Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition.

Von **Hans Hahn** in Czernowitz.

Es wurde vor kurzem von É. Borel eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition angegeben,[1]) die einerseits bei geschränktem Integranden in manchen Fällen zum Ziele führt, in denen die Riemannsche Definition selbst versagt (sie liefert dann denselben Integralwert, wie die Lebesguesche Definition), anderseits auch in Fällen von nicht geschränkten Integranden anwendbar bleibt, und dann, im Gegensatze zur Lebesgueschen Definition, auch auf bedingt konvergente Integrale führt, ähnlich wie Harnacks Definition der uneigentlichen Integrale, von der sie eine glückliche Verallgemeinerung darstellt. Da es mir scheint, daß in der vorliegenden Literatur, soweit sie mir bekannt wurde, die Frage nach der Tragweite dieser Borelschen Definition noch nicht hinlänglich geklärt ist, werden die folgenden Bemerkungen über diesen Gegenstand vielleicht nicht überflüssig sein.

§ 1.

Zunächst sei Borels Erweiterung der Riemannschen Integraldefinition, und zwar gleich in etwas verallgemeinerter Form[2]) wiedergegeben. Sie lautet:

Sei im Intervalle $<a, b>$ eine Funktion $f(x)$ und eine Punktmenge $\mathfrak{K}$ des Inhaltes 0 gegeben (sie werde kurz als die Singularitätenmenge bezeichnet) von folgender Eigenschaft: wird die Menge $\mathfrak{K}$ irgendwie in eine Menge sich nicht überdeckender Intervalle J eingeschlossen,[3]) so ist außerhalb der Intervalle J die Funktion $f(x)$ definiert und geschränkt. Bei jeder beliebigen Wahl

[1]) C. R. **150** (1910) S. 375, 508; Journal de math. (6) 8, (1912), S. 201.

[2]) Borel setzt die gleich einzuführende Singularitätenmenge als abzählbar voraus, während hier nur angenommen wird, sie habe den Inhalt 0. Der Begriff des Inhaltes ist stets im Sinne von Lebesgue zu verstehen.

[3]) Wir sagen, eine Menge $\mathfrak{K}$ sei in eine Intervallmenge J eingeschlossen, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ im Innern eines Intervalles J liegt und jedes Intervall J mindestens einen Punkt von $\mathfrak{K}$ enthält. Die Intervalle J betrachten wir als sogenannte offene Intervalle, d. h. wir rechnen die Endpunkte nicht zum Intervalle.

der die Menge $\mathfrak{K}$ einschließenden Intervallmenge J gelte folgendes: teilt man das Intervall $< a, b >$ durch Einschalten endlich vieler Zwischenpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

deren keiner einem Intervalle J angehöre, in n Teile und bezeichnet mit h_i die Länge des Teilintervalls $< x_{i-1}, x_i >$, vermindert um die Gesamtlänge [1]) der in dieses Teilintervall fallenden Stücke der Intervalle J, so möge, wie immer auch der Punkt ξ_i im Teilintervalle $< x_{i-1}, x_i >$ außerhalb der Intervalle J gewählt werden mag, die Summe

$$S(J) = \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i) \tag{1}$$

einen Grenzwert haben, wenn die Anzahl der eingeschalteten Teilpunkte x_i so über alle Grenzen wächst, daß die größte der Zahlen h_i gegen Null geht. Hat nun dieser Grenzwert selbst einen Grenzwert, wenn man die Gesamtlänge der die Singularitätenmenge einschließenden Intervalle J in beliebiger Weise gegen Null gehen läßt, so wird dieser letztere Grenzwert als das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

So definierte Integrale werden wir kurz als Integrale im Sinne von Borel bezeichnen und für sie, wo sie von anders definierten Integralen zu unterscheiden sind, schreiben $(B)\int_a^b f\,dx$. Ebenso wird das Zeichen $(R)\int$ Integrale im Sinne von Riemann, das Zeichen $(L)\int$ Integrale im Sinne von Lebesgue bedeuten.

Wir werden nun die eben mitgeteilte Borelsche Definition etwas näher betrachten. Sei J eine die Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge, und sei p die bezüglich des Intervalles $< a, b >$ zur Intervallmenge J komplementäre Punktmenge, also jene in $< a, b >$ liegende abgeschlossene Punktmenge, deren punktfreie Intervalle die Intervalle J sind. Die in der Summe (1) auftretende Zahl h_i ist dann nichts anderes, als der Inhalt des ins Intervall $< x_{i-1}, x_i >$ fallenden Teiles von p.

---

[1]) Unter der Gesamtlänge einer Menge sich nicht überdeckender Intervalle verstehen wir die Summe der Längen aller dieser Intervalle. Zu jeder beliebigen Intervallmenge gibt es eine äquivalente (d. h. dieselben Punkte bedeckende) Menge sich nicht überdeckender Intervalle. Unter der Gesamtlänge einer beliebigen Intervallmenge werde die Gesamtlänge der äquivalenten Menge sich nicht überdeckender Intervalle verstanden.

Existiert, wie es in der Borelschen Definition verlangt wird, der Grenzwert von $S(J)$, wenn die größte der in $S(J)$ auftretenden Zahlen h_i gegen 0 geht, so wollen wir diesen Grenzwert als das über die Menge p erstreckte Riemannsche Integral von f bezeichnen:[1])

$$(R)\int_p f\,dx = \lim S(J). \tag{2}$$

Diese Definition ist gleichbedeutend mit folgender: ist $\eta > 0$ beliebig gegeben, so gibt es (bei festgehaltener Intervallmenge J) ein $\rho > 0$ derart, daß, sobald in $S(J)$ alle $h_i < \rho$ sind, die Ungleichung gilt:

$$\left| S(J) - (R)\int_p f\,dx \right| < \eta.$$

Existiert nun für jede die Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge J das über die komplementäre Menge p erstreckte Integral $(R)\int_p f\,dx$, so ist das Borelsche Integral, wenn vorhanden, in folgender Weise charakterisiert: ist $\eta > 0$ beliebig gegeben, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß, sobald die Gesamtlänge von J kleiner als ε ist, die Ungleichung gilt:

$$\left| (R)\int_p f\,dx - (B)\int_a^b f\,dx \right| < \eta.$$

Wir können leicht zeigen, daß so wie bei den gewöhnlichen Integralen im Sinne **Riemanns** auch für die Existenz von $(R)\int_p f\,dx$ notwendig[2]) ist, daß **für jedes** $k > 0$ **die Menge** $\mathfrak{M}$ **aller jener Punkte von** p, **in denen der Unstetigkeitsgrad von** f **bezüglich** p **einen Wert** $\geqq k$ **hat, den Inhalt 0 habe.** Bezeichnet in der Tat p_i den ins Intervall $< x_{i-1}, x_i >$ fallenden Teil von p und sind M_i und m_i obere und untere Grenze von f auf p_i, so muß im Falle der Existenz von $(R)\int_p f\,dx$ die Gleichung bestehen:

$$(R)\int_p f\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i) = \lim \sum_{i=1}^{n} h_i M_i = \lim \sum_{i=1}^{n} h_i m_i, \tag{3}$$

es muß also:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} h_i (M_i - m_i) = 0 \tag{4}$$

---

[1]) Diese schon von W. H. Young (Phil. Trans. Royal Soc. Ser. A, **204** (1905), S. 221) diskutierte Definition deckt sich, wie man leicht sieht, mit der von J. Pierpont gegebenen: The theory of functions of real variables, Vol. I, S. 506 ff.

[2]) Die Bedingung ist auch hinreichend.

sein. Angenommen nun, es sei der Inhalt μ von $\mathfrak{M}$ nicht Null. Da für jede Menge p_i, die einen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthält, $M_i - m_i \geqq k$ ist, hätte man also stets:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i (M_i - m_i) \geqq \mu . k$$

im Gegensatze zu (4).

Es folgt daraus in bekannter Weise weiter, daß **für die Existenz von** $(R)\int\limits_p f\,dx$ **notwendig**[1]) **ist, daß die Menge aller Punkte von** p**, in denen** f **unstetig ist bezüglich** p**, den Inhalt 0 habe.**

Daraus aber folgt leicht, daß wenn $(R)\int\limits_p f\,dx$ existiert, f meßbar auf p ist: in der Tat, schließen wir die Menge der Unstetigkeitspunkte von f bezüglich p in eine Menge von Intervallen Δ ein, so ist f auf der Komplementärmenge $\mathfrak{R}$ der Δ bezüglich p stetig und daher meßbar. Läßt man die Intervallmenge Δ eine Folge $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ durchlaufen, so daß die Gesamtlänge von Δ_n gegen 0 geht, so ist, abgesehen von einer Menge des Inhaltes 0, die Menge p Vereinigungsmenge der Komplementärmengen $\mathfrak{R}_n$ von Δ_n bezüglich p. Da aber f auf jeder Menge $\mathfrak{R}_n$ meßbar ist, folgt hieraus, daß f auch auf p meßbar ist.

Beschränken wir uns nun in § 1 weiterhin auf **geschränkte** Funktionen f, so folgt also aus der Existenz von $(R)\int\limits_p f\,dx$ auch die von $(L)\int\limits_p f\,dx$, und zwar ist:

$$(R)\int\limits_p f\,dx = (L)\int\limits_p f\,dx.$$

In der Tat, wenden wir wieder die eben benützten Bezeichnungen p_i, M_i, m_i an, so ist:

$$(L)\int\limits_p f\,dx = \sum_{i=1}^{n} (L)\int\limits_{p_i} f\,dx$$

und somit:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\, m_i \leqq (L)\int\limits_p f\,dx \leqq \sum_{i=1}^{n} h_i\, M_i,$$

es folgt also aus (3) die Behauptung.

---

[1]) **Auch diese Bedingung ist hinreichend.**

Daß auch bei geschränktem f die Borelsche Definition anwendbar bleibt in Fällen, in denen die Riemannsche Definition versagt, zeigt die Funktion f, die in allen irrationalen Punkten von $< a, b >$ den Wert 0, in allen rationalen den Wert 1 hat. Versteht man hier unter der Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ die Menge der rationalen Punkte, so ist bei beliebiger Wahl der Intervalle J auf der zu den Intervallen J komplementären abgeschlossenen Menge p durchweg $f = 0$, die Summen $S(J)$ haben also stets den Wert 0 und es ist somit nach der Borelschen Definition $\int\limits_a^b f\,dx = 0$.

Weiter ist bei geschränktem f klar, daß aus der Existenz von $(B)\int\limits_a^b f\,dx$ auch die Existenz von $(L)\int\limits_a^b f\,dx$ und das Bestehen der Gleichung:

$$(B)\int\limits_a^b f\,dx = (L)\int\limits_a^b f\,dx \tag{5}$$

folgt.

In der Tat, bezeichne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$. Zu jeder dieser Zahlen gibt es eine die Singularitätenmenge einschließende Intervallmenge J_ν, deren Gesamtlänge $< \varepsilon_\nu$ ist. Die zu J_ν komplementäre abgeschlossene Menge $p^{(\nu)}$ hat einen Inhalt $> b - a - \varepsilon_\nu$ und es ist auf ihr, wie wir schon gesehen haben, f meßbar. Das Intervall $< a, b >$ ist Vereinigungsmenge der Mengen $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(\nu)}, \ldots$ und einer Menge des Inhaltes 0, woraus man sofort folgert, daß f in $< a, b >$ meßbar, und daher integrierbar im Sinne von Lebesgue ist. Nach einem bekannten Satze gilt nun aber, weil der Inhalt von $p^{(\nu)}$ gegen den des Intervalles $< a, b >$ konvergiert,

$$\lim_{\nu=\infty} (L)\int\limits_{p^{(\nu)}} f\,dx = (L)\int\limits_a^b f\,dx. \tag{6}$$

Nun ist aber, wie wir sahen:

$$(L)\int\limits_{p^{(\nu)}} f\,dx = (R)\int\limits_{p^{(\nu)}} f\,dx \tag{7}$$

und zufolge der Borelschen Definition ist:

$$(B)\int\limits_a^b f\,dx = \lim_{\nu=\infty} (R)\int\limits_{p^{(\nu)}} f\,dx. \tag{8}$$

Aus (6), (7) und (8) aber folgt sofort die behauptete Gleichung (5).

Gleichung (5) lehrt nun auch (zunächst bei geschränktem f) sofort, daß der Wert eines durch die Borelsche Definition gelieferten Integrales von der Wahl der Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ unabhängig ist in dem Sinne, daß wenn bei verschiedener Wahl der Singularitätenmenge der das Borelsche Integral definierende Grenzwert vorhanden ist, er für alle diese Wahlen der Singularitätenmenge denselben Wert hat.

Anderseits ist aber auch bei geschränkten Integranden die Borelsche Definition keineswegs mit der Lebesgueschen äquivalent: es kann im Sinne von Lebesgue ein Integral vorhanden sein, ohne daß auf Grund der Borelschen Definition ein Integral vorhanden ist. Wir zeigen dies an folgendem Beispiele:

Sei im Intervalle $< a, b >$ eine nirgends dichte perfekte Menge $\mathfrak{A}$ gegeben, deren Inhalt $\neq 0$ ist und es habe f in allen Punkten von $\mathfrak{A}$ den Wert 1, sonst den Wert 0. Dann existiert $(L)\int\limits_a^b f\,dx$ und ist gleich dem Inhalt von $\mathfrak{A}$. Wir wenden nun die Borelsche Definition auf f an. Da die Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ den Inhalt 0 haben muß, ist der Inhalt der Menge $\mathfrak{A}^*$ der nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{A}$ nicht 0; da aber der Inhalt einer Menge die obere Grenze der Inhalte der abgeschlossenen Teile dieser Menge ist, gibt es in $\mathfrak{A}^*$ einen abgeschlossenen Teil $\overline{\mathfrak{A}}$, dessen Inhalt $\neq 0$ ist. Seien (x'_ν, x''_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die bezüglich des Intervalles $< a, b >$ zu $\overline{\mathfrak{A}}$ komplementären Intervalle (die punktfreien Intervalle von $\overline{\mathfrak{A}}$). Die Länge des Intervalles (x'_ν, x''_ν) werde abkürzend mit $2\,\delta_\nu$ bezeichnet; wir betrachten in (x'_ν, x''_ν) die Punkte

$$x'_{\nu,\mu} = x'_\nu + \frac{\delta_\nu}{\mu},\quad x''_{\nu,\mu} = x''_\nu - \frac{\delta_\nu}{\mu}\quad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Da $\mathfrak{A}$ nirgends dicht ist, so ist der Inhalt des ins Intervall $(x'_{\nu,\mu+1}, x'_{\nu,\mu})$ oder $(x''_{\nu,\mu}, x''_{\nu,\mu+1})$ fallenden Teiles von $\mathfrak{A}$ kleiner als die Länge des betreffenden Intervalles und da $\mathfrak{K}$ den Inhalt 0 hat, so gibt es also in jedem Intervalle $(x'_{\nu,\mu+1}, x'_{\nu,\mu})$ einen Punkt $\xi'_{\nu,\mu}$, in jedem Intervalle $(x''_{\nu,\mu}, x''_{\nu,\mu+1})$ einen Punkt $\xi''_{\nu,\mu}$, der weder zu $\mathfrak{A}$ noch zu $\mathfrak{K}$ gehört. Fügen wir zu $\overline{\mathfrak{A}}$ noch die Menge aller Punkte $\xi'_{\nu,\mu}, \xi''_{\nu,\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots)$ hinzu, so entsteht eine abgeschlossene Menge $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, die mit $\mathfrak{K}$ keinen Punkt gemein hat. Da aber $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ abgeschlossen ist, liegt nun jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ im Inneren eines Intervalles, das keinen Punkt von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ enthält. Es kann also eine die Menge $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge J so gewählt werden, daß alle Punkte von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ außerhalb J liegen. Für die mit Bezug auf eine solche Intervallmenge J gebildeten Summen $S(J)$ kann aber der beim Borelschen Verfahren verlangte Grenzwert nicht existieren.

Denn bezeichnet p die zur Intervallmenge J komplementäre abgeschlossene Menge, so existiert, wie wir gesehen haben, dieser Grenzwert (das Riemannsche Integral über p) nur dann, wenn die Menge der Punkte, in denen der Unstetigkeitsgrad von f bezüglich p einen Wert $\geqq k$ hat, für jedes $k > 0$ vom Inhalte 0 ist. Hier nun ist $\overline{\mathfrak{A}}$ Teil von p. Ferner war $\mathfrak{A}$ Teil von $\overline{\mathfrak{A}}$ und jeder Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist Häufungspunkt von Punkten $\xi'_{\nu,\mu}$ oder $\xi''_{\nu,\mu}$. In allen Punkten von $\mathfrak{A}$ nun ist $f = 1$, in allen Punkten $\xi'_{\nu,\mu}$ oder $\xi''_{\nu,\mu}$ aber ist $f = 0$. In jedem Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist also der Unstetigkeitsgrad von f bezüglich p gleich 1, und da $\overline{\mathfrak{A}}$ nicht den Inhalt 0 hat, ist unsere Behauptung erwiesen.

Wir sehen also, daß die Borelsche und die Lebesguesche Integraldefinition auch bei geschränktem Integranden nicht äquivalent sind: existiert das Integral im Sinne von Borel, so auch im Sinne von Lebesgue und beide Definitionen ergeben denselben Wert. Doch kann sehr wohl ein Integral im Sinne von Lebesgue vorhanden sein, ohne daß ein Integral im Sinne von Borel vorhanden wäre.

Doch kann man, bei geschränktem Integranden, die Borelsche Definition so modifizieren, daß sie mit der Lebesgueschen völlig äquivalent wird. Diese modifizierte Definition lautet so:

Sei die Funktion f so beschaffen, daß, wie klein $\varepsilon > 0$ auch sein mag, es in $< a, b >$ eine abgeschlossene Menge p gibt, deren Inhalt $> b - a - \varepsilon$ ist und für die das Integral $(R)\int_p f\,dx$ existiert. Es gibt dann eine Zahl J derart, daß, sobald ε hinlänglich klein ist, für jede abgeschlossene Menge p, deren Inhalt $> b - a - \varepsilon$ ist und auf der $(R)\int f\,dx$ existiert, die Ungleichung gilt:

$$\left|(R)\int_p f\,dx - J\right| < \eta \quad (\eta > 0 \text{ beliebig gegeben});$$

diese Zahl J wird als das Integral $(B^*)\int_a^b f\,dx$ bezeichnet.

In der Tat folgt hier, wo wir f als geschränkt vorausgesetzt haben (etwa $|f| < F$), von selbst, daß wenn es abgeschlossene Mengen p gibt, deren Inhalt beliebig nahe an $b - a$ liegt, und auf denen $(R)\int_p f\,dx$ existiert, diese Integrale sich einem bestimmten Grenzwerte J nähern, wenn der Inhalt von p gegen $b - a$ geht. Denn ist sowohl der Inhalt von $\overline{p}$ als der von $\overline{\overline{p}}$ größer als $b - a - \varepsilon$, so hat die Menge der nicht zu $\overline{\overline{p}}$ gehörigen Punkte von $\overline{p}$, und ebenso die Menge der nicht zu $\overline{p}$ gehörigen Punkte von $\overline{\overline{p}}$ höchstens den Inhalt ε, es ist daher:

$$\left|(R)\int_{\overline{p}} f\,d\,x - (R)\int_{\overline{\overline{p}}} f\,d\,x\right| < 2\,\varepsilon\,F$$

und da F eine feste endliche Zahl ist, so ist dies gleichbedeutend mit der Existenz des behaupteten Grenzwertes J.

Daß weiter aus der Existenz von $(B^*)\int_a^b f\,d\,x$ die von $(L)\int_a^b f\,d\,x$ folgt, und daß diese beiden Werte gleich sind, zeigt man wie oben für die Integrale $(B)\int_a^b f\,d\,x$. Existiert aber umgekehrt $(L)\int_a^b f\,d\,x$, d. h. ist f meßbar, so gibt es bekanntlich bei beliebigem $\varepsilon > 0$ in $< a,\, b >$ abgeschlossene Mengen p, deren Inhalt $> b - a - \varepsilon$ ist, und bezüglich derer f stetig ist, sodaß also sicher $(R)\int_p f\,d\,x$ und somit nach dem Gesagten auch $(B^*)\int_a^b f\,d\,x$ existiert.

§ 2.

Wir wenden uns nun dem Falle eines nicht geschränkten Integranden zu. Da die Borelsche Definition die nach der Methode von Harnack definierten uneigentlichen Integrale mit umfaßt, die auch bedingt konvergent sein können, während alle Lebesgueschen Integrale absolut konvergieren, folgt sofort, daß nun auch ein Integral im Sinne von Borel existieren kann, ohne daß ein solches im Sinne von Lebesgue existiert. Hier gilt:

Existiert ein Integral im Sinne von Borel nicht nur für f, sondern auch für $|f|$, so existiert das Integral auch im Sinne von Lebesgue und hat denselben Wert.

In der Tat, existiere das Integral von f und $|f|$ im Sinne von Borel. Wie in § 1 folgt, daß f jedenfalls meßbar ist. Wir geben eine abnehmende Folge positiver Zahlen ε_ν mit $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$ vor. Es sei J_ν eine $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge J_ν, deren Gesamtlänge $< \varepsilon_\nu$ sei; wir können annehmen, die Intervalle $J_{\nu+1}$ liegen im Innern der Intervalle J_ν. Endlich sei $p^{(\nu)}$ die zu J_ν bezüglich des Intervalles $< a,\, b >$ komplementäre abgeschlossene Menge. Wir haben schon gesehen, daß auf Grund der Borelschen Definition

$$(B)\int_a^b |f|\,d\,x = \lim_{\nu=\infty}(R)\int_{p^{(\nu)}} |f|\,d\,x = \lim_{\nu=\infty}(L)\int_{p^{(\nu)}} |f|\,d\,x \tag{9}$$

ist. Sei nun $f_\nu = f$ in den Punkten von $p^{(\nu)}$ und außerhalb $p^{(\nu)}$ sei $f_\nu = 0$. Es ist dann $|f_{\nu+1}| \geqq |f_\nu|$ und abgesehen von einer Punktmenge des Inhaltes 0 ist $f = \lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu$. Die $|f_\nu|$ nähern sich also wachsend dem Werte $|f|$. Nun ist:

$$(L)\int_a^b |f_\nu|\, dx = (L)\int_{p^{(\nu)}} |f|\, dx$$

nach (9) wachsen also die Integrale $(L)\int_a^b |f_\nu|\, dx$ nicht über alle Grenzen und nach einem bekannten Satze existiert also $(L)\int_a^b |f|\, dx$ und somit auch $(L)\int_a^b f\, dx$, und gleichfalls nach einem bekannten Satze, da der Inhalt von $p^{(\nu)}$ den von $< a, b >$ zur Grenze hat, ist

$$\lim_{\nu=\infty} (L)\int_{p^{(\nu)}} f\, dx = (L)\int_a^b f\, dx$$

das aber ist, da die linke Seite auch das Integral im Sinne von Borel darstellt, die Behauptung.

Nun aber wollen wir zeigen, daß die Borelsche Definition doch nur in sehr beschränktem Umfange zu bedingt konvergenten Integralen führt. Es gilt nämlich der Satz:

Existiert nach der Borelschen Definition das Integral von f, und wird mit $\mathfrak{Q}$ die Menge bezeichnet, die aus $\mathfrak{K}$ durch Hinzufügung aller Häufungspunkte entsteht, so existiert das Lebesguesche Integral von f (und somit auch von $|f|$) über die Menge $\mathfrak{Q}$.

In dem interessantesten Falle, daß $\mathfrak{K}$ in $< a, b >$ überall dicht angenommen werden muß, ergibt also die Borelsche Definition nur einen Spezialfall der Lebesgueschen. Wir gehen an den Beweis des aufgestellten Satzes.

Nehmen wir an, es existiere $(L)\int_{\mathfrak{Q}} f\, dx$ nicht, d. h. es habe $(L)\int_{\mathfrak{Q}} |f|\, dx$ den Wert $+\infty$. Setzen wir $g = f$ für $f \geqq 0$, $g = 0$ für $f < 0$; $h = 0$ für $f \geqq 0$, $h = -f$ für $f < 0$, so hat dann auch mindestens eines der Integrale $(L)\int_{\mathfrak{Q}} g\, dx$ und $(L)\int_{\mathfrak{Q}} h\, dx$ den Wert $+\infty$, nehmen wir etwa an, das erstere. Wie man durch das bekannte Zweiteilungsverfahren zeigt, existiert dann mindestens ein Punkt ξ in $< a, b >$ derart, daß das Lebesguesche Integral von g erstreckt über den in irgend eine Umgebung von ξ fallenden Teil von $\mathfrak{Q}$ stets den Wert $+\infty$ hat.

Sei ε irgend eine positive Zahl; wir werden zeigen, daß, wie groß auch A gewählt sei, es eine die Menge $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge J von einer Gesamtlänge $< \varepsilon$ gibt, derart, daß für ihre Komplementärmenge p bezüglich des Intervalles $< a, b >$ gilt:

$$(R) \int_p f\,dx > A.$$

Damit ist dann nachgewiesen, daß ein Integral $\int_a^b f\,dx$ im Sinne von Borel nicht existieren kann. Wir schließen den Punkt ξ in ein Intervall δ ein, dessen Endpunkte nicht zu $\mathfrak{K}$ gehören und dessen Länge $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist, und den außerhalb δ liegenden Teil von $\mathfrak{K}$ in eine Intervallmenge J', deren Gesamtlänge $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Sei p' die zu den Intervallen J' und δ bezüglich $< a, b >$ komplementäre abgeschlossene Menge, so ist auf ihr f geschränkt und es hat $(R) \int_{p'} f\,dx$ einen endlichen Wert.

Den ins Intervall δ fallenden Teil von $\mathfrak{K}$ schließen wir in eine Folge von Intervallmengen J''_ν ein $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß die Intervalle jeder dieser Mengen J''_ν sämtliche zu $\mathfrak{Q}$ bezüglich δ komplementären Intervalle bedecken, und daß die Gesamtlänge der Intervalle J''_ν für $\nu = \infty$ gegen die Gesamtlänge der zu $\mathfrak{Q}$ bezüglich δ komplementären Intervalle konvergiert; endlich mögen die Intervalle von $J''_{\nu+1}$ ganz im Innern der von J''_ν liegen. Für die Komplementärmengen p''_ν der J''_ν bezüglich δ gilt dann, daß p''_ν Teil von $p''_{\nu+1}$ ist, und daß die Vereinigungsmenge der p''_ν bis auf eine Menge des Inhaltes 0 identisch ist mit dem ins Intervall δ fallenden Teil von $\mathfrak{Q}$. Es folgt daraus, nach der Definition des Punktes ξ, unmittelbar, daß:

$$\lim_{\nu=\infty} (L) \int_{p''_\nu} g\,dx = +\infty$$

ist. Auf jeder der Mengen p''_ν ist g geschränkt, etwa:

$$g < G_\nu \text{ auf } p''_\nu. \tag{10}$$

Sei $\mathfrak{H}$ die Menge aller jener nach δ fallenden Punkte von $\mathfrak{Q}$, in denen $h > 0$, (d. h. $f < 0$) ist. Wir schließen die Punkte von $\mathfrak{H}$

in eine Intervallmenge J_ν''' ein, deren Gesamtlänge sich vom Inhalte von $\mathfrak{H}$ um weniger als $\frac{1}{G_\nu}$ unterscheidet. Die ins Innere der Intervalle J_ν''' fallenden Punkte von p_ν'' gehören also, abgesehen von einer Punktmenge, deren Inhalt $< \frac{1}{G_\nu}$ ist, zu H, und da $g = 0$ ist in allen Punkten von $\mathfrak{H}$, ist also der Inhalt der ins Innere der Intervalle J_ν''' fallenden Teilmenge von p_ν'', auf der $g > 0$ ist, kleiner als $\frac{1}{G_\nu}\cdot$ Bezeichnen wir mit p_ν''' den Teil von p_ν'', der nicht im Innern der Intervalle J_ν''' liegt, so haben wir also wegen (10):

$$(L)\int_{p_\nu'''} g\,dx > (L)\int_{p_\nu''} g\,dx - 1$$

und daher auch:

$$\lim_{\nu=\infty} (L)\int_{p_\nu'''} g\,dx = +\infty.$$

Nach Konstruktion enthält jedes der Intervalle J' und J_ν'' einen Punkt von $\mathfrak{K}$; da aber jeder Punkt von $\mathfrak{Q}$ auch Punkt oder Häufungspunkt von $\mathfrak{K}$ ist, so enthält auch jedes Intervall J_ν''' einen Punkt von $\mathfrak{K}$. Die Intervallmenge J_ν, die alle Intervalle von J', J_ν'' und J_ν''' enthält, ist also eine die Menge $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmenge, deren Gesamtlänge offenbar $< \varepsilon$ ist. Ihre Komplementärmenge p_ν bezüglich $< a, b >$ ist die Vereinigungsmenge der beiden Mengen p' und p_ν''', die höchstens die beiden Endpunkte des Intervalles δ gemein haben. Es ist also

$$(L)\int_{p_\nu} f\,dx = (L)\int_{p'} f\,dx + (L)\int_{p_\nu'''} f\,dx;$$

da p_ν''' keinen Punkt von $\mathfrak{H}$ enthält, ist weiter

$$(L)\int_{p_\nu'''} g\,dx = (L)\int_{p_\nu'''} f\,dx$$

und somit, da, wie schon erwähnt, $(L)\int_{p'} f\,dx$ endlich ist, und da wegen der vorausgesetzten Existenz von $(B)\int_a^b f\,dx$ auch $(R)\int_{p_\nu} f\,dx$ existiert und $= (L)\int_{p} f\,dx$ ist.

$$\lim_{\nu=\infty} (R)\int\limits_{p_\nu} f\,dx = +\infty,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir bezeichnen wieder die abgeschlossene Menge, die aus der Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ durch Hinzufügung aller Häufungspunkte entsteht, mit $\mathfrak{Q}$. Seien (a_ν, b_ν) die punktfreien Intervalle von $\mathfrak{Q}$. Existiert $(B)\int\limits_a^b f\,dx$ nach der Borelschen Definition, so existiert offenbar für jedes im Innern von (a_ν, b_ν) gelegene Intervall (a'_ν, b'_ν) ein eigentliches Riemannsches Integral und es existiert

$$\lim_{a'_\nu=a_\nu,\ b'_\nu=b_\nu} (R)\int\limits_{a'_\nu}^{b'_\nu} f\,dx.$$

Wir bezeichnen mit ω_ν die obere Grenze von $\left|\int\limits_{a'_\nu}^{b'_\nu} f\,dx\right|$ für alle Teilintervalle $< a'_\nu, b'_\nu >$ von (a_ν, b_ν) und beweisen [1]):

Existiert das Integral $(B)\int\limits_a^b f\,dx$, so konvergiert $\Sigma\,\omega_\nu$.

In der Tat, existiert dieses Integral, so gilt folgendes: zu jedem positiven η gehört ein positives ε so, daß wenn J' und J'' zwei $\mathfrak{K}$ einschließende Intervallmengen sind, deren jede eine Gesamtlänge $< \varepsilon$ hat, und p' und p'' die bezüglich $< a, b >$ zu J' und J'' komplementären abgeschlossenen Mengen bezeichnen, die Ungleichung besteht:

$$\left|\int\limits_{p'} f\,dx - \int\limits_{p''} f\,dx\right| < \eta.$$

Wir werden aber zeigen, daß im Falle der Divergenz von $\Sigma\,\omega_\nu$ bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ stets J' und J'' so gewählt werden können, daß:

$$\left|\int\limits_{p'} f\,dx - \int\limits_{p''} f\,dx\right| > 1.$$

Wir wählen zunächst ν_0 so groß, daß

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} (b_\nu - a_\nu) < \varepsilon.$$

[1]) Für die Harnackschen Integrale wurde diese Tatsache zuerst bewiesen von E. H. Moore, Amer. Trans. 2, S. 324.

Im Innern von (a_ν, b_ν) kann $< a'_\nu, b'_\nu >$ so gefunden werden, daß

$$\left|\int\limits_{a'_\nu}^{b'_\nu} f\,dx\right| > \omega_\nu - \frac{1}{2^\nu}.$$

Ferner gibt es wegen der Divergenz von $\Sigma\,\omega_\nu$ endlich viele $\nu > \nu_0$ (sie mögen mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ bezeichnet werden) derart, daß

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_{\nu_i} > 2,$$

und daß $\int\limits_{a'_{\nu_i}}^{b'_{\nu_i}} f\,dx$ für $i = 1, 2, \ldots, p$ einerlei Zeichen, z. B. das positive, hat. Nun können offenbar die zwei die Menge $\mathfrak{K}$ einschließenden Intervallmengen J' und J'' so gefunden werden, daß jede von beiden eine Gesamtlänge $< \varepsilon$ hat, und daß J' die Intervalle $< a_{\nu_i}, b_{\nu_i} >$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vollständig bedeckt, während J'' von jedem dieser Intervalle gerade das Teilintervall $< a'_{\nu_i}, b'_{\nu_i} >$ freiläßt, während sonst J' und J'' völlig übereinstimmen. Dann ist

$$\int\limits_{p''} f\,dx - \int\limits_{p'} f\,dx = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{a'_{\nu_i}}^{b'_{\nu_i}} f\,dx > \sum_{i=1}^{p} \left(\omega_{\nu_i} - \frac{1}{2^{\nu_i}}\right) > 1$$

wie behauptet. Damit ist für den Fall der Existenz von $(B)\int\limits_a^b f\,dx$ die Konvergenz von $\Sigma\,\omega_\nu$ nachgewiesen, wie angekündigt.

Wir erkennen nun auch unmittelbar daß, wenn wieder $\mathfrak{Q}$ die Menge ist, die aus der Singularitätenmenge $\mathfrak{K}$ durch Hinzufügung aller Häufungspunkte entsteht und mit (a_ν, b_ν) die punktfreien Intervalle von $\mathfrak{Q}$ bezeichnet werden, für das Borelsche Integral die Gleichung gilt:

$$(B)\int\limits_a^b f\,dx = \sum_\nu \int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} f\,dx + (L)\int\limits_{\mathfrak{Q}} f\,dx. \tag{11}$$

Die in der Summe rechts auftretenden Integrale sind definiert durch

$$\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} f\,dx = \lim_{h=+0,\,k=+0} (R) \int\limits_{a_\nu+h}^{b_\nu-k} f\,dx$$

wo diese Grenzwerte, wie schon bemerkt, existieren; und die Summe aller dieser Integrale konvergiert absolut, da die oben mit $\sum\limits_{\nu} \omega_\nu$ bezeichnete Summe konvergiert. Um die Formel (11) nachzuweisen, gehen wir so vor: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so schließen wir $\mathfrak{K}$ in eine Intervallmenge J ein, deren Gesamtlänge $< \varepsilon$ ist, und die von beiden Enden jedes Intervalles $< a_\nu, b_\nu >$ ein so kleines Stück abschneidet, daß für das übrigbleibende Intervall $< a'_\nu, b'_\nu >$ gilt:

$$\left| \int\limits_{a'_\nu}^{b'_\nu} f\,dx - \int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} f\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^\nu}. \tag{12}$$

Die zu J bezüglich $< a, b >$ komplementäre, abgeschlossene Menge p setzt sich zusammen aus den abzählbar unendlich vielen Intervallen $< a'_\nu, b'_\nu >$ und einer Menge p^*, die Teil von $\mathfrak{Q}$ ist; es ist daher:

$$(L)\int\limits_{p} f\,dx = \sum_{\nu} \int\limits_{a'_\nu}^{b'_\nu} f\,dx + (L)\int\limits_{p^*} f\,dx. \tag{13}$$

Geht ε gegen 0, so geht per definitionem die linke Seite dieser Gleichung in die linke Seite von (11) über, und beachtet man Ungleichung (12), sowie die Tatsache, daß p^* ein Teil von $\mathfrak{Q}$ ist, dessen Inhalt sich vom Inhalte von $\mathfrak{Q}$ um weniger als ε unterscheidet, so sieht man, da ja die Existenz von $(L)\int\limits_{\mathfrak{Q}} f\,dx$ bereits bewiesen ist, daß auch die rechte Seite von (13) in die rechte Seite von (11) übergeht, womit (11) bewiesen ist.

Wir können nun unschwer zeigen, daß der Wert eines Borelschen Integrales von der Wahl der Singularitätenmenge in folgendem Sinne unabhängig ist; e x i s t i e r t d a s I n t e g r a l f ü r z w e i v e r s c h i e d e n e S i n g u l a r i t ä t e n m e n g e n, s o h a t e s i n b e i d e n F ä l l e n d e n s e l b e n W e r t. Es existiere also das Integral sowohl, wenn für die Singularitätenmenge die Menge $\mathfrak{K}$ als auch wenn für die Singularitätenmenge die Menge $\overline{\mathfrak{K}}$ gewählt wird, und habe die Werte B bezw. $\overline{B}$. Seien $\mathfrak{Q}$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$ die Mengen, die aus $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ durch Hinzufügung der Häufungspunkte entstehen, und seien (a_ν, b_ν) und $(\overline{a}_\nu, \overline{b}_\nu)$ die punktfreien Intervalle von $\mathfrak{Q}$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$ in $< a, b >$. Es ist dann nach Formel (11):

$$B = \sum_{\nu} \int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} f\,dx + (L)\int\limits_{\mathfrak{Q}} f\,dx.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Lebesgueschen Integrale ist, wenn mit $\mathfrak{Q}_\nu$ der nach $(\overline{a}_\nu, \overline{b}_\nu)$ fallende Teil von $\mathfrak{Q}$ und mit $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{Q}$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$ bezeichnet wird:

$$(L)\int\limits_{\mathfrak{Q}} f\,dx = (L)\int\limits_{\mathfrak{D}} f\,dx + \sum_\nu \int\limits_{\mathfrak{Q}_\nu} f\,dx,$$

wo die rechts auftretende Reihe absolut konvergiert. Bezeichnen wir noch mit $\overline{\mathfrak{Q}}_\nu$ den nach (a_ν, b_ν) fallenden Teil von $\overline{\mathfrak{Q}}$, mit $(\overline{a}_{\nu,\mu}, \overline{b}_{\nu,\mu})$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ die punktfreien Intervalle von $\overline{\mathfrak{Q}}_\nu$ in (a_ν, b_ν), so ist

$$\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} f\,dx = \sum_\mu \int\limits_{\overline{a}_{\nu,\mu}}^{\overline{b}_{\nu,\mu}} f\,dx + (L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}_\nu} f\,dx; \tag{14}$$

dies folgt in der Tat unmittelbar daraus, daß f in jedem ganz im Inneren von (a_ν, b_ν) liegenden Intervalle (a'_ν, b'_ν) ein eigentliches Integral im Riemannschen Sinne besitzt; man hat nur die Formel (14) zunächst für das Intervall (a'_ν, b'_ν) anzusetzen und daraus für (a_ν, b_ν) durch Grenzübergang herzuleiten, wobei zu beachten ist, daß $(L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}_\nu} f\,dx$ sicher existiert, da $(L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}} f\,dx$ existiert, und daß $\sum\limits_\mu \int\limits_{\overline{a}_{\nu,\mu}}^{\overline{b}_{\nu,\mu}} f\,dx$ absolut konvergiert, da dies für $\sum\limits_\nu \int\limits_{\overline{a}_\nu}^{\overline{b}_\nu} f\,dx$ gilt, und jedes Intervall $(\overline{a}_{\nu,\mu}, \overline{b}_{\nu,\mu})$ — abgesehen höchstens von den beiden an die Endpunkte von (a_ν, b_ν) grenzenden — zugleich eines der Intervalle $(\overline{a}_\nu, \overline{b}_\nu)$ ist.

Wir haben also nun die Formel erhalten:

$$B = \sum_\nu \Bigl(\sum_\mu \int\limits_{\overline{a}_{\nu,\mu}}^{\overline{b}_{\nu,\mu}} f\,dx + (L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}_\nu} f\,dx\Bigr) + \sum_\nu \int\limits_{\mathfrak{Q}_\nu} f\,dx + \int\limits_{\mathfrak{D}} f\,dx. \tag{15}$$

in der, wegen der Existenz von $(L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}} f\,dx$, die Summe der $(L)\int\limits_{\overline{\mathfrak{Q}}_\nu} f\,dx$ absolut konvergiert. Wir können aber auch leicht die absolute Konvergenz der Doppelreihe $\sum\limits_{\mu,\nu} \int\limits_{\overline{a}_{\nu,\mu}}^{\overline{b}_{\nu,\mu}} f\,dx$ einsehen. Bezeichnen wir mit $(\overline{a}'_{\nu,\mu}, \overline{b}'_{\nu,\mu})$ ein beliebiges, ganz im Innern von $(\overline{a}_{\nu,\mu}, \overline{b}_{\nu,\mu})$ gelegenes Intervall, mit $\overline{\omega}_{\nu,\mu}$ die obere Grenze aller Werte von

$$\left| \int_{\overline{a}'_{\nu,\mu}}^{\overline{b}'_{\nu,\mu}} f\, dx \right|,$$

so genügt es, die Konvergenz von $\sum_{\mu,\nu} \overline{\omega}_{\mu,\nu}$ nachzuweisen, was ganz ähnlich zu geschehen hat, wie oben die Konvergenz von $\sum \omega_\nu$ nachgewiesen wurde.

Die absolute Konvergenz aller in (15) auftretenden Reihen ermöglicht es nun, diese Gleichung auch in anderer Gestalt zu schreiben: Man bezeichne die punktfreien Intervalle von $\mathfrak{Q}_\nu$ in $(\overline{a}_\nu, \overline{b}_\nu)$ mit $(a_{\nu,\mu}, b_{\nu,\mu})$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ und beachte, daß die Gesamtheit aller Intervalle $(a_{\nu,\mu}, b_{\nu,\mu})$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$ mit der aller Intervalle $(\overline{a}_{\nu,\mu}, \overline{b}_{\nu,\mu})$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$ übereinstimmt, da jede dieser beiden Intervallmengen nichts anderes ist als die Menge aller punktfreien Intervalle der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{Q}$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$; man hat also:

$$B = \int_{\mathfrak{D}} f\, dx + \sum_\nu \int_{\overline{\mathfrak{Q}}_\nu} f\, dx + \sum_\nu \left(\sum_\mu \int_{a_{\nu,\mu}}^{b_{\nu,\mu}} f\, dx + \int_{\mathfrak{Q}_\nu} f\, dx \right) =$$

$$= \int_{\overline{\mathfrak{Q}}} f\, dx + \sum_\nu \int_{\overline{a}_\nu}^{\overline{b}_\nu} f\, dx = \overline{B}$$

und die Behauptung ist erwiesen.