sich auf der kalten Oberflächenseite eine Wasserhaut bildet, auf die das gesamte Wärmegefälle von dem Dampf zur Wandtemperatur entfällt. Die Wasserhaut haftet an der einen Seite an der Wand, die übrigen Schichten fließen unter der Wirkung der Schwere nach abwärts. Da die Stärke der Wasserhaut jedenfalls sehr gering ist — nach der Nusseltschen Rechnung Bruchteile eines Millimeters — so haben wir es offenbar mit einer laminaren Strömung zu tun. Es ist nun nicht einzusehen, warum die W.-Ue.-Zahl von Wasser an die metallische Wand auf der einen Seite der Wand (wo noch dazu der Strömungszustand laminar ist) 7mal so groß sein soll als auf der anderen Seite (bei turbulenter Strömung).

Die Versuchsergebnisse von Josse müssen sich danach anders deuten lassen, so daß die W.-D.-Zahl k durch zwei annähernd gleich große Terme $\frac{1}{\alpha_1}$ und $\frac{1}{\alpha_2}$, wobei α_1 und α_2 mittlere Werte haben, dargestellt wird. Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß demnach die W.-Ue.-Zahl an Wasser höhere Werte hat, als vielfach bisher angenommen wurde. Eine umfassende experimentelle Untersuchung des Wärmeüberganges an Flüssigkeiten erscheint dringend geboten, um die Richtigkeit der theoretischen Rechnungen prüfen zu können. Die Schwierigkeiten, die sich bei der Verwendung von Wasser durch Rostbildung und Kesselsteinansatz zeigen, legen es nahe, hierfür andere Flüssigkeiten, z. B. Öle, heranzuziehen. 86

Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben.

Von L. HOPF und E. TREFFTZ in Aachen.

Die Probleme der Grundwasserströmung, bei denen die Geschwindigkeit (Durchflußmenge pro Einheit des Querschnittes in der Sekunde) proportional den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften gesetzt werden kann, führen mathematisch auf die gleichen Aufgaben (Integration der Gleichung $\Delta u = 0$) wie die Probleme der wirbellosen Strömung inkompressibler Flüssigkeiten. Speziell die ebenen Probleme sind daher den gleichen mathematischen Methoden der konformen Abbildung zugänglich, die für die idealen Flüssigkeiten, z. B. bei der Strahlbildung, zur Lösung führen. Im folgenden behandeln wir mit diesen Methoden eine Aufgabe, die unmittelbar der Praxis entnommen ist.

In den »Moosen« Süddeutschlands strömen beträchtliche Wassermengen mit geringer Geschwindigkeit im Erdreich. Die freie Oberfläche des Grundwassers liegt der Erdoberfläche nahe, was eine Versumpfung des Bodens zur Folge hat. Zum Zwecke der Trockenlegung solcher Moose und zugleich zur Ausnutzung der Wassermengen zur Kraftgewinnung sucht man das Grundwasser in Gräben abzufangen und wegzuleiten. Reicht dieser Abfanggraben nicht bis zur Sohle der Grundwasser führenden Schicht, sondern taucht nur bis zu einer gewissen Tiefe ein, so erhebt sich die Frage, welche Wassermengen ein solcher Graben der Grundwasserströmung entzieht, welche Geschwindigkeiten lokal auftreten, wie im einzelnen die Stromlinien verlaufen, insbesondere die Oberfläche der Grundwasserströmung, und welche konstruktiven Maßnahmen diese Größen beeinflussen.

1. Physikalische und mathematische Grundlagen. Auf die Flüssigkeit wirken Druckgefälle, Schwere und Reibungskräfte. Diese setzt man proportional der Geschwindigkeit und vernachlässigt alle Beschleunigungen. Derart erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz:

$$u = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -k \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \right) \quad (1)$$

oder vektoriell zusammengefaßt:

$$w = -\text{grad } \varphi \quad (1'),$$

wobei das Potential $\varphi = k(p + \gamma y)$ ist. Hierbei bedeuten:

- k eine vom Material der Wasser führenden Schicht abhängige Konstante (reziproke Reibungszahl),
- p den Druck,
- γ das spezifische Gewicht des Wassers,
- y die Höhe über einem Nullniveau.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt dann für das Potential φ die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$. In der gleichen Weise wie in der Theorie der idealen Flüssigkeiten oder überhaupt des ebenen Potentials fassen wir φ als den reellen Teil einer Funktion $\omega = \varphi + i\psi$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ auf, deren Imaginärteil ψ (die Stromfunktion) auf den Stromlinien konstante Werte hat.

Die Grenzbedingungen sind die folgenden:

Die undurchlässige Schicht und die freie Oberfläche müssen Stromlinien sein, d. h. es ist längs diesen $\psi = \text{konst.}$ An der freien Oberfläche muß außerdem der Druck gleich dem konstanten Drucke der Atmosphäre sein, den wir gleich Null setzen, d. h. es muß hier $\varphi = k\gamma y = c\gamma$ gelten. Schließlich wird an der Grabensohle der Druck gleich dem hydrostatischen Drucke (die Bewegung des Wassers im Graben kann vernachlässigt werden), also $\varphi = \text{konst.}$

2. Der Abfanggraben. Die Grundwasserströmung ohne Abfanggraben verläuft, Abb. 1, geradlinig mit dem Gefällswinkel α der Sohle. Die Grundwassersohle sei die Stromlinie $\psi = 0$, der Grundwasserspiegel die Stromlinie $\psi = Q_1$, die Tiefe des Grundwassers sei H_1 . Wir legen eine x_0 -Achse horizontal, die y_0 -Achse vertikal, den Nullpunkt in den Spiegel. Der unendlich ferne Punkt stromaufwärts sei A, stromabwärts D genannt. Das komplexe Potential wird

$$\omega = z_0 c \sin \alpha e^{-i\alpha} + iQ_1 \quad (2)$$

und

$$\frac{Q_1}{c \sin \alpha} = H_1 \quad (3)$$

Nun sei die Grundwasserströmung durch einen Abfanggraben gestört, dessen Spiegel auf dem Niveau $y = 0$ liege; der Punkt $x = 0, y = 0$ liege auf dem Schnittpunkt des Grabenspiegels mit dem ungestörten Grundwasserspiegel, Abb. 2. Die undurchlässige Schicht, die die Grundwasserströmung nach unten begrenzt, verlaufe geradlinig:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1 \quad (4),$$

sie ist die Stromlinie $\psi = 0$; die freie Oberfläche oberhalb des Grabens (stromaufwärts) $\psi = Q_1$, unterhalb des Grabens (stromabwärts) $\psi = Q_2$, wobei $Q_2 < Q_1$. $Q_1 - Q_2$ ist die Wassermenge, welche im Graben fortgeführt und dem Grundwasserstrom entzogen wird. Längs der Grabensohle sei $\varphi = 0$, ψ fällt von Q_1 auf einen Minimalwert Q_m und wächst wieder bis Q_2 . Die Schwierigkeit unseres Problems besteht genau wie bei

den Strahlaufgaben der klassischen Hydromechanik darin, daß wir die Oberflächen der Strömung nicht kennen. Genau wie dort führen wir deshalb auch hier das komplexe Potential ω als unabhängige, z als abhängige Variable ein. In der ω -Ebene, Abb. 3, ist AB die Gerade $\psi = Q_1$ und zwar für alle positiven Werte von φ , CD die Gerade $\psi = Q_2$ für alle negativen Werte von φ und die Grundwassersohle AD die φ -Achse. Die Grabensohle $\varphi = 0$ entspricht dem Stück Q_1 bis Q_m und zurück bis Q_2 auf der ψ -Achse. Unser Gebiet in der ω -Ebene besteht also aus einem Streifen, der links der ψ -Achse die Höhe Q_2 , rechts die Höhe Q_1 hat und längs der ψ -Achse bis Q_m aufgeschnitten ist.

Abb. 1

Abb. 2

Abb. 3

Für dieses festbegrenzte Gebiet haben wir nun z als eine Funktion von ω so zu bestimmen, daß längs der φ -Achse

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1 \quad (4)$$

wird, rechts längs $\psi = Q_1$ und links längs $\psi = Q_2$ $y = \frac{T}{c}$

und daß die Streifenbegrenzung auf der ψ -Achse in den Grabenumriß $y = F(x)$ über-

geht. Es liegt nahe, diese Aufgabe dadurch zu vereinfachen, daß man

$$z = z_0(\omega) + z_1(\omega) \quad (5),$$

wobei

$$z_0 = \frac{(\omega - i Q_1) e^{i\alpha}}{c \sin \alpha} \quad (2)$$

die Strömung ohne Abfanggraben darstellt, setzt und nun nur die Abweichung z_1 von der ungestörten Strömung zu bestimmen bleibt. Für z_1 ergeben sich die folgenden Randbedingungen, Abb. 4.

Abb. 4

Längs AB ist $\psi = Q_1$, also nach (5):

$$x + iy = \frac{T}{c \sin \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha) + x_1 + iy_1.$$

Die Grenzbedingung $y = \frac{T}{c}$ verlangt mithin:

$$y_1 = 0. \quad (6).$$

Im Punkt A ist offenbar auch $x_1 = 0$, denn im Unendlichen beeinflusst der Graben die Strömung nicht. Längs AD ist $\psi = 0$ und $x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1$. Setzen wir hier x und y aus (5) mit $\psi = 0$ ein, so wird:

$$H_1 = \frac{T}{c} \cos \alpha + \frac{Q_1}{c} \sin \alpha - \frac{T}{c} \cos \alpha + \frac{Q_1}{c} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha,$$

daher, bei Benutzung von (3)

$$x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha = 0 \quad (7).$$

Längs CD ist $\psi = Q_2$, also nach (5)

$$y = \frac{T}{c} + \frac{Q_2 - Q_1}{c} \cotg \alpha + y_1.$$

Da $y = \frac{T}{c}$ sein soll, muß

$$y_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{c} \cotg \alpha \quad (8)$$

sein.

3. Herstellung der Abbildung. Betrachten wir in der z_1 -Ebene das Gebiet, in das unser Streifen der ω -Ebene übergeführt wird, so gehen die horizontalen Begrenzungen unseres Streifens in die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Strecken der z_1 -Ebene über. Die Verbindung der Punkte C und B , die dem Grabenumriß entspricht,

bleibt auf der z_1 -Ebene noch unbestimmt. Wir vereinfachen die Aufgabe dadurch, daß wir nicht den Grabenumriß vorgeben und die zugehörige Strömung aufsuchen, sondern die Größen Q_1, Q_2 und Q_m geben und hierzu eine Grabenform aufsuchen. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst den Zusammenhang zwischen der Grabenbreite b , der Absenkung h am Punkte B , der Absenkung im Unendlichen $H_1 - H_2$ und den Abmessungen des abzubildenden Streifens in der z_1 -Ebene. Aus Abb. 2 folgt für die Absenkung $h = x(B) \operatorname{tg} \alpha$, also, wenn wir in (5) für den Punkt B $\varphi = 0, \psi = Q_1$ einsetzen ($x_0 = 0$),

$$h = x_1(B) \operatorname{tg} \alpha \quad (9),$$

sodaß also die Strecke AB in der z_1 -Ebene $x_1(B) = h \cotg \alpha$ wird (9').

Der Unterschied der Abszissen $x_1(B) - x_1(C)$ rechnet sich aus (5), wenn wir für B $\varphi = 0, \psi = Q_1$, für C $\varphi = 0, \psi = Q_2$ einsetzen und berücksichtigen, daß die Grabenbreite $b = x(B) - x(C)$ ist:

$$x_1(B) - x_1(C) = b + (H_1 - H_2) \sin \alpha \quad (10),$$

dabei ist analog zu H_1

$$H_2 = \frac{Q_2}{c \sin \alpha} \quad (3')$$

die Grundwassertiefe im Unendlichen stromabwärts.

Mit Benutzung dieser Abkürzung folgt ferner aus (6) und (8)

$$y_1(D) = y_1(C) = (H_1 - H_2) \cos \alpha \quad (11).$$

Das mathematische Problem, die ω -Ebene auf die z_1 -Ebene abzubilden, lösen wir durch Einführung einer Hilfsvariablen ζ , indem wir sowohl unseren Streifen in der ω -Ebene als auch das Gebiet der z_1 -Ebene auf den ersten Quadranten der ζ -Ebene abbilden. Dabei soll der Punkt B ins Unendliche rücken, C in den Nullpunkt fallen, A und D auf der positiv reellen, M auf der positiv imaginären Achse liegen.

($C: \zeta = 0, B: \zeta = \infty, A: \zeta = a, D: \zeta = d, M: \zeta = im$).

Die Abbildung der ω -Ebene auf den ersten Quadranten der ζ -Ebene wird geliefert durch die Formel

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{a + \zeta}{a - \zeta} - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{\zeta + d}{\zeta - d} \quad (12)$$

oder wenn

$$\lambda_1 = \ln \frac{r_1'}{r_1}, \quad \lambda_2 = \ln \frac{r_2'}{r_2} \quad (13)$$

(siehe Abb. 5) gesetzt wird,

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \{\lambda_1 + i(\pi - \vartheta_1)\} - \frac{Q_2}{\pi} \{\lambda_2 - i\vartheta_2\} \quad (14).$$

Abb. 5

In der letzten Form können wir die Richtigkeit unserer Formel unmittelbar einsehen: Für alle positiv reellen ζ sind λ_1 und λ_2 beide positiv, im Unendlichen (B) und auf der ganzen positiven η -Achse ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. In A wird λ_1 , in D λ_2 unendlich. Auf der Strecke AB ist $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$; auf AD $\vartheta_1 = \pi, \vartheta_2 = 0$; auf CD $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi$, auf der positiven η -Achse gehen ϑ_1 und ϑ_2 von π im Nullpunkt (C) bis 0 im Unendlichen (B). Es wird also

- Längs AB : $\psi = Q_1$ φ durchläuft alle positiven Werte von 0 (B) bis $+\infty$ (A),
 „ AD : $\psi = 0$ φ „ „ Werte von $+\infty$ (A) bis $-\infty$ (D),
 „ CD : $\psi = Q_2$ φ „ „ negativen Werte von $-\infty$ (D) bis 0 (C).
 der imaginären Achse wird $\varphi = 0$.

Es wird also durch (14) der erste Quadrant der ζ -Ebene in der Tat in den gegebenen Streifen der ω -Ebene übergeführt.

4. Bestimmung der Konstanten. Um die relative Lage der Punkte M , A und D auf der ζ -Ebene zu bestimmen, berücksichtigen wir, daß ψ in M ein Minimum hat; es muß also dort $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$ sein, d. h.

$$-\frac{Q_1}{\pi} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} + \frac{Q_2}{\pi} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = 0.$$

Längs der η -Achse ist:

$$\cot \frac{1}{2} \vartheta_1 = \eta/a, \quad \cot \frac{1}{2} \vartheta_2 = \eta/d.$$

Wenn für den Punkt M

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1m}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{2m}$$

wird, so ist dort

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} = -\frac{\sin \vartheta_{1m}}{m}, \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = -\frac{\sin \vartheta_{2m}}{m}.$$

Daher wird:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sin \vartheta_{2m}}{\sin \vartheta_{1m}} \quad (15).$$

Aus dieser Beziehung und

$$Q_m = \frac{Q_1}{\pi} \{\pi - \vartheta_{1m}\} + \frac{Q_2}{\pi} \vartheta_{2m} \quad (16)$$

folgt die relative Lage von A und D gegen M .

Damit haben wir den Zusammenhang von ω und ζ gefunden. Um nun das Gebiet der z_1 -Ebene ebenfalls auf den ersten Quadranten der ζ -Ebene abzubilden, setzen wir

$$\frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\alpha/\pi} (\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}} \quad (17)$$

oder

$$z_1 = \int_a^{\zeta} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{\alpha/\pi} (\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}} \quad (18).$$

Darin ist $f(\zeta)$ eine Funktion, die für positiv reelle $\zeta = \xi$ positiv, im ganzen ersten Quadranten regulär und im Unendlichen Null ist. Durch Verfügung über diese Funktion $f(\zeta)$ können wir die Grabenform variieren resp. unsere Lösung einer vorgeschriebenen Grabenform anpassen. Daß (17) und (18) wirklich die Lösung liefern, erkennen wir folgendermaßen: Bezeichnen wir mit r_1 und r_2 die Entfernungen von den Punkten A und D , so ist

$$\text{längs } CD: \zeta - d = r_2 e^{i\pi}, \quad \zeta - a = r_1 e^{i\pi}, \quad \text{also: } \frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-\alpha/\pi} e^{-i\alpha} r_1^{\alpha/\pi-1} e^{i(\alpha-\pi)} f(\xi)$$

$$\text{„ } DA: \zeta - d = r_2, \quad \zeta - a = r_1 e^{i\pi}, \quad \text{also: } \frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-\alpha/\pi} r_1^{\alpha/\pi-1} e^{i(\alpha-\pi)} f(\xi)$$

$$\text{„ } AB: \zeta - d = r_2, \quad \zeta - a = r_1, \quad \text{also: } \frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-\alpha/\pi} r_1^{\alpha/\pi-1} f(\xi).$$

Da hier $d\zeta = d\xi$ reell ist, so folgt, wenn dR das positiv reelle Differential $dR = r_2^{-\alpha/\pi} r_1^{(\alpha/\pi-1)} f(\xi) d\xi$ bedeutet:

$$\begin{aligned} \text{längs } CD: & dz_1 = -dR, \\ \text{„ } DA: & dz_1 = -e^{i\alpha} dR, \\ \text{„ } AB: & dz_1 = +dR. \end{aligned}$$

Es werden also in der Tat die drei Abschnitte der ξ -Achse in der z_1 -Ebene auf zwei horizontale Geradenstücke und eines von der Neigung α abgebildet, wie es verlangt war.

5. Anpassung an die Grabenform. Durch unsere Abbildung geht die η -Achse in die Grabenform über. Für $f(\zeta)$ machen wir den Ansatz:

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta + \epsilon l} + \frac{A_2}{(\zeta + \epsilon l)^2} + \dots \quad (19),$$

wobei wir uns für die praktische Rechnung auf zwei Glieder beschränken werden. Die Größe l ist dabei willkürlich, da wir jede Funktion $f(\zeta)$ im ersten Quadranten in der Form (19) annähern können. Die Koeffizienten A_1 und A_2 bestimmen sich aus den Grabenabmessungen.

Die Absenkung des Grabens ist gegeben durch (9):

$$h = x_1(B) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \int_a^\infty \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{a/\pi} (\zeta - a)^{1-a/\pi}}.$$

Dieses Integral läßt sich einfach auswerten, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{a}{\pi}$ eine sehr kleine Größe (etwa 10^{-3}) ist. Wir können also überall außer in der unmittelbaren Umgebung der Punkte A und D

$$(\zeta - d)^{a/\pi} = 1 \text{ und } (\zeta - a)^{1-a/\pi} = \zeta - a$$

setzen. Bei Auswertung des Integrals kommt es nur auf die unmittelbare Umgebung des Punktes A an. Man teilt das Integral in ein Integral von a bis $a + \epsilon$ und eines von $a + \epsilon$ bis ∞ und behält nur aus dem ersten einen Ausdruck von der Größenordnung $\frac{\pi}{a}$ übrig. Es wird

$$h = \pi f(a) + \text{Größen von der Ordnung } \frac{a}{\pi} \quad (20).$$

Um die Beziehung zwischen der Absenkung h und der abgefangenen Wassermenge $Q_1 - Q_2$ zu erhalten, berücksichtigen wir, daß nach (11)

$$y_1(D) = (H_1 - H_2) \cos \alpha = \frac{Q_1 - Q_2}{c} \cot \alpha.$$

Da

$$z_1(D) = \int_a^d \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{a/\pi} (\zeta - a)^{1-a/\pi}} = + e^{\epsilon \alpha} \int_d^a \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{a/\pi} (a - \zeta)^{1-a/\pi}},$$

wird

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c} \cot \alpha = \sin \alpha \int_d^a \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{a/\pi} (a - \zeta)^{1-a/\pi}}.$$

Dies Integral zerlegen wir in drei Teile, von d bis $d + \epsilon$, von $d + \epsilon$ bis $a - \epsilon$ und von $a - \epsilon$ bis a . Nur vom letzten Teil bleibt ein Glied von der Größenordnung $\frac{\pi}{a}$ übrig, so daß in erster sehr guter Näherung

$$\int_d^a \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - d)^{a/\pi} (a - \xi)^{1-a/\pi}} = \frac{\pi}{a} f(a),$$

also

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{a} f(a) = \pi f(a) \quad (21).$$

Der Vergleich der beiden Formeln (20) und (21) ergibt

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c \sin \alpha} = H_1 - H_2 = h \quad (22)$$

oder

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{h}{H_1} \quad (23).$$

Bis auf Größen von der Ordnung $\frac{a}{\pi}$ verhält sich also die abgefangene Grundwassermenge zu der gesamten in der Schicht fließenden Menge wie die Absenkung des

Spiegels unter den ungestörten Grundwasserspiegel zur Tiefe der Schicht. Die abgefangene Menge wird also in erster Ordnung von keiner andern Abmessung des Grabens beeinflußt als von der Absenkung, insbesondere hängt sie von der Breite oder der Wassertiefe im Abfanggraben nicht ab. Als Näherungsformeln sind bisher in der Praxis gelegentlich verwendet worden

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{t}{H_1 - h}, \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{h + t}{H_1} \quad (t = \text{Wassertiefe im Abfanggraben}).$$

Beide Formeln geben die Verhältnisse nicht richtig wieder. Von der Tiefe des Wassers im Graben hängt die abgefangene Menge nicht ab; denn entsprechend der Tiefe wird das in den Graben eingedrungene Wasser wieder aus dem Graben abgeführt. Von der Tiefe und Breite des Wassers im Graben hängt natürlich Q_m ab; die einströmende Menge wird durch alle diese Größen beeinflusst, aber die Ausströmung in derselben Weise, so daß der Grad des Abfangens nur durch h reguliert wird.

6. Numerisches Beispiel. Mit Hilfe unserer Formeln wollen wir folgendes Beispiel durchrechnen. Wir stellen uns die Aufgabe, in eine Grundwasserströmung von der Neigung 0,003 einen Graben einzuziehen, der die Hälfte des Grundwassers abfängt. Nehmen wir an, daß 5 vH der Grundströmung in den Graben mit eindringt, ihn aber wieder verläßt, so wird

$$Q_2 = 0,5 Q_1 \quad Q_m = 0,45 Q_1.$$

Wir wählen als Längeneinheit die Tiefe H_1 der ungestörten Grundwasserströmung; dann ist $H_2 = 0,5$, $H_m = 0,45$ und nach Formel (22) auch $h = 0,5$.

Da in der ζ -Ebene nur Verhältnißgrößen auftreten, so können wir den Punkt M in den Punkt $\zeta = i$ legen.

Aus den Formeln

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin \vartheta_{2m}}{\sin \vartheta_{1m}} \quad (15)$$

und

$$\pi H_m = H_1 (\pi - \vartheta_{1m}) + H_2 \vartheta_{2m} \quad (16)$$

ergeben sich dann

$$\vartheta_{1m} = 151^\circ \quad \vartheta_{2m} = 104^\circ \\ a = 3,87 \quad d = 1,28.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen ergeben sich (Abb. 5, Formel 14)

$$\frac{\varphi}{c \sin \alpha} = \frac{1}{\pi} \lambda_1 - \frac{1}{2\pi} \lambda_2, \quad \frac{\psi}{c \sin \alpha} = \frac{\pi - \vartheta_1}{\pi} - \frac{\vartheta_2}{2\pi} \quad (14).$$

Um das Strömungsbild in der z -Ebene zu finden, müssen wir zunächst $z_0 = \frac{\omega - i Q_1}{c \sin \alpha} e^{i\alpha}$ (2) rechnen, d. h.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \cos \alpha - \frac{\psi - Q_1}{c \sin \alpha} \sin \alpha \sim \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \\ y_0 &= \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \sin \alpha + \frac{\psi - Q_1}{c \sin \alpha} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Das zweite Glied im Ausdruck für x_0 ist weggelassen, weil es kleiner als $\sin \alpha$ ist, das erste Glied für y_0 muß stehen bleiben, weil es für große φ von Bedeutung ist.

Zur Berechnung von $z = z_0 + z_1$ (5) bleibt noch das Integral:

$$z_1 - z_1(B) = \int_{\infty}^{\zeta} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{a/\pi} (\zeta - a)^{1-a/\pi}} \quad (18)$$

auszuwerten.

Für $f(\zeta)$ machen wir den Ansatz

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta + l} + \frac{A_2}{(\zeta + l)^2} \quad (19).$$

In dem Integral (18) können wir, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Punktes A ($\zeta - d)^{a/\pi} = 1$ ($\zeta - a)^{1-a/\pi} = \zeta - a$ setzen und erhalten durch Partialbruchzerlegung:

$$z_1 - z_1(B) = \frac{A_2}{(l+a)(\zeta+l)} + f(a) \ln \frac{\zeta-a}{\zeta+l}.$$

abhängig. Die Form des Grabens wird wesentlich durch die Strömungsverhältnisse im Graben selbst bestimmt.

Zum Schluß ist noch folgendes zu bemerken: Unsere Rechnung stellt insofern einen Spezialfall dar, als wir den Grundwasserspiegel stromaufwärts am Graben in der Höhe des Grabenspiegels ansetzen. Es wäre an sich nicht ausgeschlossen, daß Wasser durch die Grabenwand oberhalb des Spiegels einträte und an der Grabenböschung herabsickerte. Dies wird dann eintreten, wenn man, ohne die abgeführte Menge $Q_1 - Q_2$ zu ändern, durch entsprechende Dimensionierung des Grabens den Spiegel weiter senkt, als unsere Rechnung ergibt. Unsere Rechnung liefert also: die kleinste Wassermenge bei gegebener Absenkung oder umgekehrt die kleinste Absenkung bei gegebener Wassermenge. 87

Das Problem der Iterationen.

Von R. v. MISES in Berlin.

Wer dem Ablauf einer vom Zufall beherrschten Reihe von Alternativ-Vorgängen (Kopf- oder Adlerspiel, Geschlechtsverhältnis der Geburten usw.) seine Aufmerksamkeit zuwendet, wird unmittelbar auf die Beobachtung der längeren oder kürzeren Wiederholungsfolgen desselben Ergebnisses hingewiesen. Alle sogenannten Spielsysteme knüpfen an diese Wiederholungen oder »Iterationen« an und auch in den Wahrscheinlichkeits-Betrachtungen des gewöhnlichen Lebens mißt man ihnen die größte Bedeutung bei. Wenn beim Spiel auf »grad oder ungrad« fünfmal nacheinander »grad« erschienen ist, meint man, das nächste Mal könne es nicht mehr so bleiben; umgekehrt geht eine weit verbreitete Ansicht dahin, daß auf einen Eisenbahnunfall stets noch zwei weitere folgen (hier lautet die Alternative: glücklicher oder unglücklicher Ausgang einer Eisenbahnfahrt). Beide Anschauungen haben auch schon ihre wissenschaftliche Vertretung gefunden: Der Philosoph Karl Marbe sucht in einem umfangreichen Werke »Die Gleichförmigkeit in der Welt«¹⁾ den Nachweis zu erbringen, daß lange Iterationen tatsächlich seltener vorkommen, als es die Wahrscheinlichkeitsrechnung erwarten läßt, und der Biologe Paul Kammerer häuft in seinem »Gesetz der Serie«²⁾ eine Menge von Einzelbeobachtungen, um zu zeigen, daß wenigstens kurze Wiederholungsfolgen weit häufiger auftreten, als man durchschnittlich erwarten sollte.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das mathematische Problem der Iterationen, das bisher nicht erledigt war³⁾, einer Lösung zugeführt, d. h. die allgemeine Frage folgender Art beantwortet: Welches ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß bei n Würfeln mit einer Münze gerade x Iterationen der Länge m , also z. B. bei tausend Würfeln drei Folgen von genau sechs gleichen Ergebnissen eintreten? Die Antwort lautet hier, wenn die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Einzelergebnisse, Kopf oder Adler, zu $\frac{1}{2}$ angenommen werden, $w = 0,032$. Allgemein werden wir zeigen, daß bei genügend großem n :

$$w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!},$$

gilt, wenn a die aus dem Beobachtungsumfang n , der Iterationslänge m und den Grundwahrscheinlichkeiten zu ermittelnde »Erwartungszahl« von Iterationen bedeutet. Von dieser konkreten Lösung aus ergibt sich erst die Möglichkeit, das zur Begründung jener populären Ansichten Gesagte einwandfrei zu beurteilen.

Wie bei allen derartigen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet die Lösung, sobald einmal die Aufgabe klar formuliert (1) und auf die vier Grundaufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt ist, keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten. Man kann ein Verfahren angeben (2), das die gesuchte Wahrscheinlichkeit in einer endlichen Anzahl von Schritten aufzufinden gestattet. Wird aber der Umfang n der Beobachtungsreihe sehr groß, so verliert dieses Verfahren seine praktische Anwendbarkeit und die Lösung gelingt nur auf einem Umweg: Man muß die sogenannten »Momente« der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion einführen (3), für die sich eine gerade bei großem n sehr brauchbare Abschätzung finden läßt (4). Aus den Grenzwerten der Momente kann man dann auf Grund neuerer Ergebnisse über das »Momentenproblem« auf die zu ermittelnde Funktion selbst schließen (5 und 6). Der Vergleich mit den von

¹⁾ 2 Bde. München 1916/1919. — ²⁾ Stuttgart u. Berlin 1919. — ³⁾ Ueber die Literatur vergl. L. v. Bortkiewicz, Die Iterationen, Berlin 1917, sowie meinen Aufsatz in »Die Naturwissenschaften«, 7, 1919, S. 168 ff.