left[\left(\frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial f_{\mu}}{\partial v_{\lambda}} \right) + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u \right] \dot{x}_{\mu} \\ & + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left[\frac{\partial f_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u - \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \right)_u \right] \dot{v}_{\mu} = 0 \end{aligned} \right. \quad \lambda=1, 2, \dots, n.$$

Zu einem analogen Gleichungssystem gelangen wir, indem wir bilden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{\lambda}} \right)_u &= \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial x_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v + \frac{\partial H}{\partial y_{\mu}} \left(\frac{\partial y_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left[-\dot{y}_{\mu} \left(\frac{\partial x_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_u + \dot{x}_{\mu} \left(\frac{\partial y_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \right] \\ &= - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \dot{x}_{\nu} + \frac{\partial f_{\mu}}{\partial v_{\nu}} \dot{v}_{\nu} \right) \left(\frac{\partial x_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \dot{x}_{\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \right) \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \dot{x}_{\mu} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \dot{v}_{\mu}. \end{aligned}$$

Nach (3) ist also

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\lambda} + \left(\frac{\partial H}{\partial u_{\lambda}} \right)_v &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \right) \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \dot{x}_{\mu} + \dot{v}_{\lambda} \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v \dot{v}_{\mu} = 0. \end{aligned}$$

Da aber

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v = \left(\frac{\partial g_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v = \left(\frac{\partial u_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \right)_v = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \lambda, \\ 1 & \text{für } \mu = \lambda, \end{cases}$$

so kann man die letzte Beziehung in der Form schreiben

Aus diesen n Gleichungen lassen sich die n Ableitungen

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v, \quad \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v$$

berechnen. Nennen wir nämlich die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = D,$$

so ist irgendein

$$\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\right)}.$$

Dabei ist die Determinante D wesentlich von Null verschieden; denn sonst bestünde zwischen den $g_1, g_2, \dots, g_n$ eine Beziehung, welche die $x_1, x_2, \dots, x_n$ nicht enthält, was unmöglich ist, weil die $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$ ein System voneinander unabhängiger Veränderlicher sind.

Daher gibt die dritte der Gleichungen (7)

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \right)} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda = 1, 2, \dots, n; \\ \mu = 1, 2, \dots, n; \end{matrix}$$

d. h. man hat für irgendein μ die n Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \right) D_{11} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \right) D_{12} + \dots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} \right) D_{1n} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \right) D_{21} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \right) D_{22} + \dots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} \right) D_{2n} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \right) D_{n1} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \right) D_{n2} + \dots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} \right) D_{nn} = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \right)} = D_{\lambda\nu}$$

gesetzt worden. Diese Gleichungen können aber nur zusammen bestehen, wenn entweder die Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwindet, oder wenn

$$\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2 \dots n.$$

Nun ist aber die Determinante nichts anderes als die reziproke der Determinante D und daher nach dem Cauchyschen Determinantensatz gleich D^{n-1} ; sie kann folglich nicht verschwinden, weil D von Null verschieden ist. Also ist nur die zweite Eventualität möglich, und wir erhalten

$$(8a) \quad \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2 \dots n. \\ \nu = 1, 2 \dots n. \end{array}$$

Genau ebenso folgt aus der vierten der Gleichungen (7)

$$(8b) \quad \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial v_{\mu}} = 0 \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2 \dots n. \\ \nu = 1, 2 \dots n. \end{array}$$

Damit ist auch die erste der Gleichungen (7) erfüllt.

Die zweite der Gleichungen (7) aber läßt sich vermöge (8b) schreiben

$$\sum_{\nu=1}^n \left[\frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u - \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \right)_n \right] = 0.$$

Nun ist

$$0 = \left(\frac{\partial u_{\mu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u = \left(\frac{\partial g_{\mu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u = \frac{\partial g_{\mu}}{\partial v_{\lambda}} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\lambda}} \right)_u$$

und

$$0 = \left(\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial v_{\mu}} \right)_u = \left(\frac{\partial g_{\lambda}}{\partial v_{\mu}} \right)_u = \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial v_{\mu}} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial x_{\nu}}{\partial v_{\mu}} \right)_u;$$

daher nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{\partial g_{\lambda}}{\partial v_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu}}{\partial v_{\lambda}} = 0,$$

oder wenn man der Konformität mit (8a) und (8b) wegen die Indexp Buchstaben μ, ν benützt:

$$(8c) \quad \frac{\partial g_{\mu}}{\partial v_{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu}}{\partial v_{\mu}} = 0 \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2 \dots n. \\ \nu = 1, 2 \dots n. \end{array}$$

Die Bedeutung der drei Bedingungsgleichungen (8a), (8b), (8c) ist klar. Die erste besagt: Die n -dimensionale Vektorverteilung mit den Komponenten $f_1, f_2, \dots, f_n$ im Raume der $x_1, x_2, \dots, x_n$ besitzt ein Potential S ; d. h. es gilt

$$f_{\mu} = \frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} \quad \mu = 1, 2 \dots n.$$

Da die f_μ außer von den $x_1, x_2 \dots x_n$ noch von den $v_1, v_2 \dots v_n$ abhängen, so enthält natürlich auch die Funktion S die letzteren Variablen als Parameter. Analog besagt die Bedingung (8c), daß die Vektorverteilung $g_1, g_2, \dots g_n$ im Raume der $v_1, v_2, \dots v_n$ ein Potential S' besitzt,

$$g_\mu = \frac{\partial S'}{\partial v_\mu} \quad \mu = 1, 2 \dots n,$$

wobei S' auch noch die $x_1, x_2, \dots x_n$ als Parameter enthält. Durch Einsetzen in (8b) aber findet man, daß die beiden Potentiale identisch sind:

$$S = S'.$$

Damit aber ist bewiesen, daß die Transformationsgleichungen (4) notwendig die Form haben

$$(2) \quad y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Sämtliche Transformationen dieser Art bilden eine Gruppe. In der Tat, nehmen wir zunächst ein System von Veränderlichen x_λ, y_λ , und transformieren wir dasselbe auf ein anderes u_λ, v_λ mittelst einer Funktion $S(x_1, x_2, \dots x_n; v_1, v_2, \dots v_n)$:

$$(a) \quad y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Transformieren wir dann mit Hilfe einer Funktion $S'(u_1, u_2, \dots u; s_1, s_2, \dots s_n)$ die Variablen u_λ, v_λ weiter auf neue Veränderliche r_λ, s_λ :

$$(b) \quad v_\lambda = \frac{\partial S'}{\partial u_\lambda}, \quad r_\lambda = \frac{\partial S'}{\partial s_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Durch diese zwei Schritte (a) und (b) ist das ursprüngliche System der x_λ, y_λ auf das System der r_λ, s_λ transformiert. Es ist jetzt zu zeigen, daß man durch eine Transformation derselben Art von den Veränderlichen x_λ, y_λ unmittelbar zu den Veränderlichen r_λ, s_λ gelangen kann.

Nun folgt aus (a), daß

$$\sum_{\lambda=1}^n (y_\lambda dx_\lambda + u_\lambda dv_\lambda) = dS,$$

und aus (b), daß

$$\sum_{\lambda=1}^n (v_\lambda du_\lambda + r_\lambda ds_\lambda) = dS'.$$

Durch Addition erhält man also

$$\sum_{\lambda=1}^n (y_{\lambda} dx_{\lambda} + r_{\lambda} ds_{\lambda}) = d \left(S + S' - \sum_{\lambda=1}^n u_{\lambda} v_{\lambda} \right).$$

Daher stellt

$$S'' = S + S' - \sum_{\lambda=1}^n u_{\lambda} v_{\lambda}$$

eine Funktion dar, welche bloß von den x_{λ} , y_{λ} abhängt, wovon man sich mit Zuhilfenahme der Gleichungen (a), (b) sofort direkt überzeugen kann, und es ist

$$(c) \quad y_{\lambda} = \frac{\partial S''}{\partial x_{\lambda}}, \quad r_{\lambda} = \frac{\partial S''}{\partial s_{\lambda}}, \quad \lambda = 1, 2 \dots n$$

Hieraus folgt: Stellt man sich mit Benützung von Hilfsveränderlichen u_{λ} , v_{λ} , welche die Gleichungen

$$u_{\lambda} = \frac{\partial S}{\partial v_{\lambda}}, \quad v_{\lambda} = \frac{\partial S'}{\partial u_{\lambda}}, \quad \lambda = 1, 2 \dots n$$

erfüllen, die eben definierte Funktion $S''(x_1, x_2, \dots, x_n; s_1, s_2, \dots, s_n)$ her, so transformieren sich mit Hilfe derselben durch die Gleichungen (c) die Veränderlichen x_{λ} , y_{λ} unmittelbar und mit einem Schritte in die Veränderlichen r_{λ} , s_{λ} , und die Transformation ist von derselben Art wie die in (a) und (b) benützte. Damit ist die Gruppeneigenschaft bewiesen.

Die Transformation (2) hat eine interessante Eigenschaft, welche wir jetzt entwickeln wollen. Betrachten wir nämlich ein Volumelement des Phasenraumes der x_{λ} , y_{λ} , und berechnen wir seinen Inhalt. Dasselbe ist gegeben durch das $2n$ -fache Integral

$$\iint \dots \int^{(2n)} dx_1, dx_2 \dots dx_n \, dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Transformieren wir nun die x_{λ} , y_{λ} auf die neuen Variablen vermöge der Gleichungen (2), so verwandelt sich bekanntlich das Raumintegral in das folgende:

$$\iint \dots \int^{(2n)} \int \frac{\partial (x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)}{\partial (u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_n)} du_1 \dots du_n \, dv_1 \dots dv_n.$$

Berechnen wir die hier auftretende Funktionaldeterminante Δ . Sie lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_n}\right)_u \\
\vdots & \vdots \\
\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_n}\right)_u \\
\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_n}\right)_u \\
\vdots & \vdots \\
\left(\frac{\partial y_n}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial y_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial v_n}\right)_u
\end{vmatrix}$$

Berücksichtigt man aber die schon oben benützten Beziehungen

$$\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu}\right)_v = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu}\right)_v,$$

$$\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial v_\mu}\right)_u = \frac{\partial f_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu}\right)_u,$$

indem wir die Bezeichnungen von vorhin

$$\frac{\partial S}{\partial x_\lambda} = f_\lambda, \quad \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} = g_\lambda$$

beibehalten, so läßt sich die Determinante wesentlich vereinfachen. Wir multiplizieren nämlich die ersten n Zeilen der Determinante der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$$

und subtrahieren die Summe der so erhaltenen n Zeilen von der $n+1$ ten Zeile, wodurch sich der Wert der Determinante nicht ändert; hierauf multiplizieren wir die ersten n Zeilen bzw. mit

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}$$

und subtrahieren sie von den Elementen der $n+2$ ten Zeile usw. So erhalten wir

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_n}\right)_u \\
\vdots & \vdots \\
\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_n}\right)_u \\
0, \quad \dots \quad 0, & \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\
\vdots & \vdots \\
0, \quad \dots \quad 0, & \frac{\partial f_n}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial v_n}
\end{vmatrix}$$

Diese Determinante aber ist das Produkt zweier Determinanten n ter Ordnung, nämlich

$$A = \left(\frac{\partial (x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial (u_1, u_2 \dots u_n)} \right)_v \cdot \frac{\partial (f_1, f_2 \dots f_n)}{\partial (v_1, v_2 \dots v_n)}.$$

Wir haben aber schon oben bemerkt, daß erstlich

$$\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu} \right)_v = \frac{D_{\mu\nu}}{D},$$

und zweitens, daß die Determinante der Minoren D_{u_ν}

$$|D_{u_\nu}| = D^{n-1};$$

hieraus folgt, daß

$$\left(\frac{\partial (x_1 \dots x_n)}{\partial (u_1 \dots u_n)} \right)_v = \frac{1}{D^n} \cdot D^{n-1} = \frac{1}{D}.$$

Dabei bedeutet D die Determinante

$$D = \frac{\partial (g_1, g_2 \dots g_n)}{\partial (x_1, x_2 \dots x_n)}.$$

Demnach ist

$$A = \frac{1}{D} \frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (v_1 \dots v_n)}.$$

Da aber

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial v_\mu} = \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\lambda},$$

so ist

$$\frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (v_1 \dots v_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1} & \frac{\partial f_n}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = D,$$

und folglich

$$A = 1.$$

Hieraus folgt, daß

$$\iint \dots \int d x_1 \dots d x_2 \, d y_1 \dots d y_n = \iint \dots \int d u_1 \dots d u_2 \, d v_1 \dots d v_n.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt ein Volumelement des Phasenraumes der u_λ, v_λ dar, wenn man auch die u_λ, v_λ als *rechtwinkelige* Koordinaten des Phasenraumes deutet. Also erhält man den Satz: Bei der durch die Transformation (2) vermittelten punktweisen Abbildung des Phasenraumes der $x_\lambda,$

y_λ auf den Raum der u_λ , v_λ geht ein Raumteil des x_λ -, y_λ -Raumes in einem gleichgroßen Raumteil des u_λ -, v_λ -Raumes über.

Dieser Satz hat eine für die Quantentheorie wichtige Konsequenz. Nach der Hypothese von Planck ist die Einteilung des 2 n -dimensionalen Phasenraumes so zu wählen, daß eine Zelle das Volumen h^n hat, wenn h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Da die Transformation (2) ein kanonisches Variabelensystem in ein ebensolches überführt, so stellt die Gruppe aller Transformationen (2) sämtliche zu einem Ausdruck der Hamiltonschen Funktion H gehörigen kanonischen Variabelensysteme her; dies sind also zugleich alle, welche zur Konstruktion des Phasenraumes der statistischen Mechanik verwendet werden können, da man ja für diesen Zweck nur kanonische Veränderliche brauchen kann. Hat man nun für ein solches Variabelensystem die Einteilung des Phasenraumes konstruiert, und bildet man diese Einteilung auf ein anderes System von Veränderlichen ab, so gehen nach unserem Satz dabei die Zellen in volumsgleiche über, sie haben also jedenfalls wieder das Volum h^n , gleichgültig, wie die neuen Veränderlichen im übrigen gewählt sein mögen.

Ein wichtiger Spezialfall der betrachteten Transformation tritt ein, wenn von den neuen Veränderlichen u_λ , v_λ die letzteren ($v_1, v_2, \dots v_n$) von der Zeit unabhängig, also konstant sind; wir wollen sie dann mit $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ bezeichnen. In diesem Falle stellt die erste Hälfte der Transformationsformeln (2)

$$y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \dots n$$

n Beziehungen zwischen den x_λ und den y_λ dar, in welchen noch die n Konstanten α_λ erscheinen; sie stellen also nichts anderes dar als die sogenannten intermediären Integrale der kanonischen Gleichungen (1). Zugleich folgt aus (3)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda} \right)_v = 0,$$

d. h. die charakteristische Funktion H enthält nach der Transformation außer der Zeit — falls sie von dieser explizit abhängt — nur die Konstanten α_n . Aus der zweiten Hälfte der Gleichungen (3) folgen dann die u_λ durch einfache Quadratur

als Funktionen der Zeit und aus der zweiten Hälfte der Gleichungen (2) ergeben sich die x_λ als Funktionen von t und von $2n$ Konstanten, also als die Integrale von (1). Die Transformationsformeln (2) geben also in diesem Falle die Darstellung der Integrale von (1). Wenn speziell, wie wir jetzt annehmen wollen, die Funktion H die Zeit nicht explizit enthält, sie also mit der Energie identisch ist, so sind nach (3) die Variablen u_λ , die wir nun mit w_λ bezeichnen wollen, lineare Funktionen der Zeit:

$$w_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \alpha_\lambda} \cdot t + a_\lambda \quad (\text{die } a_\lambda\text{-Konstante}).$$

Diese Darstellung der Integrale der kanonischen Gleichungen (1) mit Hilfe der Größen α_λ und w_λ — die übrigens rein formal ist, da der Weg zunächst fehlt, zu derselben zu gelangen — deckt sich nicht mit jener nach der bekannten Jacobischen Integrationsmethode. Diese stellt vielmehr einen noch spezielleren Fall dar: es werden nämlich nicht bloß die v_λ , sondern auch alle u_λ bis auf eines, z. B. u_1 als konstant angenommen. Aus den Gleichungen (3) folgt dann, daß die Energie H nach der Transformation nur von der Konstanten v_1 abhängt, dieser also direkt gleichgesetzt werden kann. Diese Tatsache benützt man in bekannter Weise bei der Jacobischen Methode, um aus der Forderung $H = v_1$, wobei in H für die y_λ die aus (2) folgenden Ausdrücke eingesetzt werden, die Funktion S zu bestimmen. Wir wollen für diesen Fall die Konstanten v_λ mit c_λ , die Größen u_1 mit $t + j_1$; $u_2, \dots, u_n$ bzw. mit $j_2 \dots j_n$ bezeichnen.

Für die Quantentheorie ist nun der Übergang von dem nach der Jacobischen Methode erhaltenen System der c_λ, j_λ zu dem der $\alpha_\lambda, w_\lambda$ von Wichtigkeit. Das erstere eignet sich nämlich nicht zur Konstruktion des Phasenraums, weil sich unter den Koordinaten die Energie selbst befände, während doch gerade die Verteilung der Energie im Phasenraum, letztere als Funktion der Koordinaten des Phasenraumes aufgefaßt, ein Hauptziel der Untersuchung bildet. Bisher ist diese Aufgabe, von dem ersten System kanonischer Parameter zum anderen überzugehen, nur für den Fall bedingt-periodischer Bewegungen aufgetreten, und zwar hat Schwarzschild eine Methode an-

gegeben, diesen Übergang in bequemer Weise zu vollziehen.¹⁾ Weil aber aus seiner Darstellung nicht hervorgeht, ob seine Methode allgemein anwendbar ist (wie sie es tatsächlich ist) und weil vielleicht ein oder der andere Punkt der Theorie noch der Aufhellung bedarf, dürften einige kurze Bemerkungen über den Gegenstand nicht überflüssig sein.

Zunächst bemerken wir, daß ganz allgemein der Übergang von dem System der c_λ , j_λ zu dem der α_λ , w_λ einfach durch eine lineare Substitution geschehen kann. In der Tat sieht man sogleich, daß der Zweck erreicht ist, wenn man setzt

$$\alpha_\lambda = m_{\lambda 1} c_1 + m_{\lambda 2} c_2 + \dots + m_{\lambda n} c_n \quad \lambda = 1, 2 \dots n.$$

Es fragt sich, welche Werte die $m_{\lambda \mu}$ für den Fall bedingt-periodischer Bewegungen haben.

Die Jacobische Gleichung $H = c_1$ möge die Form haben

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n A_\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial x_\lambda} \right)^2 - (U + c_1) = 0;$$

die A_λ und die potentielle Energie U sind Funktionen der x_λ . Es kann aber sein, daß einige der x_λ in der Gleichung nicht vorkommen (zyklische Koordinaten); es seien dies die Variablen $x_{n-k+1}, x_{n-k+2} \dots x_n$ (wir können ja die Reihenfolge der x_λ immer so wählen, daß es gerade die letzten in der Reihe sind). Wir können dann setzen

$$S(x_1, x_2 \dots x_n) = S'(x_1, x_2 \dots x_{n-k}) + c_{n-k+1} x_{n-k+1} + \dots + c_n x_n,$$

so daß die Funktion S' die Gleichung zu erfüllen hat

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-k} A_\lambda \left(\frac{\partial S'}{\partial x_\lambda} \right)^2 - (U' + c_1) = 0,$$

wo

$$U' = U - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=n-k+1}^n c_\lambda A_\lambda.$$

Wir nehmen Separation der Veränderlichen an; es sei also

$$S'(x_1, x_2 \dots x_{n-k}) = S'_1(x_1) + S'_2(x_2) + \dots + S'_{n-k}(x_{n-k}).$$

1) A. a. O. S. 552.

Dazu fügen wir die k Gleichungen

$$(9b) \quad \alpha_{n-k+1} = c_{n-k+1}, \dots, \alpha_n = c_n.$$

Damit ist der Übergang von den c_λ zu den a_λ bewerkstelligt, und zwar sind die oben eingeführten Koeffizienten $m_{\lambda\mu}$:

$$m_{\lambda\mu} = \frac{1}{\pi} \omega_{\lambda\mu}, \quad \text{wenn} \quad \begin{array}{l} \lambda = 1, 2 \dots n - k \\ \mu = 1, 2 \dots n - k \end{array}$$

und

$$m_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \mu, \\ 1 \text{ für } \lambda = \mu, \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \begin{array}{l} \lambda = n - k + 1 \dots n, \\ \mu = n - k + 1 \dots n. \end{array}$$

Macht man andererseits die bekannte Substitution

$$x_\lambda = \frac{b_\lambda + a_\lambda}{2} - \frac{b_\lambda - a_\lambda}{2} \cos \eta_\lambda,$$

so wird $S'_\lambda(x_\lambda)$ das Integral einer *geraden* periodischen Funktion der Periode 2π , welche sich in eine Fouriersche $\cos$ -Reihe entwickeln läßt:

$$S'_\lambda(x_\lambda) = \int d\eta_\lambda (a_{\lambda 0} + a_{\lambda 1} \cos \eta_\lambda + a_{\lambda 2} \cos 2\eta_\lambda + \dots).$$

Daher wird

$$\int_{b_\lambda}^{a_\lambda} dx_\lambda \sqrt{\psi_\lambda(x_\lambda)} = \pi a_{\lambda 0} \quad \lambda = 1, 2 \dots n - k$$

Es ist aber

$$\omega_{\lambda\mu} = \pi \frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial c_\mu} = \pi \sum_{\nu=1}^{n-k} \frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial c_\mu}$$

und nach den Gleichungen (9a)

$$\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial c_\mu} = \frac{1}{\pi} \omega_{\nu\mu}.$$

Folglich

$$\omega_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n-k} \frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial \alpha_\nu} \omega_{\nu\mu}$$

und da die Determinante aus den $\omega_{\lambda\mu}$ nicht verschwindet, folgt

$$\frac{\partial a_{\lambda_0}}{\partial \alpha_\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \nu \\ 1 & \text{für } \lambda = \nu \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = 1, 2 \dots n - k, \\ \nu = 1, 2 \dots n - k, \end{matrix}$$

also

$$\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda_0} \quad \lambda = 1, 2 \dots n - k.$$

Dies entspricht der Schwarzschild'schen Regel, und man sieht, daß diese stets anwendbar ist: Immer läßt sich S'_λ in der Form darstellen

$$S'_\lambda(x_\lambda) = \alpha_{\lambda_0} \eta_\lambda + \text{period. Funkt. von } \eta_\lambda \quad (\text{Periode } 2\pi)$$

und der Koeffizient des linearen Gliedes α_{λ_0} ist das gesuchte α_λ . Die Lösungen der kanonischen Gleichungen, ausgedrückt durch die neuen Konstanten, lauten

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\lambda} = w_\lambda, \quad w_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \alpha_\lambda} t + \beta_\lambda = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_\lambda} t + \beta_\lambda \quad \lambda = 1, 2 \dots n \quad (\text{die } \beta_\lambda \text{ Konstante}).$$

Durch die alten Konstanten ausgedrückt aber haben sie gelautet

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = t + j_1, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = j_2 \dots \quad \frac{\partial S}{\partial c_n} = j_n.$$

Da nun diese Form der Lösung in die erstere übergehen muß, wenn man für die c_λ die α_λ einführt, so folgt bei Berücksichtigung von (9 b)

$$w_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \quad w_{n-k+2} = j_{n-k+2} \dots w_n = j_n;$$

d. h.

$$\beta_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \dots \beta_n = j_n$$

und

$$\frac{\partial c_1}{\partial \alpha_{n-k+1}} = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_{n-k+2}} = \dots = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_n} = 0.$$

Es fehlen also k Parameter α_λ im Energieausdruck H nach der Transformation auf die $\alpha_\lambda, w_\lambda$, woraus hervorgeht, daß jede zyklische Koordinate eine Schwarzschild'sche „mittlere Bewegung“ verschwinden läßt (Entartung).

Die Transformationen (2) lassen eine fundamentale Maßeigenschaft des Phasenraumes, nämlich das Volumen, invariant. In dieser Tatsache steckt offenbar eine ganz wesentliche Qualität des Phasenraumes; ähnlich wie die Tatsache, daß die Transformationsgruppe der Drehungen die Distanz im gewöhnlichen Raume ungeändert lassen, eine fundamentale Eigenschaft des

gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes ausdrückt. Nun haben aber die Transformationsgleichungen (2) einen besonderen Typus. Sie stellen nämlich n Beziehungen für die n Koordinatenebenen $x_\lambda - y_\lambda$ dar, indem sie immer ein x_λ mit dem zugehörigen y_λ verknüpfen. Dies wird noch deutlicher, wenn man ihnen die Form gibt:

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + u_1 dv_1 + u_2 dv_2 + \dots = dS.$$

Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Planck-Sommerfeldsche Erweiterung des Quantenansatzes auf n Freiheitsgrade in dieser Form der Gleichungen (2) ihre Begründung haben könnte.

Brünn, am 15. Juli 1919.

(Eingegangen 23. Juli 1919.)