Die Minimaleigenschaft der Kugel.

Von Wilhelm Groß in Wien.

Der durch die Arbeiten von Steiner¹⁾ und Schwarz²⁾ klassisch gewordene Satz, daß die Kugel unter allen Körpern gleichen Volumens die kleinste Oberfläche besitzt, hat eine Reihe von Beweisen erfahren, die aber die Vergleichskörper gewissen Einschränkungen unterwerfen. Diese sind teils den angewandten Methoden zu eigen (Variationsrechnung), teils aber darin begründet, daß den Begriffen „Fläche“ und „Oberfläche“ gewisse Schwierigkeiten anhaften. So beschränken sich Minkowski³⁾ und Blaschke⁴⁾ auf konvexe Vergleichskörper, während Schwarz⁵⁾ und Müller⁶⁾ den Oberflächen gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften auferlegen.

Tonelli⁷⁾ behauptet in seiner Arbeit „Sulla proprietà di minimo della sfera“, ⁸⁾ obigen Satz in größter Allgemeinheit bewiesen zu haben und diesen Zweck verfolgt auch vorliegende Arbeit, die dabei mit möglichst elementaren Mitteln auszukommen sucht. Wir geben hierbei obigem Satze folgende in ihrer Allgemeinheit wohl nicht mehr zu überbietende Form:

Unter allen abgeschlossenen⁹⁾ Punktmengen von gleichem Inhalt ist die Kugel jene, deren Grenzpunkte das kleinste Flächenmaß besitzen. Zur Bestimmung des Inhaltes, bezw. des Flächenmaßes lassen wir zu, daß gewisse abgeschlossene Teilmengen mehrfach gerechnet werden.

¹⁾ Steiner, „Über Maximum und Minimum...“, 1847, Ges. Werke, Bd. 2, S. 300—306.

²⁾ Schwarz, „Beweis des Satzes usf.“, 1884, Ges. Werke, Bd. 2, S. 327—340.

³⁾ Minkowski, „Volumen und Oberfläche“, 1903, Math. Ann., Bd. 57, S. 447—495.

⁴⁾ Blaschke, Kreis und Kugel, 1915, Jahresber. d. d. M. V., Bd. 24, S. 195—209, Kreis und Kugel, Leipzig, Veit, 1916, S. 43—85.

⁵⁾ a. a. O.

⁶⁾ O. Müller, „Über die Minimaleigenschaft der Kugel“ (Diss., Göttingen, 1903).

⁷⁾ Tonelli, „Sulla proprietà...“, Rend. di Palermo, 1915, Bd. 39, S. 109,

⁸⁾ Wie weit die Allgemeinheit seines Beweises geht, konnte ich nicht feststellen, da mir infolge des Krieges nur der Anfang seiner Arbeit vorliegt.

⁹⁾ S. Abschnitt VI.

Die Grenzpunkte der Menge bilden eine abgeschlossene Teilmenge, die nirgends dicht ist und alle Randpunkte der Menge enthält, d. h. alle Punkte der Menge, die Häufungspunkte der äußeren Punkte sind. Die Gesamtheit der übrigen inneren Punkte der Menge bezeichnen wir als Innenpunkte.

Da wir verlangen, daß eine Menge von endlichem Flächenmaß das Lebesguesche Raummaß Null besitzt, so ist in unserem Falle das Lebesguesche Maß der Menge, das wir zur Inhaltsbestimmung verwenden, gleich dem inneren Jordanschen Maß der Innenpunkte. Zwei Punktmengen, von denen die eine aus der anderen entsteht, indem ein Teil der äußeren, bezw. der Innenpunkte zu der Menge der Grenzpunkte hinzugenommen wird, ohne daß sich deren Flächenmaß ändert, bezeichnen wir als äquivalent und erweitern den Begriff so, daß wir zwei Mengen als äquivalent bezeichnen, wenn sie zu einer dritten im eben angegebenen Sinne äquivalent sind. Äquivalente Mengen betrachten wir als nicht verschieden.

I. Punktmengen, die einzelne Teile des Raumes mehrfach bedecken.

Den Punktmengen, die einzelne Teile des Raumes mehrfach bedecken, ordnen wir in folgender Art einen Inhalt und für ihre Grenzpunkte ein Flächenmaß zu:

Bezeichnen wir den Inhalt einer Punktmenge M mit $I(M)$ und das Flächenmaß ihrer Grenzpunkte mit $F(M)$ und besteht E aus dem System der abgeschlossenen Mengen $E_1, E_2, \dots$, von denen E_{q+1} eine Teilmenge von E_q ist ($q = 1, \dots$), während E_∞ den Durchschnitt aller Mengen $E_1, E_2, \dots$, bedeutet, wobei von einem gewissen n ab die Mengen E_q leere Mengen sein können, so sei

$$I(E) = \sum_1^\infty I(E_n) \quad F(E) = \sum_1^\infty F(E_n) \quad \text{oder} \quad \sum_1^\infty F(E_n) + F(E_\infty).$$

Ist die erste Summe endlich, so ist ersichtlich $I(E_\infty) = 0$. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über das Flächenmaß folgt aus

der Konvergenz von $\sum_1^\infty F(E_n)$ $F(E_\infty) = 0$, doch gehen wir darauf nicht näher ein.

Nehmen wir nun an, daß unser Satz für die den Raum nur einfach bedeckenden Mengen bereits erwiesen sei. Dann ersetze ich die Mengen E_q durch inhaltsgleiche Kugeln K_q und bekomme so, da $I(E_q) = I(K_q)$, $F(E_q) \geq F(K_q)$,

$$\sum_1^\infty I(K_n) = I(E), \quad \sum_1^\infty F(K_n) \leq F(E).$$

Ich nenne nun $\mathfrak{K}_q$ die Kugel, die den Inhalt $\sum_1^q I(K_q)$ besitzt. Es ist dann, wie man sich leicht überzeugt,

$$I(\mathfrak{K}_{q+1}) = I(\mathfrak{K}_q) + I(K_{q+1}), \quad F(\mathfrak{K}_{q+1}) = F(\mathfrak{K}_q) + F(K_{q+1}) - z_q,$$

wobei x_q eine von Null verschiedene Größe bezeichnet. Ist nun $\mathfrak{R}_\infty$ die Kugel vom Inhalte $\sum_1^\infty I(K_n)$, so haben wir also

$$I(\mathfrak{R}_\infty) = I(E), \quad F(\mathfrak{R}_\infty) = \lim_{q=\infty} F(\mathfrak{R}_q) \leq \sum_1^\infty F(K_n) - x_1 < F(E).$$

Wir können also eine Kugel von gleichem Inhalt und kleinerem Flächenmaß der Grenzpunkte angeben, womit unser Satz auch für diesen Fall nachgewiesen ist. Wir können uns daher im folgenden auf den Raum einfach überdeckende Mengen beschränken.

II. Das Flächenmaß.

An die Definition des Flächenmaßes stellen wir folgende Forderungen:

1. Das Flächenmaß eines Teiles sei höchstens gleich dem Flächenmaß des Ganzen.

2. Mengen von endlichem Flächenmaß haben das Lebesguesche Raummaß Null.

Dazu kommt noch eine dritte Bedingung, die wir später aufstellen.

Fügen wir zur Menge der Innenpunkte von E alle Grenzpunkte hinzu, die nicht zugleich Randpunkte sind, so erhalten wir eine Menge E^* , für die $I(E^*) = I(E)$, $F(E^*) \leq F(E)$. Lassen wir jene Grenzpunkte weg, die nicht Häufungspunkte von Innenpunkten sind, so gilt für die so gewonnene Menge E^0 : $I(E^0) = I(E)$, $F(E^0) \leq F(E)$. Wir können uns daher auf Mengen $\bar{E}$ beschränken, deren Grenzpunkte in jeder Umgebung sowohl äußere als auch innere Punkte haben. Als dritte Forderung stellen wir nun auf:

3. Für die Randpunkte dieser Mengen $\bar{E}$ sei das Flächenmaß mindestens gleich der im folgenden definierten Flächenschranke.

Es sei M_ε die Menge der Innenpunkte von $\bar{E}$, die von den Randpunkten einen Abstand $\geq \varepsilon$ besitzen und Σ_ε ein System ebener Vielecke, die in der Nachbarschaft ε der Grenzpunkte von $\bar{E}$ liegen und so beschaffen sind, daß jeder Streckenzug, der M_ε mit einem von M_ε um mindestens 2ε entfernten Punkt verbindet, Σ_ε trifft.

Die untere Unbestimmtheitsgrenze des elementargeometrischen Flächenmaßes von Σ_ε für alle möglichen Σ_ε und $\lim \varepsilon = 0$ bezeichnen wir als Flächenschranke von $\bar{E}$.

Die Flächenschranke ändert sich nicht, wenn wir verlangen, daß Σ_ε aus einer endlichen Anzahl auseinanderliegender geschlossener, sich nicht überschneidender Polyeder besteht.

Fügen wir die Bedingung hinzu, daß unsere Grenzpunkte umgekehrt in der Nachbarschaft ε von Σ_ε liegen, so erhalten wir für die Grenzpunkte von $\bar{E}$ ein Flächenmaß, das wir als Lebesguesches Flächenmaß bezeichnen, da es für den Fall, daß die Grenzpunkte von $\bar{E}$ das eindeutige stetige Abbild einer Kugel sind, durch die Lebesguesche Definition¹⁾ geliefert wird. Das Lebesguesche Flächenmaß ist mindestens gleich der Flächenschranke.

In Verallgemeinerung einer Minkowskischen Definition²⁾ bezeichnen wir als Minkowskisches Flächenmaß von M die untere Grenze von $\frac{V}{2r}$ für $r=0$, wobei V das Volumen der Vereinigungsmenge aller Kugeln ist, die ich um die Punkte von M mit dem Radius r schlage. Das Caratheodorysche Flächenmaß³⁾ erhalten wir so: Wir zerlegen M in abzählbarviele Teilmengen M_κ , deren jede in einer Kugel vom Radius ρ enthalten ist. M_κ^* sei die kleinste konvexe Menge, in der M_κ enthalten ist. Es gibt eine Ebenenstellung, so daß die Orthogonalprojektion von M_κ^* auf sie den größten (Jordanschen-Lebesgueschen) Inhalt besitzt. Diesen Wert, $D(M_\kappa)$, bezeichnen wir als zweidimensionalen Durchmesser von M_κ . Die untere Unbestimmtheitsgrenze von $\sum_1^\infty D(M_\kappa)$ für $\lim \rho=0$ und alle möglichen derartigen Einteilungen ist das Caratheodorysche Flächenmaß.

Die beiden letzten Maße erfüllen ersichtlich die zwei ersten Forderungen, die wir an das Flächenmaß stellen. Aber sie genügen auch der dritten Forderung. Wir beweisen daher unseren Satz nur für Mengen $\bar{E}$, deren Randpunkte das Raummaß Null besitzen, indem wir als Flächenmaß die Flächenschranke benutzen, da dann unser Satz für jedes Flächenmaß gilt, das unseren drei Forderungen genügt.

Es sei erwähnt, daß die Flächenschranke — übrigens auch unser Lebesguesches Flächenmaß — den ersten beiden Bedingungen nicht genügt. Dies zeigt folgendes Beispiel: Ich scheide aus einer Kugel vom Radius 1 um O zwei Systeme von Kugeln A und B aus, deren jede mit keiner anderen und auch mit keiner Kugel mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{n}}$ um O einen Punkt gemein hat, während jeder übrig bleibende Punkt der Kugel

¹⁾ Lebesgue, Integral, longueur, aire (Ann. di Mat., 1902, ser. III, Bd. VII, S. 231 ff.). Sur la définition de l'aire (L'enseignement math. 1908, Bd. X, S. 212). — Die von Blaschke a. a. O. S. 80 gegebene Definition stimmt mit der Lebesgueschen nicht überein. Sie liefert einen Wert, der mindestens gleich dem Lebesgueschen ist. Zwischen dieser und jener steht noch die von Zoard de Geöcze (Comptes rendus 1907).

²⁾ S. Jahresber. d. d. Math. Ver. IX, 1901, S. 115.

³⁾ Caratheodory, Gött. Nachr., 1914, S. 404 ff.

Häufungspunkt sowohl der A als auch der B ist. Wir können dabei die Wahl so treffen, daß $\Sigma F(A_i) = \delta < 1$ ist, während $\Sigma I(A_i) + \Sigma I(B_i) < \delta$. Wir betrachten die abgeschlossene Menge $\bar{E}$, deren Innenpunkte die Innenpunkte der Kugeln A sind. Das Lebesguesche Flächenmaß der Randpunkte dieser Menge ist dann $\delta < 1$, während das Lebesguesche Raummaß $> \frac{4}{3}\pi - \delta > 0$ ist.

Nehme ich als Menge $\bar{E}$ die Menge der Punkte, die von O einen Abstand $\geq \frac{1}{\sqrt{2}^v}$, $\leq \frac{1}{\sqrt{2}^v - 1}$ haben ($v = 1, 2, \dots$), so besteht die Menge der Randpunkte aus den Kugeln um O mit den Radien $\frac{1}{\sqrt{n}}$; ihr Lebesguesches Flächenmaß ist unendlichgroß, obwohl diese Menge eine Teilmenge der Grenzpunkte der ersten Menge ist.

Doch ist unmittelbar ersichtlich, daß $F(\bar{E}) = F(\bar{E}_1) + F(\bar{E}_2)$, wenn $\bar{E}$ in zwei getrennte Teilmengen gleicher Beschaffenheit, $\bar{E}_1, \bar{E}_2$, zerfällt.

Auch gilt offenkundig der wichtige Satz, wobei wir jetzt die Flächenschranke von $\bar{E}$ mit $F(\bar{E})$ bezeichnen:

Ist die Menge $\bar{E}$ die Grenze der Mengen $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$, und zwar so, daß der Rand von $\bar{E}$ die Grenze der Ränder von $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$ ist, so gilt

$$F(\bar{E}) \leq \lim_{n=\infty} F(E_n).$$

Denn da die Konvergenz eine gleichmäßige ist, so liegen die Ränder von $\bar{E}_n$ mit ihrer Nachbarschaft $\frac{\varepsilon}{2}$ von einem bestimmten n ab in der Nachbarschaft ε des Randes von $\bar{E}$. Dabei enthalten die zu den Mengen $\bar{E}_n$ gehörigen $M_{n, \frac{\varepsilon}{2}}$ die zu $\bar{E}$ gehörige Menge M_ε . Daher gehören die $\Sigma_{n, \frac{\varepsilon}{2}}$ zu den Σ_ε , womit unser Satz bewiesen ist.

Es gilt aber weiter der Satz:

Besteht die Menge $\bar{E}$ aus lauter Konvergenzpunkten der Mengenfolge $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$, während sich deren Häufungsmenge E^* von $\bar{E}$ um eine Menge vom Raummaß Null unterscheidet, wobei sich um eine solche auch die Häufungsmenge der Randpunkte von $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots: G^*$ von den Randpunkten von $\bar{E}$ unterscheidet, so gilt

$$F(\bar{E}) \leq \lim_{n=\infty} F(\bar{E}_n).$$

Die Mengenfolge $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$ braucht hierbei nicht zu konvergieren und $I(G^*)$ kann $\neq 0$ sein.

Ich betrachte jetzt die Nachbarschaft ε der Randpunkte von $\overline{E}: N_\varepsilon(\overline{E})$. Aus ihr greife ich die Punkte heraus, die von den Randpunkten von E eine Entfernung $\ll \frac{2\varepsilon}{3}$, $\gg \frac{\varepsilon}{3}$ besitzen. Diese Menge zerfällt in zwei getrennte Systeme, von denen das eine näher gegen die Außenpunkte, das andere näher gegen M_ε liegt. In beiden Systemen, I und II, lege ich eine Reihe von auseinanderliegenden geschlossenen, sich nicht überschneidenden Polyedern, Π_1 , bzw. Π_2 , deren Flächen irgend drei aufeinander senkrechten Ebenen parallel sind, und die so beschaffen sind, daß jeder Streckenzug, der irgend einen von M_ε um mehr als 2ε entfernten Außenpunkt mit M_ε verbindet, sowohl Π_1 als Π_2 trifft. Ich bilde nun zu Π_1 und zu Π_2 jene geschlossenen Polyederreihen, deren Flächen parallel zu den Flächen im Abstände h sind: Π_1^h, Π_2^h , wobei Π_1^h zwischen Π_1 und den Außenpunkten, Π_2^h zwischen Π_2 und M_ε liegt. Es sei ρ der kleinste Abstand zweier nicht aneinanderstoßender Flächen von Π_1 , bzw. Π_2 . Nehmen wir dann h kleiner als $\frac{\rho}{3}$ und $\frac{\varepsilon}{3}$, so liegen die Polyeder von Π_1^h , bzw. Π_2^h ebenfalls auseinander und überschneiden sich nicht.

Da G^* außerhalb $N_\frac{\varepsilon}{3}(\overline{E})$ das Maß Null besitzt, so geht das Maß der Nachbarschaft η von G^* außerhalb $N_\frac{\varepsilon}{3}(\overline{E})$ mit η gegen Null. Daher gibt es ein Π_1^h und ein Π_2^h , die mit dieser Nachbarschaft Flächenstücke S_1 , bzw. S_2 , je im Gesamtbetrage $< \frac{\delta}{3}$ gemein haben, wenn η genügend klein gewählt wird. Nun liegen die Randpunkte von $\overline{E}_n$ für $n > N$ in der Nachbarschaft $\frac{\eta}{2}$ von G^* . Ich kann nun in der Nachbarschaft $\frac{\eta}{2}$ der Randpunkte von $\overline{E}_n$ ein System von geschlossenen, auseinanderliegenden, sich nicht überschneidenden Polyedern $P_n, \frac{\eta}{2}$ finden, daß jeder Streckenzug, der einen von $M_n, \frac{\eta}{2}$ um mindestens η entfernten Außenpunkt mit $M_n, \frac{\eta}{2}$ verbindet, wenigstens einen Punkt mit $P_n, \frac{\eta}{2}$ gemein hat und daß $|F(\overline{E}_n) - F(P_n, \frac{\eta}{2})| < \frac{\delta}{3}$. $P_n, \frac{\eta}{2}$ durchdringt Π_1^h bzw. Π_2^h nur in S_1 , bzw. S_2 . Ersetze ich daher die aus Π_1^h gegen die Außenpunkte, bzw. von Π_2^h gegen M_ε liegenden Teile von $P_n, \frac{\eta}{2}$ durch die ausgeschnittenen Stücke von S_1 , bzw. S_2 , so erhalte ich ein Σ_ε für $\overline{E}$, dessen Flächenmaß

$$< F(P_n, \frac{\eta}{2}) + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} < F(\overline{E}_n) + \delta.$$

Daraus folgt aber infolge der Willkür von δ

$$F(\bar{E}) \leq \lim F(\bar{E}_n).$$

Es sei noch erwähnt, daß die Flächenschranke für die Kugel und für die geschlossenen Polyeder gleich dem elementargeometrischen Flächenmaße ist. Weitere Angaben zu machen, ist für unsere Zwecke unnötig.

III. Die Steinersche Symmetrisierung.

Die Steinersche Symmetrisierung in bezug auf die Ebene $\mathcal{E}$ besteht in der Ersetzung von $\bar{E}$ durch eine inhaltsgleiche Menge $\bar{D}$, die wir auf folgende Art und Weise erhalten: Wir tragen auf jeder zu $\mathcal{E}$ senkrechten Geraden von ihrem Durchstoßpunkt mit $\mathcal{E}$ nach beiden Seiten hin die Strecke $\frac{\bar{d}}{2}$ auf, wenn $\bar{d}$ der Inhalt der Punktmenge ist, die die betreffende Gerade mit $\bar{E}$ gemein hat. Die durch die Gesamtheit der Punkte dieser Strecken gebildete Menge D mache ich zur Menge $\bar{D}$, indem ich alle Punkte fortlasse, die nicht Häufungspunkte innerer Punkte sind.

Daß $\bar{D}$ mit $\bar{E}$ inhaltsgleich ist, zeigen wir so: Wir betrachten mit $\bar{E}$ die Mengen E_ε^0 , die entstehen, wenn man alle inneren Punkte, die von den Randpunkten von $\bar{E}$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ besitzen, wegläßt und hierauf abgeschlossen macht, und die Mengen E_ε^{00} , die durch Hinzufügung aller äußeren Punkte gewonnen werden, die von den Randpunkten von $\bar{E}$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ besitzen. Die D_ε^0 konvergieren nun gegen D^0 , das in $\bar{D}$ enthalten ist und dessen Inhalt gleich $I(E)$ ist, während die D_ε^{00} gegen D^{00} konvergieren, dessen Inhalt ebenfalls gleich $I(\bar{E})$ ist und das $\bar{D}$ enthält, da ja das Raummaß der Randpunkte von $\bar{E}$ gleich Null vorausgesetzt ist. Als Grenzpunkte von D^0 , bezw. D^{00} betrachten wir die Häufungspunkte der Grenzpunkte von D_ε^0 , bezw. D_ε^{00} . Die Vereinigungsmenge der Grenzpunkte von D^0 und D^{00} , die die Grenzpunkte von $\bar{D}$ enthält und die den Inhalt Null besitzt, bezeichnen wir mit H^* . Haben wir nun irgend eine Folge von Mengen $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$, die so gegen $\bar{E}$ konvergiert, daß die Randpunkte von $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \dots$ gegen die Randpunkte von $\bar{E}$ konvergieren und symmetrisieren wir diese Mengen, so brauchen die so erhaltenen Mengen $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n$ nicht zu konvergieren, aber alle Punkte von $\bar{D}$ sind Konvergenzpunkte dieser Mengenfolge und umgekehrt die Häufungspunkte dieser Menge gehören $\bar{D} + H^*$ an.

Bei der Steinerschen Symmetrisierung geht ein geschlossenes Polyeder P (bezw. ein System endlich vieler auseinander liegender geschlossener Polyeder) in ein inhaltsgleiches geschlossenes Polyeder Q

über, so daß $F(P) \gg F(Q)$. Wir beweisen dies leicht, indem wir das Innere von P durch Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{E}$ in endlich viele dreikantige prismatische Stücke zerlegen, deren jedes von zwei P angehörigen Dreiecken μ, ν abgeschlossen wird, deren eine Seite parallel der Schnittgeraden von μ und ν ist. Jeden Teil symmetrisieren wir zuerst für sich. Die Dreiecke μ, ν gehen dabei in die gegen $\mathfrak{E}$ symmetrischen Dreiecke μ^*, ν^* über und es ist $\mu^* + \nu^* \leq \mu + \nu$. Dies ist eine Folge des Satzes: Können sich in einem Tetraeder $ABCD$ die Ecken C und D parallel zu AB bewegen, so hat $\Delta(ACD) + \Delta(BCD)$ den größten Wert, wenn CD in der Symmetrieebene von AB liegt. Bei der Aneinanderfügung der Teile, die wir so — möglicherweise nach neuerlicher Verfeinerung der Einteilung — aus bereits symmetrisierten Stücken erhalten, deren Projektionen auf $\mathfrak{E}$ sich decken, gehen wir schrittweise vor. Wir können uns auf die Betrachtung der Teile ober $\mathfrak{E}$ beschränken. Es seien also (ABC) und (DEF) zwei Dreiecke ober $\mathfrak{E}$, die dieselbe Projektion (GHI) in $\mathfrak{E}$ besitzen. Wir können annehmen, daß $BC \parallel EF$. Es sei nun K, L, M bezüglich $\frac{A+D}{2}, \frac{B+E}{2}, \frac{C+F}{2}$. Wir können nun die prismatischen Stücke $(ABCGHI)$ und $(DEFGHI)$ durch das doppelte Stück $(KLMGHI)$ ersetzen; dadurch wird der Inhalt nicht geändert und $2\Delta(KLM) \leq \Delta(ABC) + \Delta(DEF)$ ¹⁾. Dies doppelte Stück ersetze ich dann durch $(2K, 2L, 2M, G, H, I)$. Dadurch bleibt sich der Inhalt wieder gleich und

$$\Delta(2K, 2L, 2M) \leq 2\Delta(K, L, M) \leq \Delta(ABC) + \Delta(DEF),$$

wie man am leichtesten erkennt, wenn man $KL \parallel \mathfrak{E}$ annimmt. Auf Grund dieser Andeutungen schließt man leicht, daß $F(P) \gg F(Q)$.

Liegt nun eine Menge $\bar{E}$ vor, so kann ich eine Folge von Systemen geschlossener, auseinander liegender, sich nicht überschneidender Polyeder $\sum_n^1$ konstruieren — die Σ_e genügen den oben S. 79 angegebenen Bedingungen — so daß $F(\bar{E}) = \lim F(\sum_n^1)$. Durch Symmetrisierung werde aus $\sum_n^1$ Θ_n . Verstehen wir unter dem Innern von $\sum_n^1$ die in $\bar{E} + N_n^1(\bar{E})$ ²⁾ enthaltenen von den Polyedern von $\sum_n^1$ eingeschlossenen Gebiete, so wird ersichtlich $\lim I(\sum_n^1) = I(\bar{E})$, ebenso $\lim I(\Theta_n) = I(\bar{E})$. Die $\sum_n^1$ erfüllen

¹⁾ Dies und der Satz, daß $\Delta(2K, 2L, 2M) \leq 2\Delta(K, L, M)$ lassen sich, einfach beweisen mit Hilfe des Satzes, daß in einem Dreiecke $a+b \gg 2s_c \gg a$, wenn s_c die zu c ($\gamma \leq \frac{\pi}{2}$) gehörige Schwerlinie bedeutet.

²⁾ S. S. 82.

dann die oben S. 79 angegebenen Bedingungen und da infolgedessen die Θ_n den Voraussetzungen des Satzes auf S. 81 genügen, so haben wir

$$F(\bar{D}) \leq \lim F(\Theta_n) \leq \lim F(\Sigma_n) = F(\bar{E}).$$

Durch die Symmetrisierung geht $\bar{E}$ in eine Menge $\bar{D}$ von gleichem Inhalt über, deren Randpunkte eine Flächenschranke besitzen, die höchstens so groß ist wie die Flächenschranke von $\bar{E}$.

IV. Beweis, daß für alle $\bar{E}$ die Beziehung gilt $F^3 - 36\pi I^2 \geq 0$.

Ich symmetrisiere die Menge $\bar{E}$ nacheinander an drei zu einander senkrechten Ebenen (XY, XZ, YZ) durch O und erhalte so eine zusammenhängende Menge W , die zu den drei Ebenen symmetrisch ist und mit jeder Parallelen zur X -, Y -, Z -Achse eine Strecke, einen Punkt oder nichts gemein hat. Dies folgt sofort, wenn man bemerkt, daß, wenn $\bar{D}$ die Menge bedeutet, die ich durch Symmetrisierung von $\bar{E}$ an der XY -Ebene erhalte, der Schnitt von $\bar{D}$ mit $Z=Z_1$ im Schnitte von $\bar{D}$ mit $Z=Z_2$ bei Deckung der Ebenen $Z=Z_1$ und $Z=Z_2$ enthalten ist, falls $|Z_1| > |Z_2|$, ferner daß die Symmetrie bezüglich eines Punktes, einer Geraden oder einer Ebene bei der Symmetrisierung erhalten bleibt, wenn die Symmetrisierungsebene durch den Punkt, bezw. die Gerade geht oder auf der betreffenden Geraden, bezw. Ebene senkrecht steht. Gehört daher W ein Punkt XYZ an, so das ganze Parallelepiped mit den Gegenecken (XYZ) ($-X, -Y, -Z$), dessen Flächen parallel den Koordinatenebenen sind.

Es sei nun K die Kugel mit dem Radius r um O , so daß ihr Inhalt $\frac{4}{3}r^3\pi = I(\bar{W})$. Es sei dann W^* der Durchschnitt von $\bar{W}$ und K , W^{**} der Rest von $\bar{W}$. Ist $I(W^*) = \frac{4}{3}r^3\pi$, so fällt $\bar{W}$ mit K zusammen und da $F(\bar{E}) \geq F(\bar{W}) = F(K)$, so ist in diesem Falle unser Satz bewiesen.

Es sei also das Maß der Punkte von K , die nicht $\bar{W}$ angehören, von Null verschieden: $\frac{4}{3}r^3\pi - I(W^*) = d > 0$. Dadurch ist der Radius der größten Kugel $\mathfrak{K}$ um O : $(r - \delta)$, die Teilmenge von W ist, in gewisser Hinsicht beschränkt. Selbstverständlich gilt

$$\delta \geq \delta_1, \text{ wenn } \frac{4}{3}r^3\pi - d = \frac{4}{3}(r - \delta_1)^3\pi.$$

Dann, da wenn $P^0(X^0, Y^0, Z^0)$ ein Punkt ist, den $\mathfrak{K}$ mit dem Rand von $\bar{W}$ gemein hat, die Ecken $|X| > |X^0|$, $|Y| > |Y^0|$,

$|Z| > |Z^0|$ keine Punkte von $\overline{W}$ enthalten und da diese Ecken mit K eine Punktmenge gemein haben, deren Maß $> 8 \frac{\delta^3}{6}$, so haben wir anderseits

$$\delta < \sqrt[3]{\frac{3}{4}d},$$

d. h., wenn d gegen Null geht, konvergiert $\mathfrak{R}$ gegen K . Gleichzeitig schließen wir, daß die Menge der Punkte von K , die nicht $\overline{W}$ angehören, in ihrem Innern eine Kugel vom Radius $\frac{\delta}{\sqrt{3}+1} > \frac{\delta_1}{3}$ enthalten, wobei δ_1 über einer bestimmten Zahl liegt, wenn d über einer gewissen Grenze liegt.

Das Maß von W^{**} , der Punkte von W , die K nicht angehören, ist ebenfalls d . Ich bestimme nun ε so, daß

$$6R^2\pi\varepsilon = \frac{d}{2},$$

wobei ich mit R den Radius einer Kugel $\mathfrak{R}$ um O bezeichne, die $\overline{W}$ in sich enthält. Es seien nun W^0 die Punkte W^{**} , für die $|X| \geq \varepsilon$, $|Y| \geq \varepsilon$, $|Z| \geq \varepsilon$. Ihr Maß ist $d^0 > \frac{d}{2}$. Es sei $r + \eta$ der Radius der kleinsten Kugel $\mathfrak{R}^0$ um O , die W^0 ganz umfaßt. Es gilt nun

$$\eta \geq \eta_1, \text{ wobei } \frac{4}{3}r^3\pi + d^0 = \frac{4}{3}(r + \eta_1)^3\pi.$$

Da anderseits der Raum des Parallelepipedes $(X^0, Y^0, Z^0), (-X^0, -Y^0, -Z^0)$, dessen Seiten parallel den Koordinatenebenen sind, soweit er außer K liegt, ganz der Menge W^0 angehört, wenn X^0, Y^0, Z^0 ein Punkt ist, den $\mathfrak{R}^0$ mit dem Rande von W^0 gemein hat und da sich diesem Raume eine Kugel vom Radius ρ einschreiben läßt, so daß ρ die

kleinere der Größen ε und $\frac{\eta}{\sqrt{3}+1} > \frac{\eta_1}{3}$ bezeichnet, so folgt, daß

die Menge der Punkte von $\overline{W}$, die außer K liegt, eine Kugel von einem Radius in sich enthält, der über einer bestimmten Zahl liegt, solange d über einer gewissen Grenze liegt.

Betrachte ich aber die Teilmenge W^{00} von W^{**} , für die $|X| \geq \sqrt[3]{\frac{3}{4}d}$, $|Y| \geq \sqrt[3]{\frac{3}{4}d}$, $|Z| \geq \sqrt[3]{\frac{3}{4}d}$, und ist $r + \eta$ der Radius der kleinsten Kugel $\mathfrak{R}^{00}$ um O , die ihr umschrieben werden kann, so gilt $\frac{8 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}d} \cdot \eta}{6} < d$, d. h. $\eta < \sqrt[3]{\frac{3}{4}d} \cdot R^4 \pi^2 \cdot \sqrt[3]{d}$, also $\mathfrak{R}^{00}$ konvergiert gegen K , wenn d gegen Null geht (bei festem R).

Ich suche mir nun einen Punkt P von $K - W^*$, so daß der Radius der größten Kugel um P , deren Inneres ganz in $K - W^*$ liegt, den größtmöglichen Wert besitzt, ebenso einen Punkt Q von W^{**} , daß der Radius der größten Kugel um Q , deren Inneres ganz in W^{**} liegt, den größtmöglichen Wert hat. Wir symmetrisieren nun $\overline{W}$ an der zu PQ senkrechten Ebene $\overline{\mathcal{E}}$ durch O und erhalten V . K geht hierbei in sich über; die Menge der Punkte, die V mit K gemein hat, ist ersichtlich um mindestens $v = \frac{4}{3}r^3\pi$ größer als W^* , wenn r den Radius der kleineren der Kugel um P und Q bezeichnet. Nach dem obigen bleibt daher v über einer Schranke, sobald d über einer bestimmten Grenze bleibt. Symmetrisieren wir V an einer zu $\overline{\mathcal{E}}$ senkrechten Ebene $\overline{\overline{\mathcal{E}}}$ durch O und sodann an einer zu $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\overline{\mathcal{E}}}$ senkrechten Ebene $\overline{\overline{\overline{\mathcal{E}}}}$ durch O und drehen wir dann um, so daß $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\overline{\mathcal{E}}}$, $\overline{\overline{\overline{\mathcal{E}}}}$ mit den Koordinatenebenen zusammenfallen, erhalten wir eine Menge $\overline{W}_1$, von der gleichen Beschaffenheit wie $\overline{W}$. Die Menge ihrer außer K liegenden Punkte hat einen Inhalt d_1 , der mindestens um v kleiner ist als $\overline{d}$.

Von $\overline{W}_1$ fahren wir entsprechend fort und bilden so die Folge von Mengen $\overline{W}_2, \dots, \overline{W}_n, \dots$, die alle in der Kugel $\mathfrak{K}$ liegen, so daß für alle das gleiche R gilt. Es ist $\lim d_n = 0$, denn $d_{n-1} - d_n$ liegt über einer gewissen Schranke, wenn d_{n-1} über einer bestimmten Zahl > 0 liegt. Da $\delta, \varepsilon, \eta$ mit $\overline{d}$ gegen Null gehen, so sind alle Punkte von K Konvergenzpunkte dieser Folge, während ihre Häufungspunkte außerdem noch in den in $\mathfrak{K}$ liegenden Teilen der Koordinatenebene liegen können. Daher ist nach unseren Sätzen über die Flächenschranke

$$4r^2\pi \ll \lim F(\overline{W}_n) \ll F(\overline{E}).$$

Da anderseits $\frac{4}{3}r^3\pi = I(\overline{E})$, so haben wir

$$F^3(\overline{E}) - 36\pi I^2(E) \gg 0.$$

V. Beweis, daß nur für die Kugel die Gleichung gilt $F^3 - 36\pi I^2 = 0$.

Zuerst können wir annehmen, daß $\overline{E}$ zusammenhängend ist. Läßt sich nämlich $\overline{E}$ in zwei getrennte Teilmengen $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ spalten, so gilt, da $F(\overline{E}) = F(\overline{E}_1) + F(\overline{E}_2)$, $I(\overline{E}) = I(\overline{E}_1) + I(\overline{E}_2)$ und da nach dem vorigen Abschnitt $F(K_1) \ll F(\overline{E}_1)$, $F(K_2) \ll F(\overline{E}_2)$, wenn K_1, K_2 , die zu $\overline{E}_1$, bzw. $\overline{E}_2$ inhaltsgleichen Kugeln bezeichnen, nach einer Bemerkung des ersten Abschnittes $F(K) < F(\overline{E})$, wenn K die zu $\overline{E}$ inhaltsgleiche Kugel ist.

$\overline{E}$ ist nun entweder eine Kugel oder aber es läßt sich zu ihr eine Menge $\overline{W}$ von der im vorigen Abschnitt angegebenen Beschaffenheit herstellen, die ebenfalls keine Kugel ist. Wir nennen die größte Entfernung, die zwischen zwei zur Richtung α senkrechten Ebenen möglich ist, die Punkte mit $\overline{E}$ gemein haben, den Durchmesser von $\overline{E}$ in der Richtung α . Es sei $(\overline{E}I) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Ist einer der Durchmesser D_0 von $2r$ verschieden, so beweisen wir unsere Behauptung, indem wir die X -Achse parallel diesem Durchmesser annehmen und dann nacheinander in der angegebenen Reihenfolge an der XY -, XZ - und YZ -Ebene symmetrisieren. Das so erhaltene $\overline{W}$ hat mit der X -Achse ein Stück genau von der Länge D_0 gemein und kann daher keine Kugel sein. Sind alle Durchmesser gleich $2r$, so ist $\overline{E}$ in einer Fläche konstanter Breite enthalten. Da aber die Flächen konstanter Breite $2r$ einen Inhalt $< \frac{4}{3}r^3\pi$ haben — außer der Kugel — so ist $\overline{E}$ selbst schon eine Kugel.

Wollen wir uns auf den letzten Satz (über die Flächen konstanter Breite) nicht stützen, so können wir auch so verfahren: Es seien D_1 und D_2 zwei aufeinander senkrechte Durchmesser.¹⁾ Ist die Verbindungslinie der Halbierungspunkte von D_1 und D_2 nicht auf beiden senkrecht, so geht z. B. die Ebene $\mathfrak{D}$ durch D_1 senkrecht zu D_2 nicht durch den Halbierungspunkt von D_2 . Wird durch diese Ebene $\overline{E}$ nicht in zwei inhaltsgleiche Teile geteilt, so gehe ich zu jener Parallelebene E über, die dies tut. Ich kann nun durch Zusammenfügung der einen Hälfte E_1 mit ihrem Spiegelbild in bezug auf $E: E_1^s$ zu einer Menge $\overline{E}^v$ erreichen, daß entweder $F(\overline{E}^v) < F(\overline{E})$ ist und dann ist — da natürlich $I(\overline{E}^v) = I(\overline{E})$ — die Beziehung $F(\overline{E})^3 - 36\pi I(\overline{E})^2 > 0$ nachgewiesen. Oder aber $\overline{E}^v$, für das $F(\overline{E}^v) = F(\overline{E})$ enthält einen Durchmesser $< 2r$, da die größte Entfernung, die auf einer Parallelen zu D_1 zwei Punkte von E_1 haben können, um einen endlichen Betrag unter $2r$ bleibt. Wird aber durch $\mathfrak{D}$ schon E in zwei inhaltsgleiche Teile geteilt und ist bei dem beschriebenen Verfahren $F(\overline{E}^v) = F(\overline{E})$, so ist der Durchmesser von $\overline{E}^v$ in der Richtung $D_2 < 2r$; denn ist der eine der Abschnitte, in die D_2 durch $\mathfrak{D}$ geteilt wird, gleich $d < r$ und enthält E_1 diesen Abschnitt, so ist jener Durchmesser genau gleich $2d$. Wenn aber die Verbindungslinie der zwei Halbierungspunkte je zweier aufeinander senkrechter Durchmesser auf diesen beiden senkrecht ist, so werden alle Durchmesser durch denselben Punkt O

¹⁾ In diesem Falle verstehen wir unter Durchmesser auch die Verbindungsstrecke zweier Punkte von $\overline{E}$ von der Länge $2r$, deren es in jeder Richtung eine und nur eine gibt.

gehälftet, $\bar{E}$ liegt daher in der Kugel mit dem Radius r um O und da sein Inhalt $= \frac{4}{3} r^3 \pi$, ist es mit ihr identisch.

Im vorstehenden und auch im folgenden ist uns folgende Betrachtung wichtig. Teilen wir $\bar{E}$ in zwei Teile durch die Ebene $\mathfrak{E}$, z. B. durch $X=0$. Dann seien $\bar{E}_1$ bzw. $\bar{E}_2$ die Teile von $\bar{E}_1$ für die $X > 0$ bzw. $X < 0$. Ich spiegle $\bar{E}_1$ an $\mathfrak{E}$ und erhalte $\bar{E}_1^s$; die Menge $\bar{E}^v$, die durch Zusammensetzung von $\bar{E}_1$, $\bar{E}_1^s$ und ihren Häufungspunkten in $\mathfrak{E}$ entsteht, besitzt eine Flächenschranke, bezüglich der ich folgendes aussagen kann: Es sei Σ_δ ein auf S. 79 definiertes System für $\bar{E}$, Σ^I , Σ^{II} , Σ^{III} die Teile von Σ_δ , für die $X > \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \geq X \geq \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > X$. Dann läßt sich aus Σ^I durch Verschiebung um ε_1 an die Ebene $\mathfrak{E}$ und Zusammensetzung mit dem an $\mathfrak{E}$ gespiegelten verschobenen System Σ^I_s mit Hinzufügung der in $\mathfrak{E}$ liegenden Kanten ein System Σ_{ε_1} für $\bar{E}^v$ ableiten, wenn $\delta \leq \varepsilon_1$. Daraus folgt einmal

$$F(\bar{E}^v) \leq 2 \lim_{\varepsilon_1=0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^I \text{ oder auch } \leq 2 \lim_{\varepsilon_1=\delta=0} \Sigma^I.$$

Es gilt übrigens das Gleichheitszeichen. Sei $\bar{\varepsilon}_1 < \varepsilon_1$ so gewählt, daß der Rand von $\bar{E}$ mit der Ebene $X = \bar{\varepsilon}_1$ nur eine Nullmenge gemein hat, ist dann Σ_δ^* der Teil von Σ_δ , das zu $\bar{E}$ gehört, für den $X < \bar{\varepsilon}_1$, Σ_δ^{**} der Teil des zu $\bar{E}^v$ gehörigen Σ_δ , für den $X > \bar{\varepsilon}_1$, so erhalte ich ein zu $\bar{E}$ gehöriges Σ_δ , wenn ich zu Σ_δ^* , Σ_δ^{**} eine gewisse Anzahl von Polygonen füge, die in der Nachbarschaft δ der Randpunkte von $\bar{E}$ liegen. Daher ist $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^I \leq \frac{1}{2} F(\bar{E}^v)$, also

$$F(\bar{E}^v) = 2 \lim_{\varepsilon_1=0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^I.$$

Da nun das Maß der Punkte, die die Nachbarschaft δ von $\bar{E}$ mit der Ebene $X = \bar{\varepsilon}_1$ gemein hat, mit δ , infolge unserer Voraussetzung gegen Null strebt, so schließt man, daß, wenn die Ebene $X = \varepsilon_1$ und $X = \varepsilon_2$ mit dem Rande von $\bar{E}$ nur Nullmengen gemein haben

$$F(\bar{E}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^I + \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^{II} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^{III},$$

wobei die Unbestimmtheitsgrenzen von einander unabhängig sind. Hat $X=0$ mit dem Rande von $\bar{E}$ nur eine Nullmenge gemein, so ist $F(\bar{E}^v) = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma^I$ für $\varepsilon_1 = 0$. Hat aber diese Menge das Maß

K , so ist $K = \lim_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0} \lim_{\delta=0} \Sigma^{III}$. Wir bezeichnen dann $\bar{F}(\mathfrak{F}_1) = \bar{F}(E_1) = \lim_{\varepsilon_1=0} \lim_{\delta=0} \Sigma^I$, $\bar{F}(\mathfrak{F}_2) = \bar{F}(E_2) = \lim_{\varepsilon_2=0} \lim_{\delta=0} \Sigma^{II}$ als die Flächenschränken der zu E_1 bzw. E_2 gehörigen Randpunkte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ von $\bar{E}$ und haben so

$$F(\bar{E}) = \bar{F}(E_1) + \bar{F}(E_2) + K.$$

Habe ich nun irgend eine Menge $\bar{E}$ durch $\mathfrak{E}$ so in zwei Teile geteilt, das $I(E_1) = I(E_2) = \frac{I(\bar{E})}{2}$, und ist nicht $\bar{F}(E_1) = \bar{F}(E_2) = \frac{1}{2} F(\bar{E})$ — dies trifft immer ein, wenn $k \neq 0$ —, ist z. B. $F(E_1) < \frac{1}{2} F(\bar{E})$, so hat die von E_1 durch das Spiegelungsverfahren abgeleitete Menge $\bar{E}^v$ eine kleinere Flächenschränke als $\bar{E}$, nämlich $2 \bar{F}(E_1)$. Wir werden daher im folgenden bei Anwendung des Spiegelungsverfahrens immer voraussetzen, daß $\bar{F}(E_1) = \bar{F}(E_2) = \frac{1}{2} F(\bar{E})$, also $F(\bar{E}^v) = F(\bar{E})$.

Es sei nun $\bar{W}$ von einer Kugel verschieden. Ich kann annehmen, daß der Punkt P , in dem die X -Achse den Rand von $\bar{W}$ durchdringt, von O den größtmöglichen Abstand besitzt, der natürlich $> r$ ist. Ist dies nicht der Fall und ist P ein Punkt, der den größtmöglichen Abstand von O besitzt, dann wähle ich OP als X -Achse und symmetrisiere in der angegebenen Art. Ich wähle hierbei die Y -Achse so, daß die XY -Ebene mit dem Rande von $\bar{W}$ keinen Kreis gemein hat. Dies ist stets möglich, sonst wäre ja $\bar{W}$ eine Kugel vom Radius $OP = \rho_0$. Durch Drehung — vor dem Symmetrisierungsverfahren — kann ich erreichen, daß P auch nicht im Innern eines Kreisstückes der in der XY -Ebene liegenden Randkurve liegt, sondern wenigstens nach der einen Seite hin eine endliche Entfernung von einem solchen Stück besitzt. Dadurch erreiche ich, wie leicht ersichtlich, daß auch nach der Symmetrisierung die Schnittkurve von $\bar{W}$ mit der XY -Ebene in einer endlichen Entfernung von P keinen Punkt mit dem Kreise vom Radius OP gemein hat und dies setzen wir jetzt voraus. Stellen wir die Randkurve in der Form $\rho = \rho(\varphi)^1$ dar (X -Achse: $\varphi = 0$), so sei für

¹⁾ $\rho(\varphi)$ ist dabei eine eindeutige stetige Funktion von φ , da jede Gerade durch O den Rand von $\bar{W}$ nur in zwei zu O symmetrischen Punkten schneidet. $\rho(\varphi)$ besitzt fast überall einen Differentialquotienten, der für $\varepsilon < \varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ beschränkt bleibt. Daraus schließt man leicht die Existenz eines Punktepaares PQ , so daß $\vec{PQ}$ und $\vec{OP}$ einen spitzen Winkel bilden.

$\varphi_0 < \varepsilon$ $\rho_0 - \rho(\varphi_0) = \eta > 0$. Ich betrachte nun weiter die den Werten $\varphi = 0, \frac{\varphi_0}{n}, \frac{2\varphi_0}{n}, \dots, \varphi_0$ entsprechenden Punkte. Wenn ich n groß genug wähle, so muß es unter diesen zwei Punkte S, T geben, so daß $\overrightarrow{OS}$ und $\overrightarrow{ST}$ einen spitzen Winkel miteinander bilden; denn sonst wäre $\rho_0 \leq \rho(\varphi_0) \cdot \frac{1}{\left(\cos \frac{\varphi_0}{n}\right)^n}$ und dies ist unmöglich, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\varphi}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2n}\right)^n = 1. \text{ Ich führe jetzt ein neues}$$

Koordinatensystem ein, dessen ξ -Achse durch OS gehe, während die η -Achse in der XY -Ebene liegt und durch S geht. Es sei n die Flächenschränke, die jenem Teile der Oberfläche von $\overline{W}:F$ zukommt, der in dem von der $\xi\zeta$ - und $\eta\zeta$ -Ebene gebildeten Quadranten $[\xi > 0, \eta > 0]$ liegt, in dem T liegt. Die Projektion dieses Teiles von $\overline{W}$ auf die $\xi\zeta$ -Ebene: Π habe das Maß m . Wir wenden nun das Spiegelungsverfahren bezüglich der $\xi\zeta$ -Ebene an, wobei wir jenen Teil beibehalten, der T enthält. Die so erhaltene Menge $\overline{W}^*$ wird nun von jeder Geraden, die der η -Achse parallel ist und mit der $\xi\chi$ -Ebene einen Innenpunkt von Π gemein hat, in mindestens vier Punkten geschnitten. Wenn ich daher an der $\xi\chi$ -Ebene symmetrisiere, erhalte ich eine Menge $\overline{W}^{**}$, deren Flächenschränke mindestens um $3 \frac{m^2}{n}$ kleiner ist als $F(\overline{W}^*)$. Da aber $\mathfrak{F}(\overline{W})^{**3} - 36\pi I(\overline{W}) \geq 0$, so ist also $F(\overline{E})^3 - 36\pi I(\overline{E})^2 > 0$ und die Beziehung $F^3 - 36\pi I^2 = 0$ besteht demnach nur für die Kugel.

Um unsere Behauptung nachzuweisen, bemerken wir, daß der Teil von $\overline{W}^{**}$, für den $\xi > 0$, in zwei getrennte Teile: $\mathfrak{F}:\eta > 0$ und $\mathfrak{F}^s:\eta < 0$ zerfällt. Es sei nun Σ_ε^I der Teil eines zu $\overline{W}$ gehörenden Σ_ε , für den $\xi > \delta$ — wir wählen ε nach Festlegung von δ so klein, daß für $\Sigma_\varepsilon^I \eta > 0$ —, dann kann ich für $\mathfrak{F}^s$ das zur $\xi\zeta$ -Ebene spiegelbildliche Σ_ε^{Is} nehmen. Es ist dann für eine bestimmte Folge der $\Sigma \overline{F}(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^s) = \lim_{\delta=0} \lim_{\varepsilon=0} (\Sigma_\varepsilon^I + \Sigma_\varepsilon^{Is})$. Bezeichne ich den Teil der Oberfläche von $\overline{W}^{**}$, für den $\xi > 0$, mit $\mathfrak{F}^{**}$, so folgt aus unseren früheren Bemerkungen, daß

$$F(\overline{W}^*) - F(\overline{W}^{**}) \geq \overline{F}(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^s) - \overline{F}(\mathfrak{F}^{**}),$$

und daß, wenn ich Σ_ε^{**} aus $\Sigma_\varepsilon^I + \Sigma_\varepsilon^{Is}$ durch Symmetrisierung erhalte, $\overline{F}(\mathfrak{F}^{**}) \leq \lim_{\delta=0} \lim_{\varepsilon=0} \Sigma_\varepsilon^{**}$. Ich symmetrisiere nun $\Sigma_\varepsilon^I + \Sigma_\varepsilon^{Is}$.

Wir können zuerst Σ_ε^I und Σ_ε^{Is} für sich symmetrisieren und dann

zusammenfügen. Um dies letztere zu tun, teilen wir das Polygon-system durch dreikantige Prismen $\parallel$ der η -Achse, derart im Dreiecke, daß je eine Seite g eines solchen Dreiecks parallel der $\xi\zeta$ -Ebene ist. Ich nehme ein solches Dreieck Δ her, für das $\eta > 0$. Es sei h die Höhe auf g in diesem Dreieck, $\bar{h}$ die Projektion von h auf die $\xi\zeta$ -Ebene, h^{**} die Höhe auf die zu g parallele Seite in dem entsprechenden Δ^{**} von Σ_e^{**} . Es ist dann

$$h^{**} = \sqrt{4h^2 - 3\bar{h}^2} < 2h - \frac{3}{4} \frac{\bar{h}^2}{h},$$

daher ist $2\Delta - \Delta^{**} > \frac{3}{8} \frac{\bar{h}^2}{h} g$. Nun ist $F(\Sigma_e^I + \Sigma_e^{Is}) \geq 2 \Sigma 2\Delta = 2 \Sigma hg$, $F(\Sigma_e^{**}) = 2 \Sigma \Delta^{**}$, daher

$$F(\Sigma_e^I + \Sigma_e^{Is}) - F(\Sigma_e^{**}) > \frac{3}{4} \Sigma \frac{\bar{h}^2}{h} g > \frac{3}{4} \cdot \frac{(\Sigma \bar{h} g)^2}{\Sigma hg}.$$

Beachtet man, daß $\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\delta=0} hg \ll \bar{F}(\mathfrak{F}) = n$, $\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\delta=0} \bar{h}g = 2m$, so folgt daher

$$\bar{F}(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^s) - F(\mathfrak{F}^{**}) \gg 3 \frac{m^2}{n}.$$

VI. Unbeschränkte Mengen.

Wir können unseren Satz auch auf unbeschränkte Mengen ausdehnen, indem wir eine Menge im erweiterten Sinne als abgeschlossen bezeichnen, wenn sie alle endlichen Häufungspunkte enthält. Als Inhalt bzw. Flächenmaß der Randpunkte definieren wir

$$F(E) = \lim_{R=\infty} F(E_R), \quad I(E) = \lim_{R=\infty} I(E_R),$$

wenn E_R der Durchschnitt von E mit der Kugel vom Radius R um den festen Punkt O bedeutet. Wir können uns wieder auf Mengen $\bar{E}$ beschränken. Für die Flächenschranke gelten dabei die früheren Sätze. Wir stellen uns wie oben $\bar{W}$ her. Ist $\bar{W}$, wie immer ich diese Menge herstelle, beschränkt, so muß $\bar{E}$ in mehrere getrennte Teile zerfallen und daraus ergibt sich wie oben unser Satz. $\bar{W}$ kann sich nur längs der Koordinatenachsen ins Unendliche erstrecken und ich kann dabei annehmen, daß $\bar{W}$ nur längs der X -Achse ins Unendliche zieht. Ist dies nicht von vornherein der

¹⁾ Denn $(\Sigma \bar{h} g)^2 = \left(\Sigma \sqrt{\bar{h} g} \cdot \frac{\bar{h}}{\sqrt{\bar{h}}} \sqrt{g} \right)^2 \ll \Sigma \frac{\bar{h}^2}{h} g \cdot \Sigma hg$.

Fall, so wähle ich OP [$P = (1, 1, 1)$] als neue X -Achse und symmetrisiere wieder in der Reihenfolge: $\bar{X}\bar{Y}$ -, $\bar{X}\bar{Z}$ -, $\bar{Y}\bar{Z}$ -Ebene. Ich wähle nun einen Punkt Q ($X^0, Y^0, 0$) auf der Schnittkurve der XY -Ebene mit dem Rande von $\bar{E}$, der so beschaffen ist, daß es Randpunkte P_1 ($X^1, Y^1, 0$) gibt, $[X_0 - \frac{r}{3} < X^1 < X^0, I(\bar{E}) = \frac{4}{3} r^3 \pi]$ gibt, so daß $\overrightarrow{P_1 P}$ und $\overrightarrow{OP}$ einen Winkel $< 60^\circ$ bildet. Dies ist stets möglich, da sich die Randkurve längs der X -Achse ins Unendliche zieht. Durch das Spiegelungsverfahren an der Ebene durch OP und die Z -Achse, sodann an einer zu OP senkrechten Ebene erhalte ich eine Menge $\bar{V}$, die infolge der gemachten Voraussetzung keine Kugel ist. Und damit ist auch für diesen Fall der Beweis erbracht.

VII. Die Schwarzsche Verkreisung.

Unter der Schwarzschen Verkreisung in bezug auf die Gerade $\mathfrak{G}$ verstehen wir folgendes Verfahren: Wir ersetzen die in irgend einer zu $\mathfrak{G}$ senkrechten Ebene liegenden Punkte von $\bar{E}$ durch einen Kreis in dieser Ebene um den Durchstoßpunkt von $\mathfrak{G}$ als Mittelpunkt, der denselben Inhalt hat wie jene Punktmenge. Die Gesamtheit der Punkte dieser Kreise bildet eine abgeschlossene Punktmenge; von dieser lassen wir noch alle Randpunkte weg, die nicht Häufungspunkte innerer Punkte sind. Die so erhaltene Menge $\bar{H}$ hat denselben Inhalt wie $\bar{E}$. Da ein Polyeder bei der Verkreisung eine Fläche kleineren Flächenmaßes liefert, so läßt sich wie oben zeigen, daß $F(\bar{H}) \leq F(\bar{E})$. Daher können wir auch dieses Verfahren beim Beweise unseres Satzes benützen. Der Beweis verläuft dann so: Wir verkreisen mit der Achse $\mathfrak{G}$ und symmetrisieren sodann an einer zu $\mathfrak{G}$ senkrechten Ebene. Dadurch erhalten wir einen in bezug auf O zentrisch symmetrischen Rotationskörper $\bar{\Omega}$. Die kleinste umgeschriebene Kugel um O habe den Radius R , die größte eingeschriebene Kugel um O den Radius ρ . Verkreisen wir jetzt in bezug auf eine zu $\mathfrak{G}$ senkrechte Achse durch O , so erhalten wir $\bar{\Omega}_1$. Sofort ersichtlich ist, daß $R_1 \leq R, \rho_1 \geq \rho$. Wir können hierüber noch Genaueres aussagen. Sei r der Radius des Kreises von Ω in der Ebene $\mathfrak{G} \perp \mathfrak{G}$ durch O , r_1 der entsprechende Radius des Kreises von Ω_1 in der Ebene $\perp \mathfrak{G}$ durch O , dann bemerken wir vorerst, daß $R_1 = R$ nur dann gelten kann, wenn $r = R$; $\rho_1 = \rho$, wenn $r = \rho$. Da die Radien der Kreise von Ω von der Ebene $\mathfrak{G}$

an gegen die Enden monoton abnehmen, so folgt — ganz grob geschätzt —

$$R_1 < \sqrt{R^2 - \frac{2}{\pi}(R-r)\sqrt{R^2-r^2}} < R - \frac{1}{\pi} \frac{(R-r)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}};$$

denn R_1 ist ganz in dem Rotationskörper enthalten, der durch Verkreisung um $\bar{\mathcal{G}}$ jenes Körpers erhalten wird, der von der Kugel R und dem Zylinder mit dem Radius r um $\mathcal{G}$ begrenzt wird. Da anderseits r_1 in dem Kreise enthalten ist, den ich durch Verkreisung der Figur erhalte, die aus dem Kreise R durch Weglassung der Punkte $|x| > |x^0|$, $|y| > |y^0|$ entsteht [$\mathcal{G} = x$ -Achse, $\bar{\mathcal{G}} = y$ -Achse, $\bar{\mathcal{G}} \perp \mathcal{G}$, $\bar{\mathcal{G}}$ durch O ; x^0, y^0 einer der Berührungspunkte des Kreises ρ mit der Meridiankurve von $\bar{\mathcal{Q}}$], — denn $\bar{\mathcal{Q}}$ ist in dem durch Rotation dieser Figur um $\mathcal{G}$ entstehenden Körper enthalten — so folgt

$$r_1 < \sqrt{R^2 - \frac{2}{\pi}(R-\rho)^2} < R - \frac{1}{\pi} \frac{(R-\rho)^2}{R}. \quad \bar{\mathcal{Q}}_1 \text{ verkreise ich um}$$

$\mathcal{G}$ zu $\bar{\mathcal{Q}}_2$, dieses um $\bar{\mathcal{G}}$ zu $\bar{\mathcal{Q}}_3$ usf. Da $R \gg R_1 \gg R_2 \gg \dots > \rho$, so folgt, daß $\lim R_n$ besteht, daher besteht nach der ersten Ungleichung $\lim r_n = \lim R_n$ und daraus folgt nach der zweiten $\lim \rho_n = \lim R_n$. Die gemeinsame Grenze muß, da alle $\rho > r$, alle

$R < r$ sind, wo $I(\bar{E}) = \frac{4}{3} r^3 \pi$, gleich r sein. Die $\bar{\mathcal{Q}}_n$ konvergieren daher gegen die Kugel K mit dem Radius r um O und daher ist

$$F(\bar{E}) \gg F(\bar{\mathcal{Q}}) \gg F(\bar{\mathcal{Q}}_1) \gg \dots \gg \lim F(\bar{\mathcal{Q}}_n) \gg F(K).$$

Damit ist wiederum die Beziehung $F(\bar{E})^3 - 36 \pi I(\bar{E})^2 \gg 0$ sichergestellt.

Um die Verschärfung dieser Aussage — daß nämlich das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt — zu gewinnen, können wir auf die Betrachtungen des Abschnittes V zurückgreifen, oder wir können folgende andeutungsweise gegebene Betrachtung anstellen. Da $\bar{E}$ selbst eine Kugel wäre, wenn jeder Durchmesser $= 2r$ bzw. $\leq 2r$, wo $I(\bar{E}) = \frac{4}{3} r^3 \pi$, so kann ich annehmen, daß der größte Durchmesser von $\bar{E}$: $2r_0 > 2r$ ist. Da ich weiter $\bar{E}$ als zusammenhängend annehmen kann, erhalte ich, wenn ich die Drehachse $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ -Achse) in den größten Durchmesser lege, einen Körper $\bar{\mathcal{Q}}$, der keine Kugel ist, da er mit der x -Achse ein Stück von der Länge $2r_0$ gemein hat.

¹⁾ Denn $\sqrt{1-\alpha} < 1 - \frac{1}{2}\alpha$ für $\alpha < 1$.

Die Meridiankurve ist so beschaffen, daß jede Parallele zur x -Achse oder y -Achse im $(+, +)$ -Quadranten mit ihr einen einzigen Punkt, eine Strecke oder nichts gemein hat. Sie hat daher fast überall eine Tangente. Stelle ich sie in der Form dar

$$r = r(\varphi) [x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi],$$

so ist $r(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ eine eindeutige Funktion, deren Differentialquotienten für $\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ beschränkt bleiben — dies folgt daraus, daß der Raum $x > x^0, y > y^0$ frei von Punkten der Meridiankurve ist, falls x^0, y^0 ihr angehört — daher besitzt sie fast überall einen Differentialquotienten, der in einer Menge vom Maße größer Null von Null verschieden sein muß, da die Kurve kein Kreis sein kann. Es sei in der Umgebung des Wertes $\varphi^0 \neq 0, \neq \frac{\pi}{2}$, die obere Grenze der Differentialquotienten $= g$. Es sei erwähnt, daß an einer Stelle, wo eine Tangente besteht, diese die Neigung $\gamma = \frac{\pi}{2} + \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}$ gegen die x -Achse besitzt. Es sei $\gamma_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 - \operatorname{arctg} \frac{1}{r(\varphi_0)} \frac{dr}{d\varphi}(\varphi_0)$. Ich kann in der Nähe von φ_0 einen Wert φ bestimmen, für den γ sich von γ_0 um beliebig wenig unterscheidet; dabei beschränken wir uns im folgenden auf eine Umgebung von φ^0 , für die alle $\gamma > \gamma_0 - \frac{\varepsilon}{2}$, wobei ε beliebig klein gewählt ist. Es sei P der φ entsprechende Punkt. Ich kann dann in seiner Nähe, und zwar noch in jener Umgebung einen Punkt Q finden, so daß, wenn die Parallele durch Q zur x -Achse die Tangente in P im Punkte R schneidet, $\frac{QR}{RP}$ unter einer beliebig kleinen Schranke liegt. Durch entsprechende Wahl von ε und P kann ich es auch erreichen, daß, wenn S der Schnittpunkt jener Parallelen zur x -Achse mit der Geraden ist, die durch P unter den Winkel $\gamma_0 - \varepsilon$ gegen die x -Achse geht, auch $\frac{QS}{SP}$ kleiner ist als das willkürlich genommene η . Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der Bogen $\widehat{PQ}$ — unsere Kurve besitzt ja eine Bogenlänge — größer ist als $\widehat{SP}$ und kleiner als $\widehat{SP} + \widehat{QS}$.¹⁾ Ich symmetrisiere nun dieses Stück an der zur Geraden $\mathfrak{G} = O \frac{P+Q}{2}$ normalen Geraden.

¹⁾ Dieser Satz ist nichts anderes als der Satz, daß in einem stumpfwinkligen Dreieck die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größere ist, daß sie aber kleiner ist, als die Summe der beiden anderen.

Dabei entspricht PQ das bezüglich O zentrisch symmetrische Stück. Ich symmetrisiere nun gleichzeitig den Winkel PSQ , wobei ich ihm den bezüglich O zentrisch symmetrischen Winkel entsprechen lasse. Ich erhalte hieraus den Streckenzug $RTUV$, wobei R, U, V Projektionen von PSQ auf die zu $\mathfrak{G}$ senkrechte Gerade TU sind, während T bezüglich $\mathfrak{G}$ symmetrisch zu U ist. Die Kurve RV , die ich durch Symmetrisierung von PQ erhalte — die auch eine Bogenlänge besitzt —, ist $> TU$ und kleiner als $RT + TU + UV$. Nehme ich nämlich einen PQ eingeschriebenen Polygonzug, dessen Seiten auf der Geraden TU gleich lange Projektionen haben, so liefert er mit seinem zentrisch symmetrischen Gegenbild symmetrisiert, einen der Kurve RV eingeschriebenen Polygonzug Π , der bezüglich $\mathfrak{G}$ symmetrisch ist. Durch Vertauschung von bezüglich $\mathfrak{G}$ symmetrischer Seiten erhalten wir einen gleichlangen Polygonzug Λ , der links von $\mathfrak{G}$ stets abnimmt, rechts zunimmt — diese Ausdrücke in bezug auf die Entfernung von TU gebraucht — und dabei stets über $RTUV$ bleibt, da der umgeordnete Zug Π stets über PSQ bleibt. Es gilt $RU < \Lambda < RT + TU + UV$ und da $\widehat{RV} = \lim \Lambda$ ist, wenn die Längen der Seiten gegen Null streben, so folgt daraus obige Behauptung. Nun ist die Neigung ψ von $\mathfrak{G}$ gegen die x -Achse von φ_0 beliebig wenig verschieden, $|\psi - \varphi_0| < \varepsilon$, daher die Neigung von PS gegen $\mathfrak{G}$ bei passender Wahl von $P < \gamma_0 - \varphi_0$, daher $RU < PS \cdot \sin(\gamma_0 - \varphi_0)$. Andererseits ist

$$RT = UV \leq \frac{1}{2} QS \left(1 + \frac{\sin \psi}{\sin \gamma_0 - \varepsilon - \psi} \right); TU < PS \sin(\gamma_0 - \varphi_0) - QS \sin(\varphi_0 + \varepsilon)$$

und bezeichne ich $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin(\varphi_0 + \varepsilon)}{\sin(\gamma_0 - \varphi_0 - 2\varepsilon)} \right)$ mit g , so ist also

$RT < g QS$ und daraus folgt

$$\widehat{PQ} - \widehat{RV} > \overline{PS} - \overline{TU} - 2\overline{RT} > \overline{PS} \left(1 - \sin(\gamma_0 - \varphi_0) - 2g\eta \right) > \frac{\overline{PQ}}{1 + \eta} \left[2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0 - \varphi_0}{2} \right) - g\eta \right].$$

Der Faktor h , mit dem $\overline{PQ}$ multipliziert ist, unterscheidet sich von der positiven von Null verschiedenen Größe $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0 - \varphi_0}{2} \right)$

um beliebig wenig. Es ist also sicher $\widehat{RV} < w \cdot \widehat{PQ}$, wobei w eine feste Zahl < 1 ist, wenn ich nur die Wahl von P und Q entsprechend treffe. Ich betrachte nun jenen Teil der Oberflächen von Ω und der symmetrisierten Menge Ω^* , die von den Ebenen parallel $\mathfrak{G}$ und der z -Achse durch P und Q ausgeschnitten werden, soweit für sie $x > 0, y > 0, |z| < \delta$. Es lasse sich die Meridiankurve in

der Nähe des betrachteten Stückes in der Form darstellen $x = \Phi(y)$, wobei Φ eine monoton abnehmende stetige Funktion ist — dies ist nur dann unmöglich, wenn sie Parallelstrecken zur x -Achse enthält, in welchem Falle wir P und Q in einer solchen Strecke annehmen —, so stellt sich der Schnitt des Randes von Ω^* mit der Ebene $z = z_0$ in der Form dar $x = \sqrt{\varphi(y)^2 - z_0^2}$. Die Neigung der Tangenten der Parallelschnitte gegen die x -Achse wird daher in dem betrachteten Teile $> \gamma_0 - \varepsilon$, wenn nur δ klein genug gewählt ist. Ich lege in den äußersten Punkten P_1 und Q_1 die Geraden mit der Neigung $\gamma_0 - \varepsilon$ bzw. O gegen die x -Achse. S_1 sei ihr Schnittpunkt; dann liegt der Schnitt ober $P_1 S_1 Q_1$, seine Länge ist $< P_1 S_1 + S_1 Q_1$ und $> P_1 S_1$, wobei $P_1 S_1$ von PS um beliebig wenig verschieden ist. Wir schließen nun, daß, wenn wir δ genügend klein wählen, der betrachtete Teil der Oberfläche von Ω das Flächenmaß $\omega = 2 \widehat{PQ} \cdot \delta \cdot (1 + \mathfrak{D}_1)$ und ebenso der symmetrisierte Teil das Flächenmaß $\omega_1 = 2 \widehat{RV} \cdot \delta \cdot (1 + \mathfrak{D}_2)$ besitzt, wobei $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ durch genügend kleine Wahl von δ unter jede noch so kleine Größe gebracht werden können. Daher ist

$$\begin{aligned} \omega - \omega_1 &> 2 \delta \widehat{PQ} (1 + \mathfrak{D}_1 - w (1 + \mathfrak{D}_2)) = \\ &= \omega \left(1 - w \cdot \frac{1 + \mathfrak{D}_2}{1 + \mathfrak{D}_1} \right). \end{aligned}$$

Die Größe $1 - w \frac{1 + \mathfrak{D}_2}{1 + \mathfrak{D}_1}$ ist aber bei entsprechender Wahl von δ größer als Null. Also ist ω_1 um einen endlichen Betrag kleiner als ω und daher auch $F(\Omega^*)$ um eine endliche Größe kleiner als $F(\Omega)$. Daher folgt wiederum

$$F(\Omega)^3 - 36 \pi I(\Omega)^2 > 0.$$