3. *Über die Bewegung eines Gases in Kapillaren und in von parallelen Ebenen begrenzten Kanälen;* *von Ragnar Holm.*

§ 1.

Anlässlich der Konstruktion eines Windmessers bei Siemens & Halske¹⁾ entstand die Frage nach den Gesetzen der Luftbewegung in engen Kanälen, besonders in einem Luftweg von folgender Form: Die Luft soll von einer Kammer *A* (Fig. 1) durch den planparallelen Raum zwischen der Wand *D* und der in kleinem Abstand von dieser coaxial zum Loch *L* befestigten kreisrunden Platte *C* nach der Kammer *B* ziehen. Da die zur Beantwortung dieser Frage unternommenen Untersuchungen etwas von allgemeinem Interesse enthalten dürften, seien sie hier teilweise veröffentlicht.

Fig. 1.

Die hier in Frage kommenden Untersuchungen umfassen Gasbewegungen bei kleinen treibenden Drucken, teils in einem Luftweg von der geschilderten Art, teils in einer Kapillare und teils in einem parallelepipedförmigen Kanal. Die bei den erstgenannten Untersuchungen benutzte Apparatur ist in der Fig. 2 schematisch dargestellt. *C* und *D* (vgl. Fig. 1) waren auf $1\ \mu$ genau eben geschliffene Glasplatten. Den Raum *A* bildete das Innere eines mit der Platte *D* zugedeckten mit Schellack gedichteten Eisenkastens.

Die Platte *C* war an einem senkrecht mikrometrisch verschiebbaren Zylinder *S* befestigt. Ebenso wie in dem Zeißschen Tiefentaster wurde die Lage des Zylinders *S* mittels mikroskopischer Ablesung einer an *S* befestigten Skala bestimmt. Die Paralleleinstellung von *C* und *D* war ermöglicht, indem

1) Siehe die Berichte über die Vorträge von H. Gerdien, Jahrb. der wissensch. Gesellsch. f. Flugtechnik 2. p. 67. 1913 und Verh. d. D. phys. Gesellsch. 15. p. 961. 1913. Besonders wird verwiesen auf eine bald erscheinende Arbeit: Der Luftgeschwindigkeitsmesser der Siemens & Halske A.-G., von H. Gerdien und R. Holm.

der Eisenkasten *A* auf drei Stellschrauben ruhte; sie wurde nach Interferenzerscheinungen zwischen *C* und *D* beurteilt. Geeignet angeordnete Spiegel gestatteten eine Beleuchtung der Platte *C* von oben und die Beobachtung der Interferenzerscheinungen durch ein seitliches Fenster des Kastens. Die Interferenzerscheinungen dienten auch zur Bestimmung der Nullage der Platte *C* und zur Kontrolle des ersten Teiles der Skala auf dem Zylinder *S*. Die ganze beschriebene Apparatur

Fig. 2.

stand in einem mit geeigneten Fenstern versehenen, luftdicht geschlossenen Gußeisenkasten *K*, dessen Inneres also den Raum *B* darstellte. Durch das Rohr *a* wurde Luft nach *A* geführt. Durch das Rohr *b* und weiter durch eine Lenardsche Regulierkapillare zog der Luftstrom von *B* nach dem Rezipienten einer Kapselpumpe, die mit Akkumulatorstrom betrieben wurde. Mittels des Manometers *M* wurde die Druckdifferenz zwischen den Räumen *A* und *B* gemessen.

Alle gebrauchte Luft stammte aus einem Gasometer, in dem sie vorher mindestens 24 Stunden über Wasser gestanden hatte. Der Hahn *h* vermittelte die Verbindung nach dem Gasometer.

Die Bestimmung der durch *A* sekundlich fließenden Luftmenge geschah durch die links auf der Fig. 2 schematisierte Anordnung. *R* bedeutet ein hoch (in einem höheren Stockwerk) gelegenes Reservoir. *H* ist ein besonders zu diesem Zweck konstruierter

Regulierhahn, V ein genau ausgemessener Glasballon, T ein meterlanges 5 cm weites mit einem Gemisch von Bimstein und Phosphorpentoxyd gefülltes Trockenrohr, F ein Filter. T und F haben zusammen einen zu vernachlässigenden Widerstand.

Vor einer Messung wurde zuerst V mit mit Wasserdampf gesättigter Luft aus dem Gasometer gefüllt. Nachher wurde der Hahn H so einreguliert, daß das Wasser ebensoschnell das Volumen V füllte, wie die Luft aus demselben bei geschlossenem Hahn h entwich, was daran zu kontrollieren war, daß das Manometer m seine Nullstellung behielt. Mit einer Stoppuhr wurde die Zeit bestimmt zwischen dem Durchgang des Wassermeniskus an den Marken x und z . Die Temperatur der fließenden Luft wurde oberhalb V und in dem Kasten K bestimmt. In dem Kasten war die Lufttemperatur t meistens $0,1$ bis $0,2^\circ$ tiefer als oberhalb V . Dank dem Umstande, daß alle Teile der Apparatur einschließlich Wasser und Luft sich auf Zimmertemperatur befanden, konnte damit gerechnet werden, daß die aus V kommende Luftmenge mit Wasserdampf von der dort gemessenen Temperatur gesättigt war. Beim Passieren des Rohres T dürfte die Luft vollständig getrocknet worden sein, denn es wurde immer darauf geachtet, daß im letzten Stück des Rohres T das Phosphorpentoxyd ganz trocken aussah. Es war also leicht, die Abnahme des Gasvolumens durch die Wasserdampfabsorption zu berechnen.

Es wurde mit zwei Lochweiten¹⁾ (L Fig. 1) $3,798 \pm 0,008$ und $2,729 \pm 0,003$ mm und mit zwei verschiedenen C -Platten vom Durchmesser $43,8 \pm 0,2$ bzw. $24,6 \pm 0,15$ mm gearbeitet.

Die einzige untersuchte Kapillare mündete in zwei kleine Glasballons, deren Ansätze a, b, c, d (Fig. 3) bei der Messung mit den bezüglichen Leitungen a, b, c, d (Fig. 2)

Fig. 3.

verbunden waren, während der Kasten K ausgeschaltet war. Die Kapillare lag während der Messung in einem Wasserbad. Die Kapillare hatte einen inneren Durchmesser von im Mittel $2,006$ mm, der in einer Kapillarenlänge von 193 mm auf 8μ

1) Der Rand des Loches war an der Mündung unter 45° nach außen gebrochen, so daß das Loch dort auf $0,2$ mm Länge konisch erweitert war. Die Lochweite ist für den weiteren Durchmesser angegeben.

genau konstant war. Die Kapillarenden waren zu Trichtern von 3,5 mm größter Öffnung und 4 mm Tiefe erweitert.

Lassen wir die Glasballons der Fig. 3 senkrecht auf der Papierebene stehende Zylinder und die die Kapillare darstellenden Geraden die Schnittlinien mit zwei parallelen Platten bedeuten, so kann die Fig. 3 auch unsere Vorrichtung zur Untersuchung der Luftbewegung in einem parallelepipedischen Kanal darstellen.

Die benutzte Stoppuhr war mit einer astronomischen Uhr verglichen worden. Als Manometer M diente teils ein in der Phys.-Techn. Reichsanstalt auf 0,5 Proz. genau absolut geeichtes Alkoholmikromanometer, teils ein mit diesem verglichenes empfindliches Manometer.

§ 2. Theorie.

Es soll hier — unter Voraussetzung 1. eines stationären Zustandes, 2. einer lamellaren, d. h. einer Poiseuilleschen Strömung und 3. eines Zeunerschen polytropen Verlaufes im Gase — die Beziehung zwischen der sekundlich durchströmenden Gasmenge V , der treibenden Druckdifferenz $p_1 - p_2$ und den geometrischen Dimensionen hergeleitet werden, und zwar werden die Berechnungen mit Bezug auf die drei in Frage kommenden Luftströmungen (I), (II) und (III) parallel geführt. Es bedeutet im folgenden:

(I) eine radiale Strömung zwischen den Ebenen $z = -a$ und $z = +a$, wobei die treibende Druckdifferenz $\pm (p_1 - p_2)$ zwischen den Zylinderflächen $x^2 + y^2 = r_1^2$ und $x^2 + y^2 = r_2^2$ wirksam ist;

(II) eine Strömung in der x -Richtung zwischen den Ebenen $z = -a$ und $z = +a$, und

(III) eine Strömung in der x -Richtung in einem Zylinder $y^2 + z^2 = R^2$. Bei (II) und (III) ist die treibende Druckdifferenz zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = l$ wirksam.

Sonstige Bezeichnungen:

- r Entfernung von der x -Achse,
- ϱ Entfernung von der x -Achse,
- σ Dichte,
- p Druck,
- $p = C \cdot \sigma^n$ Zeunersche Zustandsgleichung,
- η Koeffizient der inneren Gasreibung,

λ Gleitungskoeffizient,

u Gasgeschwindigkeit in einem fixen Punkte,

V Sekundlich vom ganzen Strom in den Fällen (I) und (III) und von einem 1 cm breiten Streifen des Stromes im Falle (II) beförderte Gasmenge.

Die Indizes 1, 2, 3 beziehen sich, wenn nicht anderes bemerkt wird, auf die Fälle (I), (II) und (III).

Die gemachten Voraussetzungen enthalten die Tatsache, daß keine Geschwindigkeitskomponente in der z - bzw. in der ϱ -Richtung liegt, und daß alle Isobarenflächen parallel zu jenen Flächen verlaufen, in denen die Drucke p_1 und p_2 herrschen.

Die in Frage kommenden Ausgangsgleichungen¹⁾ werden, mit Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen, in Eulerschen Koordinaten:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{dp}{dr} = \eta \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial z} \right], \quad \therefore \frac{\partial^2 (ur)}{\partial r \partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\sigma ur)}{\partial r} = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung),} \\ \text{und } \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \text{ (infolge der Annahme über die Isobarenflächen).} \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp}{dx} = \eta \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung),} \\ \text{und } \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \text{ (vgl. unter I).} \end{array} \right.$$

$$(III)^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp}{dx} = \eta \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) \right], \\ 0 = \frac{1}{3} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varrho}, \quad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varrho} = 0, \\ \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung),} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} = 0 \text{ (vgl. unter I).} \end{array} \right.$$

1) Über Grenzbedingungen vgl. unten.

2) Diesen Fall (mit $n = 1$ $\therefore$ isotherme Gasausdehnung) hat schon O. E. Meyer behandelt, Pogg. Ann. 7. p. 253. 1866.

Die vorletzte Gleichung jeder Gruppe kann mit Hilfe der Zustandsgleichung $p = C \cdot \sigma^n$ umgeformt werden zu bzw.:

$$(A) \quad \begin{cases} \text{(I)} & p(ru)^n = \text{Konst. bei konstantem } z, \\ \text{(II)} & p u^n = \text{Konst. „ „ } z, \\ \text{(III)} & p u^n = \text{Konst. „ „ } \varrho. \end{cases}$$

Da σ vom Druck abhängt, folgt aus der vorletzten Ausgangsgleichung jeder Gruppe, daß bzw. $\partial(ur)/\partial r$ und $\partial u/\partial x$ nicht genau gleich Null sind. Demgemäß kann in keiner Gruppe die zweite Gleichung genau erfüllt sein.

Wir können also die aufgestellten Bedingungen nur dann beibehalten, wenn wir uns mit einer Annäherungsrechnung begnügen, und zwar haben wir anzunehmen, daß in den obigen Differentialgleichungen $\partial(ur)/\partial r$ und $\partial u/\partial x$ unendlich klein von erster Ordnung sind. Mit Bezug hierauf lassen sich die ersten Ausgangsgleichungen folgendermaßen schreiben:

$$(B) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \frac{dp}{dr} + \sigma u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{(II)} & \frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{(III)} & \frac{dp}{dx} = \eta \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right). \end{cases}$$

Im Falle (I) führen wir noch eine Approximation ein. Das Glied $\partial^2 u/\partial z^2$ ist von der Größenordnung u/a^2 , während das zweite Glied von der Größenordnung u^2/r ist. Wenn wir also Größen von derselben Ordnung wie $u^2 a^2/r$ gegen u vernachlässigen, so erhält die Gleichung (I) (B) folgende Form:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{dp}{dr} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{array} \right.$$

Werden nun die Gleichungen (B) mit Bezug auf z bzw. ϱ von $z = 0$ bzw. $\varrho = 0$ aus integriert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad u &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left(-\frac{dp}{dr} \right) z^2 + A_1 z + B_1, \\ \text{(II)} \quad u &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) z^2 + A_2 z + B_2, \\ \text{(III)} \quad u &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \varrho^2 + B_3. \end{aligned}$$

Es gelten aber folgende *Grenzbedingungen*:

$$\text{für } z = 0 \quad \frac{du}{dz} = 0$$

und

$$\text{für } z = a \quad \text{bzw. } \varrho = R:$$

$$(C) \quad u = -\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{bzw.} \quad u = -\lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho}.$$

Nach der Konstantenbestimmung erhält man:

$$(D) \quad \begin{cases} \text{(I)} & u = \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dr} \right) [a^2 - z^2 + 2\lambda a], \\ \text{(II)} & u = \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) [a^2 - z^2 + 2\lambda a], \\ \text{(III)} & u = \frac{1}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) [R^2 - \varrho^2 + 2\lambda R]. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (A) und (D) folgt man:

$$(E) \quad \begin{cases} \text{(I)} & p \left[r \left(-\frac{dp}{dr} \right) \right]^n = k_1^n, \quad \therefore \frac{dp}{dr} = -\frac{k_1}{r p^{1/n}}, \\ \text{(II)} & p \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n = k_2^n, \quad \therefore \frac{dp}{dx} = -\frac{k_2}{p^{1/n}}, \\ \text{(III)} & p \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n = k_3^n, \quad \therefore \frac{dp}{dx} = -\frac{k_3}{p^{1/n}}. \end{cases}$$

Die Integration der Gleichungen (E) ergibt mit Rücksicht auf das Vorhandensein der Isobaren p_1 und p_2 :

$$(F) \quad \begin{cases} \text{(I)} & k_1 = \frac{n}{n+1} \cdot \left(p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{\log r_2/r_1}, \\ \text{(II)} & k_2 = \frac{n}{n+1} \cdot \left(p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{l}, \\ \text{(III)} & k_3 = \frac{n}{n+1} \cdot \left(p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{l}. \end{cases}$$

Schließlich erhält man die bezüglichen $\mathcal{V}$ -Werte durch Integration über die betreffende Einflußöffnung in der Isobarenfläche p_1 , indem:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad V_1 = 4\pi r_1 \int_0^a u \, dz \\ \qquad \qquad = \frac{4\pi}{3\eta} \frac{n}{n+1} \frac{p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}}}{p_1^{1/n}} \frac{1}{\log r_2/r_1} (a^3 + 3\lambda a^2), \\ \text{(II)} \quad V_2 = 2 \int_0^a u \, dz = \frac{2}{3\eta l} \frac{n}{n+1} \frac{p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}}}{p_1^{1/n}} (a^3 + 3\lambda a^2), \\ \text{(III)} \quad V_3 = 2\pi \int_0^R u \, \varrho \, d\varrho \\ \qquad \qquad = \frac{\pi}{8\eta l} \frac{n}{n+1} \frac{p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}}}{p_1^{1/n}} (R^4 + 4\lambda R^3). \end{array} \right.$$

Für den Fall, daß p_1 und p_2 nahe gleich sind, setzen wir $p_1 = p_2 + \varepsilon$ und $(n+1)/n = m$, und erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}}}{p_1^{1/n}} &= p_1 \left[1 - \left(\frac{p_1 - \varepsilon}{p_1} \right)^m \right] = p_1 \left[n \frac{\varepsilon}{p_1} - \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\varepsilon}{p_1} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{n+1}{n} (p_1 - p_2) \left[1 - \frac{1}{2n} \frac{p_1 - p_2}{p_1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Durch die Substitution in den Gleichungen (G) entstehen schließlich folgende approximativ geltende Formeln:

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{4\pi}{3\eta} \frac{1}{\log r_2/r_1} (p_1 - p_2) (a^3 + 3\lambda a^2) \left(1 - \frac{1}{2n} \frac{p_1 - p_2}{p_1} \right), \\ V_2 = \frac{2}{3\eta l} (p_1 - p_2) (a^3 + 3\lambda a^2) \left(1 - \frac{1}{2n} \frac{p_1 - p_2}{p_1} \right), \\ V_3 = \frac{\pi}{8\eta l} (p_1 - p_2) (R^4 + 4\lambda R^3) \left(1 - \frac{1}{2n} \frac{p_1 - p_2}{p_1} \right). \end{array} \right.$$

Die Formeln (G) und (H) gelten für den Fall einer Poiseuilleschen Strömung, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird. Die Formeln (H) gelten für inkompressible Flüssigkeiten, wenn der letzte, binomische Faktor = 1 gesetzt wird.

§ 3. Beobachtungsergebnisse.

Die Beobachtungen sind zunächst in den Tab. 1 und 2 wiedergegeben. Außerdem sind die Briggsschen Logarithmen der $(p_1 - p_2)$ - und der V -Werte in das Diagramm 1 eingetragen.¹⁾ Die Kurven verbinden Punkte, welche zu konstanten geometrischen Eigenschaften der Stromwege gehören. Die an den Kurven vermerkten Zahlen geben die Nummern der betreffenden Beobachtungen in den Tabellen an.

Tabelle 1.

Versuche mit der Kapillare.

Ver- such Nr.	Baro- meter- druck	Temp.	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec	Ver- such Nr.	Baro- meter- druck	Temp.	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec
Trockene Luft					Trockener Wasserstoff				
1	758	19,9	3,64	3,931	22	762	19,2	26,5	56,1
2	758	19,9	4,30	4,648	23	762	19,2	26,5	56,0
3	758	19,9	4,30	4,640	24	762	19,2	26,4	55,8
4	758	19,9	7,02	7,353	25	762	19,2	22,10	47,6
5	758	19,9	7,03	7,353	26	762	19	22,05	47,5
6	758	19,9	11,97	11,86	27	762	19	15,77	34,7
7	758	19,9	12,02	11,91	28	762	19	15,75	34,6
8	758	19,9	15,605	15,21	29	762	19	50,21	100,3
9	758	19,9	15,60	15,20	30	762	19	50,11	100,0
10	757	19,5	22,16	20,9	31	762	19,8	62,4	123,1
11	757	19,5	22,16	20,8	32	762	19,8	62,1	123,6
12	757	19,5	41,76	33,6	33	762	19,8	72,1	134,7
13	757	19,5	79,8	51,0	34	762	19,6	72,9	135,4
14	757	19,5	68,7	46,3	35	762	19,6	72,9	135,2
15	757	19,5	52,1	39,7	36	762	19,6	58,0	111,3
16	757	19,5	39,0	31,9	37	762	19,5	57,9	110,8
17	757	19,5	52,5	28,0	38	762	19,5	43,7	89,0
Feuchte Luft					39	762	19,5	43,7	88,6
18	752	16,1	3,96	4,25	40	762	19,5	35,34	72,9
19	752	16,1	3,96	4,25	41	762	19,5	35,36	72,8
20	752	16,1	8,44	8,87	42	755	16,6	7,103	15,6
21	752	16,1	8,44	8,87	43	755	16,6	7,103	15,62

1) Die Beobachtungspunkte 51—54 sind alle um eine Abszissenlänge von 0,8 nach rechts verschoben eingetragen.

Tabelle 2.

Bewegung trockener Luft zwischen Platten.

Versuch Nr.	$\frac{r_2}{r_1}$	$2a$ in μ	Barometer- druck	Temperatur	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec	Versuch Nr.	$\frac{r_2}{r_1}$	$2a$ in μ	Barometer- druck	Temperatur	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec
Bewegungsrichtung von r_1 nach r_2 , d. h. nach außen							75	24,6 2,729	90,3	755	19,0	43,0	3,602
44	43,8 2,729	178,8	758	20,0	4,50	2,422	76	"	90,3	755	19,0	62,5	5,21
45	"	178,8	758	20,0	4,60	2,432	77	"	90,3	755	19,0	21,48	1,805
46	"	178,8	758	20,5	6,98	3,747	78	"	90,3	755	19,0	21,18	1,802
47	"	178,8	758	20,5	10,34	5,505	79	"	90,3	755	19,0	103,1	8,510
48	"	178,8	758	20,7	20,35	10,52	80	"	146,3	755	19,0	11,54	4,07
49	"	178,8	758	20,8	16,53	8,69	81	"	146,3	755	19,0	17,18	6,06
50	"	178,8	758	20,8	16,28	8,53	82	"	146,3	755	19,0	28,50	9,89
51	"	70,0	759	21,5	18,49	0,629	83	"	146,3	755	19,0	52,6	17,79
52	"	70,0	759	21	78,7	2,668	84	"	146,3	755	19,0	52,7	17,78
53	"	70,0	759	21	77,60	2,655	85	43,8 2,729	140,5	745	15,1	15,98	3,99
54	"	70,0	759	21	51,17	1,759	86	"	140,5	745	15,1	35,6	8,8
55	"	272,3	754	21,1	19,34	30,35	87	"	140,5	745	15,1	34,4	8,45
56	"	272,3	754	21,1	9,89	16,77	88	"	140,5	745	15,1	24,25	6,04
57	"	272,3	754	21,1	9,78	16,69	89	"	140,5	745	15,1	32,8	8,09
58	"	272,3	754	21,1	5,89	10,48	90	"	140,5	745	15,1	54,7	13,15
59	"	272,3	754	21,0	5,77	10,34	91	"	140,5	745	15,2	16,00	4,03
60	"	272,3	754	21,0	1,76	3,27	92	"	140,5	745	15,2	10,35	2,6
61	"	272,3	759	19,2	8,86	15,47	Bewegungsrichtung von r_2 nach r_1 , d. h. nach innen						
62	"	272,3	759	19,2	22,23	32,84							
63	"	272,3	759	19,2	30,6	44,65							
64	"	272,3	759	19,2	49,6	71,55							
65	43,8 3,798	99	749	18	16,29	1,748	93	43,8 2,729	140,5	745	15,2	16,65	4,05
66	"	99	749	18	35,73	3,838	94	"	140,5	745	15,2	38,8	8,83
67	"	99	749	18	65,50	7,04	95	"	140,5	745	15,1	25,25	5,96
68	"	99	749	18	65,50	7,005	96	"	140,5	745	15,1	35,5	8,17
69	"	146	764	16,5	8,82	2,58	97	"	140,5	745	15,1	62,6	13,21
70	"	146	764	16,5	12,19	4,51	98	"	140,5	745	15,1	16,70	4,055
71	"	146	764	16,5	35,2	12,82	99	"	140,5	745	15,1	10,70	2,63
72	"	146	764	16,5	50,0	17,94	100	"	194	756	17,2	6,17	4,39
73	"	146	764	16,5	66,40	23,48	101	"	194	756	17,2	9,71	6,57
74	"	146	764	16,5	66,43	23,40							

Tabelle 2. (Fortsetzung.)

Versuch Nr.	$\frac{r_2}{r_1}$	2α in μ	Barometer- druck	Temperatur	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec	Versuch Nr.	$\frac{r_2}{r_1}$	2α in μ	Barometer- druck	Temperatur	$p_1 - p_2$ mm aq	V ccm/sec
Bewegungsrichtung von r_2 nach r_1 , d. h. nach innen							110	$\frac{43,8}{2,729}$	194	756	17,2	50,00	23,85
102	$\frac{43,8}{2,729}$	194	756	17,2	9,71	6,56	111	"	194	756	17,2	50,05	23,85
103	"	194	756	17,2	13,79	8,80	Strömung im parallelepipedischen Kanal						
104	"	194	756	17,2	8,47	5,87							
105	"	194	756	17,2	15,23	9,58	112		800	756	16,5	1,59	9,18
106	"	194	756	17,2	15,28	9,55	113		800	756	16,5	2,68	15,11
107	"	194	756	17,2	25,12	14,26	114		800	756	16,5	6,44	35,20
108	"	194	756	17,2	25,12	14,20	115		800	756	16,5	10,41	53,88
109	"	194	756	17,2	33,1	17,53	116		800	756	16,5	19,00	93,12

Die genaue Gültigkeit der Formeln (H) würde sich im Diagramm 1 teils durch einen infolge der Kleinheit der Größe $(p_1 - p_2)/p_1$ fast geradlinigen Verlauf der bezüglichen Kurven in 45° Neigung gegen die Achsen, teils in einer von den geometrischen Dimensionen des Luftweges und von dem Reibungskoeffizienten bedingten Lage der betreffenden Geraden zeigen.

Zunächst mache ich darauf aufmerksam, daß die Kurven nicht, jedenfalls nicht in ihrer ganzen Ausdehnung, Geraden sind, daß aber ihre ersten Teile links offenbar recht genau gerade sind. Ich habe nach den Formeln (H)¹⁾ die zu erwartenden Schnittpunkte der theoretischen Kurven mit der Geraden $y = 1,301$, die $p_1 - p_2 = 20$ mm aq entspricht, ausgerechnet und die betreffenden Punkte als Kreuze im Diagramm 1 eingetragen.

Ich rechne mit $\lambda = 0$, mit den Reibungskoeffizienten

$$\eta_{\text{Luft}} = 10^{-4} \cdot 1,920 (1 + 0,0025 (t - 20)) \text{ C.G.S.}$$

und $\eta_{\text{H}_2} = 10^{-5} \cdot 8,95 \text{ C.G.S.}$

und mit den gemessenen 2α -Werten, die in der Tab. 1 an-

1) Und mit der Annahme $1 < n < 1,4$. Welchen n -Wert man wählt, ist bei der in Frage kommenden Genauigkeit recht gleichgültig. Die theoretische Kurve weicht von einer Geraden im betr. Gebiet äußerst wenig ab.

gegeben werden.¹⁾ Die größte Fehlerquelle liegt in der Unsicherheit dieser 2α -Werte, welche etwa 2μ betragen kann. Danach wäre in den ausgerechneten Logarithmen Fehler bis auf 0,02 und 0,03 zu erwarten.

Diagramm 1.

Im Diagramm 1 schwanken die Entfernungen der Kreuze von den betreffenden Geraden zwischen 0,003 und 0,035 mit

1) Die Länge der gleichmäßigen Kapillare war 193 mm. Ein effektive Länge von 195 mm wurde berechnet unter der Annahme daß dp/dx in einem Ansatzquerschnitt mit dem Radius q den Wert $\frac{dp}{dx} = \frac{q_1^4}{q^4} \left(\frac{dp}{dx} \right)_1$ hatte, wo q_1 und $(dp/dx)_1$ sich auf das gleichmäßige Rohr beziehen.

verschiedenen Vorzeichen, d. h. Fehler von der zu erwartenden Größe. Es kann demnach behauptet werden, daß die Formeln (H), mit $\lambda = 0$ gesetzt, sehr gut die Luftbewegung in den betreffenden Kanülen darstellen, solange die Luftgeschwindigkeit klein ist. Ob die Gültigkeit der Formeln bei bestimmter Luftgeschwindigkeit aufhört und bei welcher, das läßt sich aus meinen Messungen nicht genau feststellen. Es ist indessen bemerkenswert, daß die Punkte des Diagramms 1 folgende Konstruktion der sie verbindenden Kurven gestatten:

Ich zog in möglichst guter Berührung mit den ersten Punkten links gewisse Geraden, G_1 unter 45° Neigung zu den Koordinatenachsen. Durch weiter nach rechts folgende Punktreihen wurden andere Geraden G_2 gezogen und schließlich, wenn hierdurch nicht alle Punkte berücksichtigt wurden, wurden die letzten Punkte rechts durch gestrichelte Kurven verbunden. Die Winkelkoeffizienten der Geraden G_1 war also genau $= 1$, die Koeffizienten γ_2 der Geraden G_2 konnten in den Fällen, wo es sich um die Strömungsart I handelte, gleich 1,065 gewählt werden; zur Strömungsart II gehört $\gamma_2 = 1,11$, im Falle der Luftströmung durch die Kapillare wurde $\gamma_2 = 1,15$ und im Falle der Wasserstoffströmung durch die Kapillare $\gamma_2 = 1,10$. Die betreffenden Winkelkoeffizienten γ bedeuten, daß unter den betreffenden Umständen die Beziehung zwischen $(p_1 - p_2)$ und V folgende Form hat

$$p_1 - p_2 = A \cdot V^\gamma, \text{ wo } A \text{ eine Konstante ist.}$$

Es ist nun recht interessant die Schnittpunkte der Geraden G_1 und G_2 zu studieren. Da diese Punkte den Übergang von Poiseuillescher zu einer anderen Strömungsart markieren, darf man vermuten, daß für sie eine Reynoldssche Beziehung gültig ist. D. h. wenn der einem derartigen Punkte entsprechende V -Wert mit V' bezeichnet wird, so muß gelten:

$$(J) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{V_1'}{2\pi r_1 \cdot 2a} = C_1 \frac{\eta}{\sigma \cdot a} \cdot f(r_2), \\ \text{(II)} \quad \frac{V_2'}{2a} = C_2 \frac{\eta}{\sigma \cdot a}, \\ \text{(III)} \quad \frac{V_3'}{\pi R^2} = C_3 \frac{\eta}{\sigma \cdot R}. \end{array} \right.$$

Als linke Glieder dienen hier Ausdrücke für die mittlere Gasgeschwindigkeit im betreffenden Kanal, mit Ausnahme für den Fall I. In diesem Fall und unter Voraussetzung einer Strömung nach außen ist es von vornherein wahrscheinlich, daß bei steigender Geschwindigkeit die neue Strömungsart zuerst an der Fläche $x^2 + y^2 = r_1^2$, wo die größten Geschwindigkeiten vorkommen, einsetzt, so daß es hauptsächlich auf das Geschwindigkeitsmittel an dieser Fläche ankommt, ob die Strömung die Poiseuillesche Form behält. Demnach ist wahrscheinlich $f(r_2) = 1$.

Es ergibt sich also aus (J) für eine Strömung nach außen:

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad V_1' = C_1 \frac{4\pi r_1 \eta}{\sigma}, \\ \text{(II)} \quad V_2' = C_2 \frac{2\eta}{\sigma}, \\ \text{(III)} \quad V_3' = C_3 \frac{\pi \eta R}{\sigma}. \end{array} \right.$$

Was nun zuerst V_3' betrifft, so ergibt sich aus dem Diagramm 1:

$$V_{3' \text{ Luft}} = 6,3 \quad \text{und} \quad V_{3' \text{ H}_2} = 43.$$

Nach (K) sollte gelten:

$$\frac{V_{3' \text{ H}_2}}{V_{3' \text{ Luft}}} = \frac{\eta_{\text{H}_2} \cdot \sigma_{\text{Luft}}}{\eta_{\text{Luft}} \cdot \sigma_{\text{H}_2}},$$

was auch zutrifft, denn die beiden Quotienten sind bzw.:

$$\frac{43}{6,3} = 6,8 \quad \text{und} \quad \frac{8,95}{19,2} \cdot 14,4 = 6,7.$$

Die Konstante C_3 berechnet sich nach Substitution der oben angegebenen Werte von η , σ und R zu 127.

Die von Reynolds¹⁾ für Flüssigkeiten und von Ruckes²⁾ für Luft gefundene kritische Konstante $C = 2000$ bezieht sich auf im Verhältnis zur Weite sehr lange Röhren und definiert eine Geschwindigkeitsgrenze, oberhalb deren die Reibung auf

1) O. Reynolds, Phil. Trans. 1883.

2) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25. p. 983. 1908.

einmal sehr viel größer wird als unterhalb. Meine Versuche mit der Kapillare ergänzen die Ruckeschen, indem sie ein Beispiel mit einer ganz kurzen Kapillare geben. Die Reibungsveränderung tritt hier nicht so schroff auf.

Die Messungen 112—116 gehören zur Stromart II. Die Kanaldimensionen waren: Länge 15 cm, Breite 3 cm, Weite (2a) $0,08 \pm 0,005$ cm. Die schlechte Übereinstimmung mit der Berechnung nach der Formel (H) dürfte mit der wenig genauen Parallelität der Kanalwände, die aus Nickelblechen bestanden, zusammenhängen. Aus der Formel (K) (II) und der Kurve 112 bis 116 berechnet sich $C_2 = 96$.

Die Hauptuntersuchungen galten der Strömungsart (I). Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die Strömung nach innen offenbar größere Neigung zur Wirbelbildung hat, als die umgekehrte. An den Kurven 100—111 und 93—99, die zu einer Strömung nach innen gehören, ist nämlich überhaupt keine Poiseuillesche Strömung zu erkennen.¹⁾ Die letzte Kurve ist besonders geeignet den Unterschied von der Strömung nach außen zu verdeutlichen, weil sie zu derselben Plattenstellung wie die Kurve 85—92 (mit Strömung nach außen) gehört.

Auffallend gut bestätigt sich²⁾ die von der Formel (K) (I) verlangte Unabhängigkeit der V_1' -Werte von α und von r_2 .

Für $2 r_1 = 2,729$ mm erhält man im Mittel:

$$^{10}\log V_1' = 0,869, \quad \therefore V_1' = 7,4.$$

Aus der Kurve 69—74 ergibt sich

$$\text{für } 2 r_1 = 3,798 \text{ mm : } V_2' = 10,8.$$

Die beiden V_1' -Werte sollten sich laut Formel (K) (I) wie die betreffenden Radien r_1 verhalten. Die beiden Verhältnisse sind:

$$\frac{10,8}{7,4} = 1,46 \quad \text{und} \quad \frac{3,798}{2,729} = 1,39,$$

d. h. die Übereinstimmung mit der Formel ist befriedigend.

1) Es ist hervorzuheben, daß mittels Interferenzerscheinungen festgestellt wurde, daß die gebrauchten Druckdifferenzen $p_1 - p_2$ nicht einmal um $25 \mu\mu$ die gegenseitige Lage der Platten C und D veränderten.

2) Siehe Diagramm 1.

Aus der Formel (K) berechnet sich die Konstante C_1 zu $C_1 = 27$. Die Konstante C_2 ist kleiner als C_3 , und C_1 ist noch kleiner. Dies hängt wohl damit zusammen, daß der Luftstrom im Fall (III) allseitig geführt wird, während er im Fall (II) nur weniger gut geführt ist, und am wenigsten im Fall (I).

Berlin-Siemensstadt, Phys. Chem. Laboratorium der
Siemens & Halske A.-G., im Januar 1914.

(Eingegangen 26. Januar 1914.)