Zur Elektrodynamik von Strahlerkreisen.

Von

Karl Willy Wagner.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie m. b. H.)

Gliederung.

1. Die Aufgabe.
2. Elektromagnetische Bilder von wichtigen Strahlerformen.
 - a) Die senkrechte Marconiantenne.
 - b) Wagrechte Niedrigantennen und Erdantennen.
 - c) Die L-Antenne.
 - d) Die T-Antenne.
 - e) Die Schirmantenne.
 - f) Die Flugzeug-Hängeantenne.
3. Grundlegende Beziehungen.
4. Eigenfrequenzen.
5. Strahler mit Verlängerungsspule.
6. Nachbildung von Strahlern.
 - a) Erste Näherung (Schwingungskreis).
 - α) Gleiche Höchstspannung.
 - β) Gleiche Schwingungsenergie.
 - b) Zweite Näherung (Kettenglied).
 - c) Beispiel (homogener Strahler).
 - d) Nachbildung nicht homogener Strahler.
7. Kapazitiv verkürzter Strahler.
8. Strahler mit Endkapazität.
9. Strahler und Zwischenkreis.
 - a) homogener Strahler.
 - b) induktiv verlängerter Strahler.
10. Rückblick.

1. Die Aufgabe.

In der drahtlosen Telegraphie pflegt man in den Sende- und Empfangsschaltungen den Strahler (auch Antenne oder Luftdraht genannt) durch die in Abb. 1 gezeichnete einfache Anordnung darzustellen. C_a bedeutet die „Kapazität“, L_a die „Induktivität“ des Strahlers, R_a seinen gesamten „Widerstand“, der teils von den Verlusten, teils von der als Nutzarbeit anzusehenden Strahlung herrührt. Man ist sich dabei wohl bewußt, daß diese Art der Darstellung nur angenähert richtig ist, da sie keine Rücksicht auf die nicht quasistationäre Stromverteilung nimmt. Indessen hat sich erwiesen, daß sie den praktischen Bedürfnissen im allgemeinen genügt. Es ist üblich, von der Anordnung nach Abb. 1 auszugehen, wenn man Sende- und Empfangsschaltungen zu berechnen und Versuche auszuführen hat; man findet bei geeigneter Definition der wirksamen Größen L_a , C_a und R_a , daß die Ergebnisse solcher Berechnungen und Laboratoriumsversuche in vielen Fällen mit Messungen an den wirklichen Sende- und Empfangsanordnungen hinreichend übereinstimmen.

Wenn trotzdem im folgenden versucht wird, das Verhalten von Strahlern im Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Sende- oder Empfangsschaltung genauer darzustellen, so sind dafür hauptsächlich drei Gesichtspunkte maßgebend:

Abb. 1. Die übliche Nachbildung von Antennen.

1. Über manche Eigentümlichkeiten der Strahler, z. B. über ihre Oberschwingungen, gibt das einfache Bild nach Abb. 1 keine Auskunft.
2. Die bessere Einsicht in den tatsächlichen Verlauf der Dinge im Strahlerkreis belehrt uns darüber, wann das einfache Bild unbedenklich benutzt werden darf, und was die wirksamen Größen L_a , C_a und R_a bedeuten.
3. Sie führt uns ferner zu genaueren Nachbildungen wirklicher Strahler, als es die übliche Anordnung nach Abb. 1 ist.

Der Weg, auf dem wir diese Fragen behandeln, gliedert sich in drei Abschnitte. Zunächst handelt es sich darum, für die wichtigsten vorkommenden Strahlerformen elektromagnetische Bilder zu gewinnen, die die tatsächliche, nicht quasistationäre Stromverteilung in den Grundzügen richtig wiedergeben, im übrigen aber weitgehend dealisiert sind, so daß das Rechenwerk möglichst einfach wird. Sodann müssen wir die elektromagnetischen Vorgänge in diesen Gebilden, vor allem die Verteilung von Strom und Spannung bei den wichtigsten Schaltungen feststellen. Endlich gilt es, die praktischen Folgerungen daraus zu ziehen.

2. Elektromagnetische Bilder von wichtigen Strahlerformen.

a) Die senkrechte Marconiantenne. Aus den Arbeiten von M. Abraham¹⁾ ergibt sich, daß ein von der Erde senkrecht emporgeführter Draht (Abb. 2a) bei den hier zu betrachtenden Schwingungsvorgängen sich wie ein Leiter mit gleichförmig verteilter Kapazität und Induktivität verhält. Strom und Spannung verteilen

Abb. 2a. Abb. 2b.
Die senkrechte Marconiantenne und ihr Ersatzbild.

sich auf ihm wie auf einem homogenen Kabel, dessen eines Ende mit der Sendebzw. Empfangsschaltung S verbunden ist, während das andere Ende isoliert bleibt (Abb. 2b). Die Länge l dieses Kabels entspricht der Höhe H des Strahlers.

Zur Berechnung der Induktivität denken wir uns den Strahler (Abb. 2a) durch sein Spiegelbild ergänzt und dafür die Erde weggelassen. Die gleichförmig verteilt gedachte Induktivität ist näherungsweise so zu bestimmen, als ob der Strahler in seiner ganzen Länge $2H$ von einem konstanten Strom durchflossen wäre; dabei soll sich von den Enden des Strahlers der Strom in ein nach allen Richtungen ausgedehntes, homogen leitendes Medium verbreiten. Die Induktivität einer solchen Leiteranordnung ist²⁾

$$4H \left[\ln \frac{4H}{\varrho} - 1 \right] \approx 4H \ln \frac{2H}{\varrho}.$$

ϱ bedeutet den Radius des Drahtes. Bei dem wirklichen, auf der Erde stehenden

¹⁾ Ann. d. Phys. (III) Bd. 66, 1898, S. 435–472; (IV) Bd. 2, 1900, S. 32 bis 61; Physikal. Zeitschr. Bd. 2, 1901, S. 329–344.

²⁾ S. z. B. F. Breisig, Theoret. Telegraphie 1910, § 119, 120.

Strahler ist nur oberhalb der Erdoberfläche ein merkliches magnetisches Feld. Daher ist die magnetische Energie und somit auch die Induktivität nur halb so groß:

$$L = 2H \ln \frac{2H}{\varrho}. \quad (1)$$

Daraus folgt die Induktivität der Längeneinheit:

$$L_1 = 2 \ln \frac{2H}{\varrho}. \quad (1a)$$

Die verteilt gedachte Kapazität C des Strahlers ergibt sich aus der Formel für die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung längs des Strahlerdrahtes. Diese ist sehr angenähert gleich der Lichtgeschwindigkeit c . Aus der bekannten Beziehung¹⁾

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (2)$$

ergibt sich zunächst die Kapazität der Längeneinheit

$$C_1 = \frac{1}{c^2 L_1} = \frac{1}{2c^2 \ln \frac{2H}{\varrho}} \quad (3a)$$

und hieraus weiter die Gesamtkapazität

$$C = H C_1 = \frac{H}{2c^2 \ln \frac{2H}{\varrho}} \quad (3)$$

Dabei ist C in absolutem elektromagnetischem Maß ausgedrückt. Läßt man den Faktor c^2 im Nenner weg, so erscheint C in cm.

Der Widerstand R' des Strahlers setzt sich aus drei Teilen zusammen, von denen der eine R_j' den Verlusten durch Joulesche Wärme, der zweite R_s' der Strahlung und der dritte, R_v' den übrigen Energieverlusten (Wirbelströme, Erdwiderstand usw.) entspricht.

$$R' = R_j' + R_s' + R_v'.$$

R_j' und R_s' sind als gleichförmig verteilt anzunehmen, über R_v' läßt sich von vornherein nichts aussagen. Nun wird die Strom- und Spannungsverteilung durch den Widerstand nicht merklich beeinflusst, solange sich dieser in den üblichen, praktisch vorkommenden Grenzen bewegt. Man darf sich deshalb die Dämpfung hervorgebracht denken durch einen am Anfang des Strahlers, im Strombauch befindlichen Widerstand R , der so bemessen ist, daß die in ihm entwickelte Stromwärme gleich ist der tatsächlichen Stromwärme, vermehrt um die Strahlung und die übrigen Energieverluste.

Der von den tatsächlichen Stromwärmeverlusten herrührende Anteil R_j ergibt sich aus der Beziehung

$$I_0^2 R_j = \frac{R_j' H}{H} \int I^2 dx. \quad (4)$$

Darin bedeutet I_0 den Strom am Anfang des Strahlers, I den Strom in der Höhe x über den Boden, R_j' den Wirkwiderstand der Längeneinheit.

Der auf den Strombauch umgerechnete Strahlungswiderstand beträgt nach Rüdénberg²⁾

¹⁾ S. z. B. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. I, 5. Aufl. 1918, § 72.

²⁾ Ann. d. Phys. (IV) Bd. 25, 1908, S. 446–466. Die Gl. (5) liefert praktisch brauchbare Werte für alle längeren Wellen bis herab zur Grundwelle des unbelasteten (d. h. weder induktiv verlängerten noch kapazitiv verkürzten) Strahlers. Für stark verkürzte Strahler, bei denen die Grundwelle wesentlich unterhalb des vierfachen der Leitungslänge liegt, sowie für alle Oberwellen ist die Gl. (5) nicht zu gebrauchen. Wie man in solchen Fällen den Strahlungswiderstand zu berechnen hat, ist von B. van der Pol jun. gezeigt. (Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie, Bd. 13, 1918, S. 217–238.)

$$R_s = 160\pi^2 \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^2 \text{ Ohm.} \quad (5)$$

λ ist die Wellenlänge, α das Verhältnis des arithmetischen Mittelwertes des Stromes zum Strom im Bauche:

$$\alpha = \frac{\int_0^H I dx}{I_0 H}. \quad (5a)$$

Abb. 3 a.

Abb. 3 b.

Die L-Antenne und ihr Ersatzbild.

Der Verlustwiderstand endlich ergibt sich aus der Beziehung

$$R_v I_0^2 = N_v, \quad (6)$$

wo N_v die von den übrigen Verlustquellen aufgezehrte Leistung bedeutet. Hiermit ist der Gesamtwiderstand

$$R = R_j + R_s + R_v \quad (7)$$

bestimmt. Da er definitionsgemäß in der Verbindung der Schaltung S zum Strahler liegt, kann man ihn auch zur Schaltung S rechnen und den Strahler selbst als ungedämpft betrachten.

Abb. 4 a.

Abb. 4 b.

Die Schirmantenne und ihr Ersatzbild.

b) Wagrechte Niedrigantennen und Erdantennen. Man ersieht ohne weiteres, daß diese Gebilde ebenfalls der Anordnung nach Abb. 2 b entsprechen. Kapazität und Induktivität sind nach bekannten Formeln, der Widerstand ist nach unserer Gleichung (7) zu berechnen.

c) Die L-Antenne (Abb. 3 a). Wenn, wie es praktisch meistens zutrifft, die senkrechte Höhe h klein ist im Vergleich zur Wellenlänge, d. h. ein Zehntel davon oder noch weniger beträgt, so darf man die Strömung in dem senkrechten Stück als quasistationär ansehen. Das Stück wirkt dann einfach wie eine Induktivität L_0 (Abb. 3 b).

d) Die T-Antenne geht aus der L-Antenne durch Verdoppelung hervor. Auch für sie stellt Abb. 3 b das Ersatzbild dar, nur hat man sich bei A noch eine zweite gleichartige Kabelleitung angeschlossen zu denken.

e) Die Schirmantenne (Abb. 4a). Wenn die wagrechte Ausdehnung des Schirmes im Vergleich zur Wellenlänge klein ist, kann man ihn einfach als Kapazitätsfläche ansehen; ihr Kapazitätswert sei C_1 . Kann ferner die Strömung im senkrechten Teil als quasistationär betrachtet werden, so wirkt der Teil als gewöhnliche Drossel, womit man auf die einfache Schaltung nach Abb. 1 zurückkommt. Man kann aber noch etwas genauer vorgehen und die verteilte Kapazität des senkrechten Teils berücksichtigen, d. h. diesen Teil als Kabelleitung behandeln. Man gelangt so zur Anordnung nach Abb. 4b.

Abb. 5a.

Abb. 5b.

Die Flugzeug-Hängeantenne und ihr Ersatzbild.

f) Die Flugzeug-Hängeantenne (Abb. 5a). Sie unterscheidet sich von dem senkrechten Draht nach Abb. 2a elektrisch hauptsächlich dadurch, daß als Gegenpol nicht eine unendlich ausgedehnte leitende Fläche dient, sondern ein leitender Körper von einer im Vergleich zur Drahtlänge begrenzten Ausdehnung. Als Ersatzbild kommt daher die Anordnung nach Abb. 5b in Betracht. Dabei ist der herabhängende Draht durch ein Kabel nachgebildet und der Einfluß der endlichen Ausdehnung des Flugzeugkörpers durch die Kapazität C_0 berücksichtigt.

3. Grundlegende Beziehungen.

Alle vorher betrachteten Anordnungen ordnen sich dem allgemeinen Schema nach Abb. 6 unter. Darin bedeutet Z_0 den Scheinwiderstand der Sende- oder Empfangsapparatur einschließlich der durch die Eigenart des Strahlers etwa noch hinzukommenden Drosseln L_0 , Kapazitäten C_0 und des gesamten Widerstandes. Z_1 ist für die Schirmantenne der Scheinwiderstand des Kondensators C_1 ; für Erdantennen kann Z_1 eine beliebige Verbindung von Kapazitäten, Induktivitäten und ohmschen Widerständen darstellen, die am Ende der Antenne angeschlossen sind; für die übrigen Anordnungen ist $Z_1 = \infty$ zu setzen.

Abb. 6. Allgemeines Normalschema eines Strahlers.

V_0 , I_0 sind Spannung und Strom an der Apparatseite des Strahlers, V_1 , I_1 dieselben Größen am freien Ende, V , I dieselben Größen im Abstand x von den Apparaten. Auf einem homogenen Kabel sind Spannung und Strom bekanntlich durch die folgenden Beziehungen miteinander verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -L_1 \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Abhängigkeit der Größen von der Zeit sei durch

$$V = V e^{i\omega t} \quad I = I e^{i\omega t}$$

gegeben, wo ω die Kreisfrequenz bedeutet und die komplexen Größen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{I}$ in üblicher Weise durch das Vektordiagramm zu veranschaulichen sind.

Hiermit folgt aus Gleichung (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dx} &= -i\omega C_1 \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dx} &= -i\omega L_1 \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Indem man die zweite Gleichung nach x differenziert und für $\frac{d\mathbf{I}}{dx}$ den Wert aus der ersten einsetzt, ergibt sich

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} = -\omega^2 L_1 C_1 \mathbf{V}.$$

Wir setzen

$$\omega^2 L_1 C_1 = m^2 \quad (10)$$

und erhalten

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} = -m^2 \mathbf{V}. \quad (11)$$

Dieser Gleichung genügt der Ansatz

$$\mathbf{V} = a \sin mx + b \cos mx. \quad (12)$$

Der zugehörige Ausdruck für den Strom ergibt sich aus der zweiten Gleichung (9) mit Rücksicht auf Gleichung (10):

$$\mathbf{I} = \frac{i}{\omega L_1} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dx} = \frac{i m}{\omega L_1} (a \cos mx - b \sin mx)$$

$$\mathbf{I} = i \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} (a \cos mx - b \sin mx)$$

oder

$$\mathbf{I} = \frac{i}{Z} (a \cos mx - b \sin mx) \quad (13)$$

$$Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (14)$$

ist der sogenannte Wellenwiderstand des homogenen Kabels, welches den Strahler nachbildet.

Die Konstanten a und b sind aus den besonderen Bedingungen des aus Strahler und Sende- oder Empfangseinrichtung bestehenden elektromagnetischen Systems zu ermitteln. In der drahtlosen Telegraphie wird die Anordnung stets mit einer ihrer Eigenfrequenzen betrieben. Die Ermittlung dieser Frequenzen ist daher von hervorragender Bedeutung.

4. Eigenfrequenzen.

Die Stromgleichungen des aus dem Strahler und den Zusatzapparaten bestehenden Gebildes (Abb. 6) lauten

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_o &= \mathbf{E} - Z_o \mathbf{I}_o \\ \mathbf{V}_t &= Z_t \mathbf{I}_t \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$\mathbf{E}$ ist die elektromotorische Kraft. Die Eigenfrequenzen sind die Frequenzen derjenigen Vorgänge, die sich ohne Hinzutun einer EMK abspielen. Will man die Eigenfrequenzen berechnen, so hat man also in (15) $\mathbf{E} = 0$ zu setzen und erhält

$$\left. \begin{aligned} V_o &= -I_o Z_o \\ V_I &= I_I Z_I \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Hierin sind die Ausdrücke (12) und (13) für V und I einzuführen. Die erste Gleichung (16) ergibt

$$b = -i \frac{Z_o}{Z} a. \quad (17)$$

Unter Benutzung dieses Ergebnisses folgt aus der zweiten Gleichung (16)

$$\sin m l - i \frac{Z_o}{Z} \cos m l = \frac{i Z_I}{Z} (\cos m l + \frac{i Z_o}{Z} \sin m l)$$

oder

$$(Z^2 + Z_o Z_I) \sin m l = i Z (Z_o + Z_I) \cos m l. \quad (18)$$

In dem Falle, daß $Z_I = \infty$ ist, vereinfacht sich (18) zu

$$Z_o \sin m l = i Z \cos m l$$

oder

$$\operatorname{tg} m l = \frac{i Z}{Z_o}. \quad (19)$$

Die Gleichungen (18) oder (19) dienen zur Bestimmung der Eigenfrequenzen. An Hand bestimmter Beispiele soll dies im folgenden gezeigt werden.

Für den Fall $Z_I = \infty$ nehmen die Strom- und Spannungsgleichungen eine sehr einfache Form an. Man erhält sie, wenn man mit (17) und (19) in (12) und (13) eingeht:

$$V = a \frac{\cos m(l-x)}{\sin m l} \quad (12a)$$

$$I = \frac{i a}{Z} \frac{\sin m(l-x)}{\sin m l}. \quad (13a)$$

Aus (13a) geht hervor, daß die Konstante a mit dem Strom I_o , der bei $x=0$ in den Strahler hineinfließt, proportional ist, und zwar ist

$$|a| = I_o Z = I_o \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

5. Strahler mit Verlängerungsspule.

Das Schema dieser Anordnung zeigt Abb. 7. Im Falle der senkrechten Marconiantenne, der wagrechten Niedrigantenne und der Erdantenne bedeutet L_o die Induktivität der Verlängerungsspule. Handelt es sich um eine T- oder L-Antenne, so enthält L_o außerdem die Induktivität der senkrechten Zuführung. L_o sei mit den übrigen Teilen der Anordnung lose gekoppelt, so daß eine Rückwirkung nicht in Betracht kommt. Die Widerstände haben auf die Eigenfrequenzen nur einen sehr geringen Einfluß, wir dürfen sie deshalb vernachlässigen.

Im vorliegenden Falle ist

$$Z_o = i \omega L_o = i \frac{m l}{\sqrt{LC}} \cdot L_o \quad (20)$$

wobei $L = L_1 l$ bzw. $C = C_1 l$ die gesamte Induktivität bzw. Kapazität des homogenen Strahlerteils bedeuten. Setzt man (20) in (19) ein und beachtet, daß nach Gleichung (14)

Abb. 7. Schema eines Strahlers mit Verlängerungsspule.

$$Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14a)$$

ist, so erhält man

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\mu}, \quad (21)$$

wobei zur Abkürzung

$$m\bar{l} = \mu \quad (21a)$$

gesetzt ist.

Die transzendente Gleichung (21) löst man am besten graphisch, indem man die Schnittpunkte $P_0, P_1, P_2, \dots$ bestimmt, in welchen die Schar der Tangenskurven von der gleichseitigen Hyperbel

Abb. 8. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen eines Strahlers mit Verlängerungsspule.

$$f(\mu) = \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (21b)$$

geschnitten wird (Abb. 8). Die Zeichnung lehrt, daß es unendlich viele Werte von μ gibt, die wir zweckmäßig in der Form

$$\mu_k = k\pi + \varepsilon_k \quad (22)$$

schreiben. k kann jede beliebige ganze Zahl sein¹⁾, ε_k ist ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Die zugehörigen Eigenwellenlängen ergeben sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (10)

$$\lambda_k = \frac{2\pi c}{\omega_k} = \frac{2\pi l}{\mu_k}. \quad (23)$$

Wir betrachten zuerst zwei Grenzfälle A und B.

A. Ist die Verlängerungs-Induktivität null, so schwingt der homogene Strahlerteil in seinen Eigenwellen. Wird nun L_0 immer kleiner und kleiner, so erhebt sich die Hyperbel (21b) immer höher über der Abszissenachse der Zeichnung (Abb. 8), die Schnittpunkte $P_0, P_1, P_2, \dots$ rücken auf den Zweigen der Tangensfunktion immer höher hinauf. Im Grenzfall $L_0 = 0$ werden sämtliche $\varepsilon_k = \frac{\pi}{2}$ und somit

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \lambda_k &= \frac{4l}{2k+1} \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

d. h. der Strahler schwingt in ungeradzahligen Teilen der vierfachen Länge. Insbesondere ist die Länge der Grundwelle ($k=0$) gleich der vierfachen Länge des Strahlers.

¹⁾ Die Zeichnung nach Abb. 8 ist streng genommen nach der negativen Seite der Abszissen- (μ -) Achse fortzusetzen. Man findet im 3. Quadranten weitere Schnittpunkte, die zu $P_0, P_1, P_2, \dots$ symmetrisch liegen. Sie liefern aber keine neuen, sondern dieselben Werte der Eigenfrequenzen wie die $P_0, P_1, P_2, \dots$ und können daher außer Betracht bleiben. Die gleiche Bemerkung bezieht sich ganz allgemein auf die auf der Gl. (19) beruhenden Konstruktionen, weil die rechte Seite immer eine ungerade Funktion von μ ist, solange sie überhaupt reell ist. Letzteres trifft zu, solange die Widerstände vernachlässigt werden können; für die Berechnung der Eigenfrequenzen ist dies praktisch stets zulässig. Im anderen Falle würde die Gl. (19) komplex werden; die Berechnung ihrer Wurzeln wäre alsdann sehr mühsam.

B. Die Verlängerungsinduktivität sei sehr viel größer als die Eigeninduktivität L des Strahlers. Dann schmiegt sich die Hyperbel eng an die Koordinatenachsen der Zeichnung Abb. 8, sämtliche ϵ_k werden infolgedessen klein. Betrachten wir zunächst die Grundwelle, so wird (mit $k=0$) μ_0 ein kleiner Winkel. Man darf also

$$\begin{aligned} \text{tg } \mu_0 &\approx \mu_0 \\ \text{setzen und erhält hiermit aus Gleichung (21)} \\ \mu_0 &= \sqrt{\frac{L}{L_0}} \\ \lambda_0 &= \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c \sqrt{LC}}{\mu_0} = 2\pi c \sqrt{L_0 \cdot C} \end{aligned} \quad (24b)$$

d. h. die Grundwelle berechnet sich so, als ob der Strahler nur Kapazität (C) hätte.

Für die Oberwellen kann man in erster Näherung die ϵ_k neben $k\pi$ vernachlässigen und erhält aus (23)

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}. \quad (24c)$$

Die Längen der Oberwellen sind jetzt die ganzzahligen Bruchteile der doppelten Länge des Strahlers.

C. Im allgemeinen Falle ist zur Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Wellenlänge und Verlängerungsinduktivität die ungekürzte Gleichung (21) zu benutzen. Für die Grundwelle, die dem Schnittpunkt P_0 in Abb. 8 entspricht, ist

$$\lambda_0 = \frac{2\pi l}{\mu_0} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\mu_0} \cdot \mathcal{A}_0, \quad (25)$$

wo $\mathcal{A}_0 = 4l$ die Grundwelle des unverlängerten Strahlers ist. Um ein Bild von der durch (21) gegebenen Abhängigkeit zu erhalten, geht man am besten so vor, daß man für angenommene Werte von μ_0 aus (25) das Verhältnis $\lambda_0/\mathcal{A}_0$, ferner aus (21) das Verhältnis L_0/L berechnet und aus beiden die Kurve aufträgt. Das Berechnungsergebnis zeigen die ersten drei Spalten der Tafel I, die Kurve ist in Abb. 9 dargestellt.

Tafel I.

μ_0	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}_0}$	$\frac{\text{tg } \mu}{\mu}$	$\frac{C a'}{C} = \frac{\sin \mu}{\mu}$	$\frac{L a'}{L} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2} \mu}{\mu}$	$\frac{C a}{C}$	$\frac{L a}{L}$
0,2	24,7	7,85	1,011	0,993	0,500	1,000	0,336
0,3	10,77	5,24	1,031	0,985	0,503	1,000	0,337
0,4	5,91	3,927	1,057	0,974	0,507	1,000	0,340
0,5	3,66	3,143	1,093	0,958	0,510	1,000	0,345
0,6	2,435	2,62	1,140	0,940	0,516	0,998	0,351
0,7	1,695	2,24	1,203	0,921	0,522	0,995	0,358
0,8	1,213	1,964	1,287	0,897	0,528	0,990	0,365
0,9	0,882	1,744	1,400	0,870	0,537	0,983	0,375
1,0	0,642	1,571	1,557	0,841	0,546	0,972	0,386
1,1	0,463	1,427	1,786	0,810	0,557	0,959	0,399
1,2	0,324	1,307	2,143	0,777	0,569	0,941	0,414
1,3	0,213	1,207	2,771	0,742	0,585	0,918	0,431
1,4	0,121	1,121	4,216	0,703	0,601	0,887	0,454
1,5	0,0473	1,047	9,401	0,665	0,621	0,844	0,479
π	0	1	∞	0,637	0,637	0,812	0,500

Zur Berechnung der Oberwellenlängen ist ein Näherungsverfahren bequem. Ein Blick auf die Abb. 8 zeigt, daß die Schnittpunkte $P_1, P_2, \dots$ für alle nicht zu kleinen Werte der Verlängerungsinduktivität in der Nähe der Punkte $\pi, 2\pi, \dots$ liegen. Dieser Umstand erlaubt uns, die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ als kleine Winkel zu behandeln und demgemäß

$$\operatorname{tg} \mu_k = \operatorname{tg} \varepsilon_k \approx \varepsilon_k$$

zu setzen. Ferner dürfen wir bei der Berechnung der kleinen Größe ε_k aus Gleichung (21) auf der rechten Seite dieser Gleichung $\mu_k \approx k\pi$ setzen. Hiermit ergibt sich

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{L}{L_0}, \quad (26)$$

also nach (22)

$$\mu_k = k\pi + \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{L}{L_0}. \quad (22a)$$

Abb. 9. Abhängigkeit der Grundwelle von der Verlängerungs-Induktivität, sowie der wirklichen elektrischen Konstanten von der Wellenlänge.

Die zugehörigen Wellenlängen folgen aus

$$\lambda_k = \frac{2\pi l}{\mu_k}.$$

Die Oberwellen sind unharmonisch; sie nähern sich aber mit wachsender Ordnungszahl der harmonischen Reihe (24c) mehr und mehr an.

6. Nachbildung von Strahlern.

a) Erste Näherung. Von einer künstlichen Antenne ist in erster Linie zu verlangen, daß sie in Verbindung mit der Sende- und Empfangsschaltung die gleiche Grundwelle ergebe wie der wirkliche Strahler.

Nach Gleichung (23) ist die Wellenlänge des Strahlers

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c \sqrt{LC}}{\mu}.$$

Nun ist nach Gleichung (21) für den induktiv verlängerten Strahler

$$\mu = \sqrt{\frac{L}{L_0} \cdot \frac{\mu}{\operatorname{tg} \mu}}.$$

Setzen wir dies in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{L_0 \cdot C \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu}}. \quad (27)$$

Nach dieser Gleichung kann der Strahler ersetzt werden durch eine einfache Kapazität¹⁾

$$C_A = C \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu}, \quad (28)$$

welche zusammen mit der Verlängerungsinduktivität L_0 die richtige Welle ergibt. Die vierte Spalte der Tafel I zeigt, daß die Ersatzkapazität C_A bei starker Verlängerung (d. h. für kleine μ_0) mit der wahren Strahlerkapazität C praktisch übereinstimmt. Je mehr man sich der Eigenwelle des unverlängerten Strahlers nähert, um so größer wird C_A , um schließlich über alle Grenzen hinaus zu wachsen. Die starke Veränderlichkeit von C_A zeigt, daß ein einfacher Kondensator kein hinreichender Ersatz für einen Strahler ist.

Zu einer besseren Nachbildung führt die Reihenschaltung eines Kondensators C_a und einer Drossel L_a gemäß der Abb. I. Da nun zwei Größen L_a und C_a zu bestimmen sind, können wir neben der Wellengleichung (27) noch eine zweite Bedingung erfüllen. Man kann dabei von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen.

a) Gleiche Höchstspannung am wirklichen und am künstlichen Strahler. Man kann z. B. verlangen, daß an der Kapazität C_a keine höhere Spannung auftrete als am wirklichen Strahler. Bei diesem erscheint die höchste Spannung am freien Ende $x = l$ (Abb. 6)²⁾.

Nach Gleichung (12), (13) und (17) sind Spannung und Strom nach folgendem Gesetz auf dem Strahler verteilt:

$$\left. \begin{aligned} V &= a \left(\sin mx - i \frac{Z_0}{Z} \cos mx \right) \\ I &= \frac{ia}{Z} \left(\cos mx + i \frac{Z_0}{Z} \sin mx \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Spannung am Ende ist

$$V_l = a \left(\sin ml - i \frac{Z_0}{Z} \cos ml \right).$$

Mit Rücksicht auf (19) kann man hierfür auch schreiben

$$\begin{aligned} V_l &= a \left(\sin ml + \frac{\cos^2 ml}{\sin ml} \right) \\ V_l &= \frac{a}{\sin ml} = \frac{a}{\sin \mu}. \end{aligned} \quad (30a)$$

Ferner ist der am Anfang ($x=0$) in den Strahler fließende Strom nach (29)

$$I_0 = \frac{ia}{Z}. \quad (30b)$$

Aus (30a) und (30b) erhält man die beim Strom I auftretende höchste Spannung

$$v_1 = \frac{|V_l|}{|I_0|} = \frac{Z}{\sin \mu} = \sqrt{\frac{L}{C \sin^2 \mu}}.$$

Nun ist nach Gleichung (21)

$$\sin \mu = \frac{\cos \mu}{\mu} \cdot \frac{L}{L_0}.$$

¹⁾ Den Ersatz eines Strahlers durch eine einfache Kapazität hat zuerst P. Drude behandelt in der Arbeit: „Elektrische Eigenschaften und Eigenschwingungen von Drahtspulen mit angehängten geraden Drähten oder Metallplatten,“ Ann. d. Phys. (4) 11, S. 957, 1903. Drudes Formel (29) auf S. 985 ist identisch mit unserer Gleichung 28.

²⁾ In dieser Weise ist die wirksame Kapazität von Antennen von H. Behnken definiert worden („Eine Methode zur Messung der wirksamen Kapazität von Antennen,“ Phys. Zeitschr. 14, S. 430, 1913).

Dies in den obigen Ausdruck eingesetzt, ergibt

$$v_1 = \sqrt{\frac{L_o}{\cos \mu} \cdot \frac{1}{C \frac{\sin \mu}{\mu}}} \quad (31)$$

Ferner wollen wir (27) in der Form

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{L_o}{\cos \mu} \cdot C \frac{\sin \mu}{\mu}} \quad (32)$$

schreiben.

Diese Ausdrücke wollen wir mit den für unsere künstliche Antenne geltenden entsprechenden Beziehungen vergleichen. Dabei seien die Konstanten der künstlichen Antenne mit C_a' und L_a' bezeichnet, zum Unterschied von den später (unter β) auf andere Weise definierten Konstanten C_a und L_a .

Der Gleichung (31) entspricht hier

$$v_1 = \omega (L_o + L_a') = \sqrt{\frac{L_o + L_a'}{C_a'}}, \quad (31a)$$

während das Analogon zur Gleichung (32)

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{(L_o + L_a') C_a'} \quad (32a)$$

lautet.

Man sieht ohne weiteres, daß man

$$C_a' = C \frac{\sin \mu}{\mu} \quad (33a)$$

und

$$L_o + L_a' = \frac{L_o}{\cos \mu}$$

zu setzen hat. Aus der letzten Gleichung erhält man

$$L_a' = L_o \left(\frac{1}{\cos \mu} - 1 \right) = L_o \frac{1 - \cos \mu}{\cos \mu} = L \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \mu}{\mu \sin \mu} = L \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \mu}{2 \mu \sin \frac{1}{2} \mu \cos \frac{1}{2} \mu}$$

oder

$$L_a' = L \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu}{\mu}. \quad (34a)$$

Die 5. und 6. Spalte der Tafel I enthalten die Werte der Faktoren $\frac{\sin \mu}{\mu}$ und

$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu}{\mu}$, welche die Verhältnisse $\frac{C_a'}{C}$ bzw. $\frac{L_a'}{L}$ bedeuten. In Abb. 9 sind diese Größen in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge dargestellt.

Für lange Wellen (kleine Werte von μ) ist die Kapazität C_a' der Nachbildung gleich der Gesamtkapazität C des wirklichen Strahlers, während die Induktivität L_a' der Nachbildung die Hälfte der Induktivität L des natürlichen Strahlers ist. Bei den langen Wellen wirkt dieser als nahezu reine Kapazität. Der Strom fällt linear vom Anfang zum Ende hin ab.

Mit der Annäherung der Welle an die Grundwelle λ_o des unverlängerten Strahlers nähern sich C_a' und L_a' den Werten

$$C_a' = \frac{2}{\pi} C = 0,637 C,$$

$$L_a' = \frac{2}{\pi} L = 0,637 L.$$

Man sieht, daß die „wirksamen“ Konstanten C_a' und L_a' der künstlichen Antenne von der Wellenlänge abhängen. Am stärksten ist dies in dem Wellengebiet zwischen der Grundwelle λ_0 der unverlängerten Antenne und ihrem doppelten Wert ($2\lambda_0$) der Fall. In dem darüber hinausgehenden Wellenbereich sind die Änderungen verhältnismäßig gering.

β) Gleiche Schwingungsenergie im wirklichen und im künstlichen Strahler. In der unter α) gestellten Bedingung, daß die Spannung am Ersatzkondensator C_a' gleich der Spannung am Ende des Strahlers sein soll, steckt eine gewisse Willkür insofern, als der Zustand am freien Ende des Strahlers ohne hinreichenden Grund bevorzugt ist. Wir werden sehen, daß infolge dieser Willkür die unter α) erhaltene Nachbildung nicht die bestmögliche ist¹⁾.

An der Forderung, daß die künstliche Antenne mit einer gegebenen Verlängerungsinduktivität dieselbe Wellenlänge geben soll wie der natürliche Strahler, halten wir fest. Ihr zur Seite stellen wir jetzt die weitere Forderung, daß auch die während der Schwingung bei einem bestimmten Antennenstrom I_0 umgesetzte Energie in beiden Fällen dieselbe sein soll.

Nach Gleichung (12a) und (13a) schwingen Spannung und Strom mit 90° Phasenverschiebung. Daher ist im Zeitpunkt der Spannung Null die gesamte Schwingungsenergie in den Induktivitäten in magnetischer Form aufgespeichert.

Die magnetische Energie des wirklichen Strahlers ist

$$T = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l L_1 I^2 dx$$

Führt man hierin

$$I = I_0 \frac{\sin m(l-x)}{\sin ml}$$

ein, so erhält man

$$T = \frac{1}{2} I_0^2 \left[L_0 + \frac{L}{\sin^2 \mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) \right].$$

Die magnetische Energie der künstlichen Antenne mit Verlängerungsinduktivität hat den Betrag

$$T = \frac{1}{2} I_0^2 (L_0 + L_a).$$

Aus dem Vergleich der beiden Ausdrücke ergibt sich, daß man

$$L_a = L \cdot \frac{1}{\sin^2 \mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) \quad (34b)$$

zu setzen hat.

Für kleinere Werte von μ ist es etwas unbequem, nach dieser Formel zu rechnen; man muß ziemlich genau rechnen, um ein mäßig genaues Ergebnis zu erzielen. Es ist deshalb besser, den Klammerausdruck nach Potenzen zu entwickeln. Man erhält so die Formel

$$\frac{L_a}{L} = \frac{\mu^2}{\sin^2 \mu} \left[\frac{1}{3} - \frac{\mu^2}{15} + \frac{2}{315} \mu^4 - \frac{1}{2835} \mu^6 + \frac{2}{155925} \mu^8 - \dots \right].$$

Die Reihe konvergiert so gut, daß man für den größten vorkommenden Wert $\mu = \frac{\pi}{2}$ nur die hier angeschriebenen Glieder zu berücksichtigen braucht, um das Ergebnis auf 4 Dezimalstellen richtig zu erhalten; für kleinere μ genügen natürlich weniger Glieder.

L_a/L schwankt zwischen den Grenzen 0,333 für $\mu = 0$ (sehr lange Wellen) und 0,500 für $\mu = \frac{\pi}{2}$ (Grundwelle des unverlängerten Strahlers).

¹⁾ Vgl. hierzu ferner den folgenden Abschnitt 9.

Eine Anzahl der nach (34 b) berechneten Werte von L_a/L ist in Tafel 1 eingetragen und in Abb. 9 durch eine Kurve veranschaulicht. Als Abszissen dienen die an der vertikalen Teilung abzulesenden Werte λ_o/λ_o , als Ordinaten die an der oberen wagrechten Teilung abzulesenden Werte L_a/L .

Die wirksame Antennenkapazität ist, gemäß dem vorher Gesagten, aus der Wellengleichung zu ermitteln.

$$\lambda_o = 2\pi c \sqrt{(L_o + L_a) C_a} = 2\pi c \frac{\sqrt{LC}}{\mu}.$$

Daraus folgt

$$\frac{C_a}{C} = \frac{1}{\mu^2 \left(\frac{L_o}{L} + \frac{L_a}{L} \right)}. \quad (33 b)$$

Für die Grundwelle λ_o des unverlängerten Strahlers ergibt sich, wenn man in dem vorstehenden Ausdruck $\mu = \frac{\pi}{2}$, $L_o = 0$ und $L_a = \frac{1}{2} L$ setzt,

$$\frac{C_a}{C} = \frac{8}{\pi^2} = 0,812 \quad \text{für } \lambda_o = \lambda_o. \quad (33 c)$$

Die nach Gleichung (33 b) berechneten Zahlenwerte sind ebenfalls aus Tafel 1 und Abb. 9 ersichtlich.

Es zeigt sich, daß die hier gemachten sehr einfachen, naheliegenden und durchsichtigen physikalischen Voraussetzungen erfreulicherweise zu einer künstlichen

Abb. 10. Kettengliedantenne.

Abb. 11. Kettengliedantenne mit Verlängerungsspule.

Antenne führen, deren wirksame Größen weniger stark von der Wellenlänge abhängen, als es bei der unter a) behandelten Nachbildung der Fall ist. Die Antennenkapazität ändert sich in dem ganzen Wellengebiet von λ_o bis ∞ um kaum 20%; in dem Wellengebiet oberhalb $2\lambda_o$ ist sie praktisch konstant. Wir werden später sehen, daß die hier gefundenen Ergebnisse auch mit anderen Überlegungen in gutem Einklang stehen.

b) Zweite Näherung¹⁾. Für die Praxis hat hauptsächlich das Wellengebiet zwischen λ_o und etwa $5\lambda_o$ Interesse. Wie wir festgestellt haben, ist in dem Anfang dieses Bereiches die Nachbildung des Strahlers durch einen festen Kondensator C_a und eine feste Drossel L_a nicht möglich. Es drängt sich hier der Gedanke auf, die Nachbildung, ähnlich wie beim künstlichen Kabel, durch eine Art Kettenleiter zu versuchen. Es hat sich im Verfolg dieses Gedankens herausgestellt, daß bereits ein einziges Kettenglied nach Art der Abb. 10 eine für die Praxis hinreichend genaue Nachbildung wirklicher Strahler liefert²⁾.

Da das Kettenglied drei beliebig wählbare Konstanten K_1 , L_a und K_2 besitzt, können wir drei verschiedene Bedingungen vorschreiben.

¹⁾ Die hierunter gemachten Ausführungen sind nach mehrfacher Aussprache entstanden, die ich über diesen Gegenstand mit meinem Freunde Herrn Dr. Vos hatte. Ihm verdanke ich wertvolle Anregungen.

²⁾ Diese Anordnung ist der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie durch die D. R. Pe. Nr. 304363 und 305126 geschützt.

1. Für sehr lange Wellen, d. h. bei Vorschaltung einer großen Verlängerungsinduktivität L_o (Abb. 11) verhält sich die Anordnung praktisch ebenso wie eine Kapazität $K_1 + K_2$. Andererseits wirkt der natürliche Strahler unter diesen Umständen wie eine Kapazität von der Größe $C = C_1 I$. Wenn wir also die Bedingung

$$K_1 + K_2 = C \quad (35)$$

vorschreiben, so erreichen wir zunächst, daß unsere Nachbildung bei langen Wellen ebenso wirkt, wie der wirkliche Strahler.

2. Die Eigenschwingung des unverlängerten Strahlers erhält man, wenn man den Luftleiter unmittelbar an Erde (bzw. Gegengewicht) legt. Für den künstlichen Strahler nach Abb. 10 bedeutet dies, daß man die Punkte A und B miteinander verbindet. Die Eigenwelle ist dann

$$\lambda_o = 2\pi c \sqrt{L_a K_2}.$$

Andererseits ist für den natürlichen, homogenen Strahler (Gleichung 23)

$$\lambda_o = 2\pi c \frac{\sqrt{LC}}{\mu_o} = 4c \sqrt{LC}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke erhält man die weitere Bedingung

$$L_a K_2 = \frac{4}{\pi^2} LC. \quad (36)$$

3. Wir wollen nun drittens das Verhältnis

$$\frac{K_1}{K_2} = \gamma \quad (37)$$

so bestimmen, daß unsere künstliche Antenne auch beim Einschalten mäßiger Verlängerungsinduktivität die gleiche Welle ergibt wie der natürliche Strahler. Mit anderen Worten: Die Kurve, die die Grundwelle λ_o als Funktion der Verlängerungsinduktivität L_o darstellt (Abb. 9), soll auch in den mittleren Punkten beim künstlichen und beim natürlichen Strahler übereinstimmen. Streng genommen kann diese Forderung nur für einen einzigen Punkt, z. B. für den Punkt $\lambda_o = 2\lambda_o$, genau erfüllt werden. Es zeigt sich aber, daß die Kurven für den künstlichen und für den natürlichen Strahler einen so ähnlichen Verlauf haben, daß sie praktisch in dem ganzen Wellenbereich zusammenfallen, wenn man sie zuvor für einen Punkt zur Deckung gebracht hat.

Wir zeigen dies in der Weise, daß wir für angenommene Werte von λ_o/λ_o die jeweils für die Deckung der Kurven erforderliche Verhältniszahl γ bestimmen. Es wird sich zeigen, daß für alle vorkommenden Werte von λ_o/λ_o ein praktisch konstanter Wert von γ herauskommt.

Es sei ω_o die zu der Grundwelle λ_o des verlängerten Strahlers gehörige Kreisfrequenz. Für die künstliche Antenne nach Abb. 11 ergibt sich ω_o aus der Bedingung, daß bei der Eigenfrequenz der zwischen den Punkten A₁ und B gemessene Scheinwiderstand verschwinden soll. Er beträgt

$$S = i\omega_o L_o + \frac{1}{G}.$$

G ist der Scheinleitwert zwischen den Punkten A und B. Dieser ist

$$G = i\omega_o K_1 + \frac{1}{i\left(\omega_o L_a - \frac{1}{\omega_o K_2}\right)}.$$

Führt man diesen Wert in den Ausdruck für S ein und setzt $S=0$, so erhält man nach leichter Umformung die Gleichung

$$\omega_o^4 L_a L_o K_1 K_2 - \omega_o^2 (L_o K_1 + L_o K_2 + L_a K_2) + 1 = 0. \quad (38)$$

Wir dividieren diese Gleichung durch ω_o^4 und beachten ferner, daß

$$\Omega_o^2 = \frac{1}{L_a K_2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{LC} \quad (39)$$

die zur Eigenwelle λ_0 des unverlängerten Strahlers gehörige Kreisfrequenz ist. Es ergibt sich

$$\frac{L_0 K_1}{\Omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2 \Omega_0^2} (L_0 C \Omega_0^2 + 1) + \frac{1}{\omega_0^4} = 0$$

oder

$$L_0 K_1 \Omega_0^2 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} (L_0 C \Omega_0^2 + 1) + \frac{\Omega_0^4}{\omega_0^4} = 0 \quad (40)$$

oder, mit Rücksicht auf Gleichung (39) und auf die Beziehung

$$\frac{\Omega_0}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0}, \quad (40a)$$

$$\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{L_0}{L} \cdot \frac{K_1}{C} - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\pi^2}{4} \frac{L_0}{L} + 1 \right) + \frac{\lambda_0^4}{\lambda_0^4} = 0.$$

Setzen wir jetzt

$$y = \frac{\lambda_0}{\lambda_0}, \quad \xi = \frac{\pi^2}{4} \frac{L_0}{L} \quad (41)$$

und, gemäß Gleichung (37) und (35)

$$\frac{K_1}{C} = \frac{\gamma}{1 + \gamma},$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \xi - y^2 (\xi + 1) + y^4 = 0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung für γ , aus der man γ für gegebene Werte von ξ und y berechnen kann:

$$\gamma = \frac{y^2 (1 + \xi - y^2)}{(y^2 - 1) (y^2 - \xi)}. \quad (42)$$

Jedes Wertepaar ξ, y entspricht einem Punkte der Kurve in Abb. 9, welche das Wellenverhältnis λ_0/λ_0 als Funktion des Induktivitätenverhältnisses L_0/L darstellt. Die Gleichung (42) liefert den zugehörigen Wert γ , der nach Gleichung (37) und (35) vorschreibt, wie die Gesamtkapazität C des Strahlers auf die Kondensatoren K_1 und K_2 der künstlichen Antenne verteilt werden muß, damit diese mit dem gegebenen L_0 die gleiche Welle λ_0 habe wie der wirkliche Strahler.

Die Tafel 2 zeigt das Ergebnis einer in dieser Weise ausgeführten Berechnung. Die Werte ξ und y sind nicht der Kurve in Abb. 9 entnommen worden, da die Genauigkeit der Zeichnung für die nach (42) auszuführende Berechnung nicht ausreicht. Es sind vielmehr für angenommene Werte von μ die ξ und y auf Grund der Beziehungen (21) und (41) wie folgt berechnet worden¹⁾:

$$\xi = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{\mu \operatorname{tg} \mu}, \quad y = \frac{1/2 \pi}{\mu}. \quad (43)$$

Wir sehen, daß in der Tat ein über den ganzen Wellenbereich praktisch konstantes Verhältnis der Kapazitäten K_1 und K_2 herauskommt:

$$\gamma = 0,22. \quad (44)$$

Es muß demnach

¹⁾ Für kleine Werte von μ sind y^2 und ξ sehr große, nahezu gleiche Zahlen. Zur Bestimmung der Differenz

$$y^2 - \xi = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu \operatorname{tg} \mu} \right]$$

ist es bequem, die Reihenentwicklung für den cotangens zu benutzen:

$$\operatorname{cotg} \mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45} - \frac{2 \mu^5}{945} - \dots$$

Man erhält:

$$y^2 - \xi = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{45} + \frac{2 \mu^4}{945} + \dots \right]$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\gamma}{1 + \gamma} C = 0,18 C \\ K_2 &= \frac{1}{1 + \gamma} C = 0,82 C \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

gewählt werden.

Tafel 2.

μ	ξ	γ	γ
0,1	245,924	15,7080	0,217
0,15	108,837	10,4720	0,217
0,2	60,860	7,8539	0,217
0,25	38,653	6,2832	0,217
0,3	26,588	5,2360	0,217
0,35	19,313	4,4880	0,217
0,4	14,590	3,9270	0,217
0,5	9,033	3,1416	0,218
0,6	6,011	2,6180	0,218
0,7	4,185	2,2440	0,219
0,8	2,995	1,9635	0,220
0,9	2,176	1,7453	0,221
1,0	1,584	1,5708	0,223
1,1	1,142	1,4280	0,224
1,2	0,799	1,3090	0,226
1,3	0,527	1,2083	0,228
1,4	0,304	1,1220	0,230
1,5	0,117	1,0472	0,232

K_2 ist die bei der Grundwelle λ_0 des unverlängerten künstlichen Strahlers wirksame Antennenkapazität. Es ist bemerkenswert, wie genau der Wert $K_2 = 0,82 C$ mit dem vorher unter $\alpha)$, $\beta)$ berechneten Werte

$$C_a = 0,812 C \text{ für } \lambda_0 = \lambda_0$$

(siehe Tafel 1, vorletzte Spalte, unten) übereinstimmt.

c) Beispiel. Wir wollen die Brauchbarkeit unserer Anordnung an einem praktischen Beispiel prüfen. Dazu ist es notwendig, daß die gewählte Anordnung den Voraussetzungen möglichst entspreche, die hier hinsichtlich der gleichmäßigen Verteilung der Kapazität und Induktivität längs des Strahlers gemacht sind. Ein solcher Strahler ist die große Antenne des Telegraphen-Versuchsamts. Sie besteht aus einem 3 mm dicken, 270 m langen Bronzedraht, der vom Dache des Versuchsamts zum Dache des preußischen Abgeordnetenhauses horizontal ausgespannt ist. An dieser Antenne hat H. Behnken Messungen ausgeführt und veröffentlicht¹⁾. Aus seinen Angaben ergeben sich die folgenden Zahlen:

$$\lambda_0 = 1340 \text{ m.}$$

L_0 in cm	λ_0 in m
0,1235 · 10 ⁶	1612
0,286 · 10 ⁶	1900
0,468 · 10 ⁶	2230
1,85 · 10 ⁶	3920
3,27 · 10 ⁶	4930

¹⁾ Eine Methode zur Messung der wirksamen Kapazität von Antennen. Physikal. Zeitschr. 14, 1913, S. 430—433.

Die Gesamtkapazität C der Antenne gibt Behnken zu 1900 cm an. Es liegt nahe, mit Hilfe dieses Wertes aus der Wellenlänge λ_0 die Gesamtinduktivität L zu berechnen und dann auf Grund der angegebenen Werte von λ_0 , L_0 und der hier unter b) entwickelten Formeln die Konstanten der künstlichen Antenne zu bestimmen. Dieser Weg führt aber nicht zum Ziel, u. a. weil die Genauigkeit der Meßwerte den für den Rechnungsgang nach b) erforderlichen Genauigkeitsgrad bei weitem nicht erreicht. Der Rechnungsgang muß daher zunächst so umgestaltet werden, daß er ungeachtet der Meßfehler, mit denen die Beobachtungswerte unvermeidlich behaftet sind, brauchbare Ergebnisse liefert.

Wir gehen aus von der Gleichung (40), dividieren sie durch $-\Omega_0^2$ und erhalten

$$L_0 \left(C \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} - K_1 \right) = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^4} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} - 1 \right).$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (40a) und auf die Beziehung

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi c}$$

ergibt sich aus dieser Gleichung:

$$L_0 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2} C - K_1 \right) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2} - 1 \right). \quad (46)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur bekannte, durch die Beobachtung unmittelbar gegebene Größen. In der Klammer links sind C und K_1 als Unbekannte zu betrachten.

Um nun die Meßfehler möglichst unschädlich zu machen, empfiehlt sich das folgende Verfahren. Man berechne mittels (46) für eine Reihe von Punkten der ausgeglichenen Kurve

$$\lambda_0 = \text{Funktion von } L_0$$

den Wert des Klammerausdruckes

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2} C - K_1.$$

Man erhält so für jeden Punkt ν eine Gleichung von der Form

$$\frac{\lambda_{0\nu}^2}{\lambda_0^2} C - K_1 = a_\nu. \quad (47)$$

Aus jedem Paar solcher Gleichungen berechne man C . Waren es im ganzen q Punkte, so hat man $\frac{1}{2} q (q - 1)$ Werte von C . Das Mittel aus ihnen ist als der endgültige Wert C anzusehen.

Nunmehr geht man mit diesem Mittelwert in (47) ein und berechnet K_1 . Das Mittel aus den so erhaltenen q Werten von K_1 ist der endgültige Wert K_1 .

Dann ergibt sich weiter

$$K_2 = C - K_1, \quad L_\infty = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 c^2 K_2}.$$

Man kann sich endlich noch ein Urteil über die hierbei erzielte Genauigkeit dadurch bilden, daß man die Mittelwerte C und K_1 benutzt, um aus (46) für die gegebenen Kurvenpunkte rückwärts L_0 zu berechnen. Der Unterschied zwischen dem

berechneten L_0 und dem beobachteten L_0 ist ein Maß für die Genauigkeit der Nachbildung¹⁾.

Der geschilderte Berechnungsgang, angewandt auf die Antenne des Telegraphen-Versuchsamtes, ergab die Werte

$$K_1 = 340 \text{ cm}; K_2 = 1485 \text{ cm}$$

$$C = K_1 + K_2 = 1825 \text{ cm}$$

$$L_a = 307000 \text{ cm.}$$

Sodann wurde die erwähnte Kontrollrechnung ausgeführt. Die Ergebnisse sind in Tafel 3 zusammengestellt. Zwischen den aus Gleichung (46) berechneten Werten von L_0 (das sind die an der künstlichen Antenne erforderlichen Verlängerungsinduktivitäten) und den an der natürlichen Antenne beobachteten Werten von L_0 bestehen nur geringe Unterschiede, die bald positiv, bald negativ sind und auf Beobachtungsfehlern beruhen dürften.

Tafel 3.

λ_0 in m	L_0 in cm beobachtet	L_0 in cm berechnet	Abweichung in %
1612	$0,1235 \cdot 10^6$	$0,1273 \cdot 10^6$	+ 3,1
1900	$0,286 \cdot 10^6$	$0,2773 \cdot 10^6$	- 3
2230	$0,468 \cdot 10^6$	$0,472 \cdot 10^6$	+ 0,9
3920	$1,85 \cdot 10^6$	$1,92 \cdot 10^6$	+ 3,8
4930	$3,27 \cdot 10^6$	$3,17 \cdot 10^6$	- 3

Das Verhältnis der Kapazitäten beträgt hier

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 0,229,$$

in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem für einen homogenen Strahler gültigen theoretischen Werte $\gamma = 0,22$ (Gleichung 44).

d) Nachbildung nicht homogener Strahler. Der in Abb. 10 veranschaulichten künstlichen Antenne wird man erst dann einen größeren praktischen Wert zuerkennen, wenn es sich erweist, daß sie auch zur Nachbildung von unhomogenen Strahlern geeignet ist. Das ist in der Tat der Fall.

Wenn es sich darum handelt, einen beliebigen Strahler nachzubilden, so hat man zunächst die für verschiedene Wellen λ_0 nötigen Verlängerungsinduktivitäten L_0 durch den Versuch festzustellen. Hiernach berechnet man, ausgehend von der Gleichung (46) nach dem unter c) geschilderten Verfahren die Größen C und K_1 , hieraus ferner K_2 und L_a . Endlich berechnet man für die so gefundene künstliche Antenne nach Gleichung (46) die nötigen Werte von L_0 und vergleicht sie mit den beobachteten²⁾.

Dieses Verfahren werde auf den Strahler einer Großstation angewendet. Form und Abmessungen des Strahlers gehen aus der Abb. 12 hervor. Es handelt sich um eine L-Antenne, bestehend aus 2×10 Drähten von 332 m Länge in 135 m Höhe über dem Boden. Die Eigenwelle (Grundwelle) dieses Gebildes wurde zu

$$\lambda_0 = 3050 \text{ m}$$

¹⁾ Bei der praktischen Berechnung läßt man den Divisor c^2 auf der rechten Seite von Gleichung (46) fort und erhält dann C und K_1 in cm.

²⁾ Die Gleichung (46) gilt streng für eine künstliche Antenne nach Abb. 10, wobei die Art des nachzubildenden Strahlers gleichgültig ist.

ermittelt. Eine Reihe von Induktivitäten L_0 wurde in den Strahler eingeschaltet und die zugehörigen Wellenlängen λ_0 gemessen (siehe Tafel 4). Diese Wertepaare wurden benutzt, um nach dem unter c) angegebenen Verfahren die Konstanten der künstlichen Antenne zu berechnen. Es ergaben sich die Werte

$$K_1 = 1500 \text{ cm}, K_2 = 13\,300 \text{ cm}$$

$$C = 14\,800 \text{ cm}$$

$$L_a = 177\,300 \text{ cm}.$$

Mittels der Werte K_1 und C wurden dann aus Gleichung (46) die für die künstliche Antenne nötigen Verlängerungsinduktivitäten L_0 berechnet. Diese Werte weichen, wie Tafel 4 zeigt, nur sehr wenig von den an dem wirklichen Strahler benutzten Induktivitäten ab; die Unterschiede liegen innerhalb der Fehlergrenzen technischer Messungen. Im vorliegenden Falle ist das Kapazitätsverhältnis

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 0,113$$

Abb. 12. Strahler einer Großstation.

Tafel 4.

L_0 in cm	λ_0 in m	L_0 der künstl. Antenne in cm	Abweichung in %
$0,3 \cdot 10^5$	3300	$0,296 \cdot 10^5$	-1,3
$1,1 \cdot 10^5$	3950	$1,146 \cdot 10^5$	+4,2
$3,0 \cdot 10^5$	5100	$2,965 \cdot 10^5$	-1,2
$6,0 \cdot 10^5$	6520	$5,80 \cdot 10^5$	-3,3
$10,0 \cdot 10^5$	8200	$10,07 \cdot 10^5$	+0,7
$16,0 \cdot 10^5$	10200	$16,14 \cdot 10^5$	+0,9

nur die Hälfte des für homogene Strahler gültigen Wertes $\gamma = 0,22$. Der Unterschied liegt hauptsächlich an der senkrechten Zuleitung, deren Kapazität verhältnismäßig geringer ist als die des wagrechten Teils; man kann die Zuleitung deshalb in erster Näherung wie eine vorgeschaltete Induktivität betrachten (vgl. Abschnitt 2, Abb. 3 b). Die geringere Kapazität des Anfangs der wirklichen Antenne muß sich auch in der künstlichen Antenne wiederfinden.

An der fraglichen Antenne wurde die Gesamtkapazität C , die sogenannte statische Kapazität, mit niedriger Frequenz auch unmittelbar gemessen. Man fand $C = 13\,700 \text{ cm}$. Die Abweichung gegen den vorher bestimmten Wert $14\,800$ ist ziemlich beträchtlich; dieser ist aber der zuverlässigere, denn die Messung der statischen Kapazität mit der Kapazitätsmeßbrücke war nicht besonders genau.

7. Kapazitiv verkürzter Strahler.

Wir betrachten sogleich den allgemeinen Fall, daß in den Strahler, der durch eine Kapazität C_0 verkürzt ist, eine Verlängerungsinduktivität L_0 eingeschaltet sei (Abb. 13). In die allgemeine Gleichung (19), die zur Bestimmung der Eigenfrequenz dient, ist

$$Z_o = i \left(\omega L_o - \frac{1}{\omega C_o} \right)$$

einzuführen. Für das weitere ist es bequem, an Stelle der Gleichung (19) die reziproke Gleichung

$$\cotg m l = \frac{Z_o}{iZ}$$

zu nehmen. Z ist nach (14) gleich $\sqrt{\frac{L}{C}}$; folglich wird

$$\cotg m l = \left(\omega L_o - \frac{1}{\omega C_o} \right) \sqrt{\frac{C}{L}}$$

oder, mit Rücksicht auf (10) und (21a)

$$\cotg \mu = \frac{L_o}{L} \mu - \frac{C}{C_o} \cdot \frac{1}{\mu}. \quad (48)$$

Diese transzendente Gleichung hat unendlich viele Wurzeln μ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Sie bestimmen gemäß der Gleichung (23) die Eigenwellen λ_k des Strahlers. Die Gleichung (48) lösen wir wieder graphisch (Abb. 14), indem wir die Schar der Kurven $\cotg \mu$ mit der Kurve zum Schnitt bringen, die die rechte Seite

Abb. 13. Schema eines kapazitiv verkürzten Strahlers.

Abb. 14. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen des kapazitiv verkürzten Strahlers.

von (48) darstellt. Dies ist eine ungleichseitige Hyperbel. Ihre eine Asymptote ist die Ordinatenachse OY ; die andere Asymptote ist eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade OA , deren Neigungswinkel α mit der Abszissenachse $O\mu$ durch

$$\tg \alpha = \frac{L_o}{L} \quad (49)$$

gegeben ist.

Die Schnittpunkte $P_0, P_1, P_2, \dots$ bestimmen die Wurzeln

$$\mu_k = k\pi + \epsilon_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (50)$$

ϵ_k ist ein Winkel, der zwischen 0 und π liegt, und der für die Oberwellen ($k = 1, 2, \dots$) im allgemeinen klein ist.

Für den unverlängerten Strahler ist $L_o = 0$. Die Asymptote OA fällt mit der Abszissenachse $O\mu$ zusammen, die Hyperbel wird gleichseitig und nimmt die in Abb. 14 punktiert gezeichnete Lage ein. Der Schnittpunkt P_0 , der die Grundwelle

ergibt, rückt nach P; der zugehörige Wert μ werde mit M bezeichnet. Er bestimmt die Grundwelle $\mathcal{A}$ des unverlängerten, aber kapazitiv verkürzten Strahlers:

$$\mathcal{A} = \frac{2\pi}{M} \cdot l. \quad (51)$$

Je kleiner die Verkürzungskapazität C_0 ist, um so weiter entfernt sich die Hyperbel von ihren Asymptoten $O\mu$ und OY , um so tiefer kommt P zu liegen, um so mehr nähert sich M dem Wert π und $\mathcal{A}$ dem Wert $2l$. $\mathcal{A}$ ist stets kürzer als die Grundwelle $\mathcal{A}_0 = 4l$ des unverkürzten Strahlers.

Wir wollen für einige verschieden stark verkürzte Strahler die Werte der Grundwelle λ_0 als Funktion der Verlängerungsinduktivität L_0 feststellen. Dazu dient uns die Gleichung (48). Wir nehmen für C/C_0 die Werte

$$\frac{C}{C_0} = 0,1, 0,3, 1 \text{ und } 3$$

an. Man wähle zunächst eine Reihe von Werten für μ_0 und berechne mit Hilfe der Gleichung (48) die zugehörigen Beträge von L_0/L . Derjenige Wert μ_0 , für welchen $L_0/L = 0$ wird, ist die GröÙe M. Sie ergibt nach (51) die Grundwelle $\mathcal{A}$ des unverlängerten Strahlers. Endlich erhält man die Grundwelle λ_0 des verlängerten Strahlers aus der Beziehung

$$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}} = \frac{M}{\mu_0}. \quad (52)$$

Die so berechneten Werte sind in der Tafel 5 eingetragen.

Tafel 5.

μ_0	$\frac{C}{C_0} = 0,1$		$\frac{C}{C_0} = 0,3$		$\frac{C}{C_0} = 1$		$\frac{C}{C_0} = 3$	
	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}}$	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}}$	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}}$	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\mathcal{A}}$
0,2	27,15	8,15	32,15	8,70	49,6	10,1	99,65	12,25
0,3	11,9	5,43	14,1	5,80	21,9	6,75	44,1	8,17
0,4	6,54	4,08	7,78	4,35	12,16	5,07	24,66	6,13
0,5	4,06	3,26	4,86	3,48	7,66	4,05	15,66	4,90
0,6	2,71	2,72	3,27	2,90	5,21	3,38	10,77	4,08
0,7	1,90	2,33	2,31	2,45	3,74	2,89	7,82	3,50
0,8	1,37	2,04	1,70	2,18	2,78	2,53	5,90	3,06
0,9	1,004	1,81	1,25	1,93	2,115	2,25	4,60	2,72
1,0	0,742	1,63	0,942	1,74	1,642	2,03	3,64	2,45
1,1	0,556	1,48	0,712	1,58	1,29	1,84	2,94	2,23
1,2	0,397	1,358	0,532	1,45	1,02	1,685	2,40	2,04
1,3	0,272	1,253	0,391	1,34	0,804	1,556	1,986	1,885
1,4	0,1743	1,163	0,276	1,24	0,632	1,446	1,653	1,750
1,5	0,0918	1,087	0,180	1,16	0,492	1,350	1,380	1,653
1,57	0,0406	1,038	0,122	1,11	0,406	1,288	1,215	1,560
1,63	0	1	—	—	—	—	—	—
1,7			0,027	1,02	0,269	1,19	0,960	1,441
1,74			0	1	—	—	—	—
1,8					0,1784	1,125	0,797	1,360
1,9					0,0963	1,065	0,650	1,289
2,0					0,0207	1,013	0,521	1,225
2,025					0	1	—	—
2,2							0,289	1,114
2,4							0,0654	1,021
2,45							0	1

Es ist von Interesse festzustellen, in welchem Verhältnis die Grundwelle λ des verkürzten Strahlers zur Länge l steht. Hierzu dient die Gleichung (51) in Verbindung mit den der Tafel 5 zu entnehmenden Werten M . Man erhält

$$\begin{aligned} \text{für } C/C_0 &= 0,1 & \dots & \dots & \lambda = 3,85 l \\ \text{,, } C/C_0 &= 0,3 & \dots & \dots & \lambda = 3,61 l \\ \text{,, } C/C_0 &= 1 & \dots & \dots & \lambda = 3,10 l \\ \text{,, } C/C_0 &= 3 & \dots & \dots & \lambda = 2,56 l. \end{aligned}$$

In Abb. 15 sind die Kurven $\lambda_0/\lambda = f(L_0/L)$ in dem praktisch wichtigen Wellengebiet dargestellt. Sie verlaufen ähnlich wie die früher für den nicht verkürzten Strahler gefundenen Kurven. Dieser Umstand läßt uns hoffen, daß auch die kapazitiv verkürzte Antenne durch eine Anordnung nach Abb. 10 nachgebildet werden kann. Wir denken uns dabei die Verkürzungskapazität C_0 als einen integrierenden Bestandteil des natürlichen Strahlers, wie es z. B. bei der Flugzeugantenne oder bei einer Antenne mit Gegengewicht der Fall ist.

Abb. 15. Abhängigkeit der Grundwelle von der Verlängerungs-Induktivität bei verschieden stark kapazitiv verkürzten Strahlern.

Das Verfahren zur Bestimmung der künstlichen Antenne ist das im Abschnitte 6c angewandte. Die Gleichung (46) lautet hier

$$L_0 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} K - K_1 \right) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} - 1 \right)$$

$$K = \frac{C \cdot C_0}{C + C_0} \quad (53)$$

ist die Gesamtkapazität des verkürzten Strahlers, die man sich durch die Reihenschaltung der eigentlichen Strahlerkapazität C und der Verkürzungskapazität C_0 entstanden denken muß.

Die vorletzte Gleichung schreiben wir nach Division durch

$$LC = \frac{\lambda_0^2}{16c^2} = \frac{\lambda^2 M^2}{4\pi^2 c^2}$$

in der Form

$$\frac{L_0}{L} \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} K - K_1 \right) = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} - 1 \right). \quad (54)$$

Wir nehmen als Beispiel die sehr stark verkürzte Antenne mit $\frac{C}{C_0} = 3$ und $M = 2,45$. Der Abb. 15 (bzw. der Tafel 5) sind die in den beiden ersten Spalten der Tafel 6 enthaltenen Werte von λ_0/λ nebst den zugehörigen Werten von L_0/L entnommen. Das im Abschnitt 6c geschilderte Rechnungsverfahren ergab

$$\frac{K}{C} = 0,25; \quad \frac{K_1}{C} = 0,1333; \quad \frac{K_2}{C} = 0,1167. \quad (55)$$

Ein Prüfstein für die Richtigkeit der Rechnung ist zunächst einmal die Beziehung (53); sie gibt mit $C/C_0 = 3$ ebenfalls genau den Wert $K/C = 0,25$. Sodann wurde mit den Zahlen (55) in die Gleichung (54) eingegangen und danach für die angenommenen Wellen λ_0/λ die bei der künstlichen Antenne erforderlichen Induktivitäten L_0/L berechnet. Diese in der dritten Spalte der Tafel 6 stehenden Werte befinden sich in guter Übereinstimmung mit den entsprechenden Größen des wirklichen Strahlers. Die geringen Abweichungen (in der letzten Spalte der Tafel 6 verzeichnet) beruhen in der Hauptsache auf den Ungenauigkeiten der mit dem Rechenschieber ausgeführten Berechnung.

Bemerkenswert, aber physikalisch durchaus erklärlich ist, daß das Kapazitätsverhältnis

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 1,14$$

den für den homogenen, unverkürzten Strahler geltenden Wert $\gamma = 0,22$ um ein Vielfaches überschreitet. Für weniger stark verkürzte Strahler ($C/C_0 < 3$) liegen die Werte von γ natürlich näher an 0,22. Messungen an Flugzeugantennen ergaben zum Teil noch kleinere Werte, was vielleicht auf die ungleichförmige Verteilung der Kapazität längs des Strahlerdrahtes zurückzuführen ist.

Tafel 6.

$\frac{\lambda_0}{\lambda}$	L_0/L		Abweichung in %
	für den wirklichen Strahler	für den künstlichen Strahler	
1,2	0,47	0,465	— 1
1,4	0,85	0,88	+ 3
1,6	1,27	1,315	+ 4
2	2,3	2,31	+ 0,5
2,5	3,85	3,83	— 0,5
3	5,7	5,67	— 0,6
3,5	7,82	7,84	+ 0,2
4	10,35	10,34	— 0,1
5	16,2	16,34	+ 1
6	23,7	23,7	0
8	42,6	42,4	— 0,5

8. Strahler mit Endkapazität.

Ein Strahler mit Endkapazität ist z. B. die Schirmantenne (Abb. 4a und 4b). Um allgemeine Beziehungen zu gewinnen, gehen wir von der in Abb. 16 dargestellten Anordnung aus. Sie besteht aus einem homogenen Strahler, der am Anfang durch die Kapazität C_0 (z. B. durch ein Gegengewicht) verkürzt und durch die

Induktivität L_o verlängert ist. Der Strahler trägt außerdem die Endkapazität C_1 und die Endinduktivität L_1 . Bei Schirmantennen ist $L_1 = 0$. Indessen sind Anordnungen mit Erdantennen denkbar, die am Ende mit einer Drossel L_1 und einer Kapazität C_1 belastet sind. Ob und für welche Zwecke derartige Anordnungen praktisch in Frage kommen, kann hier unerörtert bleiben.

Zur Berechnung der Eigenschwingungen ist von der allgemeinen Gleichung (18) auszugehen. Wir schreiben sie in der Form

$$\cotg m\ell = \frac{Z^2 + Z_o Z_1}{iZ(Z_o + Z_1)}. \quad (18)$$

Hier ist

$$Z_o = i(L_o \omega - \frac{1}{C_o \omega})$$

$$Z_1 = i(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}).$$

Ferner ist

$$\omega = \frac{m\ell}{\sqrt{LC}}; \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Abb. 16. Schema eines beiderseits mit Induktivität und Kapazität beschwerten Strahlers (z. B. Schirmantenne mit Gegengewicht und Verlängerungsspule).

Abb. 17.

Führt man dies in die obige Gleichung (18) ein und benutzt die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_o}{L} &= a_o; & \frac{C}{C_o} &= b_o \\ \frac{L_1}{L} &= a_1; & \frac{C}{C_1} &= b_1 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\mu = m\ell, \quad (57)$$

so nimmt die Gleichung (18) die Form an¹⁾

$$\cotg \mu = \frac{(a_o \mu^2 - b_o)(a_1 \mu^2 - b_1) - \mu^2}{\mu [(a_o + a_1) \mu^2 - (b_o + b_1)]}. \quad (58)$$

Die transzendente Gleichung (58) hat unendlich viele Wurzeln, die den sämtlichen Eigenwellen des betrachteten Strahlergebildes entsprechen. Man findet sie in der bekannten, bereits erörterten Weise, indem man die Schnittpunkte aufsucht zwischen den Zweigen der Funktion $\cotg \mu$ und der rationalen Funktion $R(\mu)$ auf der rechten Seite der Gleichung (58).

Den Verlauf von $R(\mu)$ zeigt Abb. 17¹⁾. Im einzelnen ist hierzu folgendes zu bemerken.

¹⁾ Eine der Gleichung (58) gleichwertige Beziehung ist in der bereits erwähnten Arbeit von B. van der Pol jun. hergeleitet („Über die Wellenlängen und Strahlung mit Kapazität und Selbstinduktion beschwerter Antennen“, Jahrbuch d. drahtl. Telegr. u. Teleph. Bd. 13, 1918, S. 220, Gleichung 10). Die an die Gleichung (58) angeschlossenen Betrachtungen sind in der Arbeit van der Pols nicht enthalten.

¹⁾ $R(\mu)$ ist, ebenso wie $\cotg \mu$, eine ungerade Funktion; denn es ist $R(-\mu) = -R(\mu)$. Infolgedessen entsteht die Fortsetzung von $R(\mu)$ auf der linken Seite der Ordinatenachse aus der Funktionskurve rechts der Ordinatenachse durch Spiegelung an den beiden Achsen. Zu jeder positiven Wurzel von Gleichung (58) gehört eine gleichgroße negative Wurzel; beide ergeben dieselbe Eigenschwingung. Daher genügt es, die Betrachtungen auf die Kurvenzweige rechts der Ordinatenachse zu beschränken.

a) Für kleine μ gilt der Näherungsausdruck

$$R(\mu) \approx -\frac{1}{\mu} \frac{b_0 b_1}{b_0 + b_1}, \quad (58a)$$

der sich aus (58) durch Streichen der Glieder mit μ^2 ergibt. (58a) stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, deren eine Asymptote die Ordinatenachse OY ist.

b) Für große μ ist Gleichung (58) näherungsweise durch den Ausdruck

$$R(\mu) \approx \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_1} \mu \quad (58b)$$

darzustellen. D. h. die Kurve $R(\mu)$ schmiegt sich für große Werte von μ der Geraden OA asymptotisch an. Die Tangente des Neigungswinkels α von OA ist durch den Faktor von μ auf der rechten Seite von (58b) gegeben.

c) In dem Punkte $\mu = \mu_{II}$, in welchem der Nenner von (58) verschwindet, hat $R(\mu)$ eine Asymptote $B_1 B_2$, die parallel zur Ordinatenachse läuft. Links der Asymptote läuft $R(\mu)$ nach $+\infty$ und kehrt rechts von ihr aus $-\infty$ zurück.

Der Wert von μ_{II} ergibt sich aus (58) zu

Abb. 18. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen eines Strahlers nach Abb. 16.

Abb. 19.

$$\mu_{II} = \sqrt{\frac{b_0 + b_1}{a_0 + a_1}} = \sqrt{\frac{LC}{L_s C_s}}, \quad (58c)$$

wo L_s die durch Serienschaltung von L_0 und L_1 entstehende Induktivität, C_s die durch Serienschaltung von C_0 und C_1 entstehende Kapazität bedeutet.

d) Die Stellen μ_I und μ_{III} , an denen die Zweige von $R(\mu)$ die Abszissenachse schneiden, erhält man durch Nullsetzen des Zählers von (58). Man gewinnt so eine quadratische Gleichung für μ^2 :

$$\mu^4 - \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{a_0 a_1} \right) \mu^2 + \frac{b_0 b_1}{a_0 a_1} = 0.$$

Ihre Wurzeln, die wir nicht explizite hinschreiben brauchen, sind die Größen μ^2_I und μ^2_{III} .

Die Abb. 18 gibt einen Überblick über die Wurzeln der Gleichung (58). Sie sind bestimmt durch die Schnittpunkte $P_0, P_1, P_2, \dots$, in welchen die Cotangensfunktion von unserer Kurve $R(\mu)$ getroffen wird. Die entsprechenden Abszissen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ sind die gesuchten Wurzeln. Zu jeder Wurzel μ gehört eine Eigenwelle

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\mu}.$$

Für den Fall der Schirmantenne verschwindet L_1 ; es wird $a_1 = 0$, und die Asymptote OA in Abb. 17 fällt in die Abszissenachse $O\mu$ (Abb. 19). Dieser praktisch wichtigere Fall soll noch etwas eingehender betrachtet werden.

Für einen gegebenen Fall sind C_0 und C_1 , mithin auch b_0 und b_1 als gegebene konstante Größen anzusehen. Wir stellen uns jetzt die Frage, wie hängt die Grundwelle $\lambda_0 = 2\pi l/\mu_0$ von der Verlängerungsinduktivität L_0 , d. h. von dem Parameter a_0 ab. Um diese Frage zu beantworten, lösen wir (58), nachdem zuvor $a_1 = 0$ gesetzt ist, nach a_0 auf. Es ergibt sich

$$a_0 = \frac{(b_0 + b_1)\mu \cotg \mu + b_0 b_1 - \mu^2}{\mu^2(\mu \cotg \mu + b_1)}. \quad (59)$$

Die Berechnung der Kurve $\lambda_0 = f(L_0)$ gestaltet sich hiernach sehr einfach. Der Wert von μ , für den a_0 verschwindet, bestimmt die Grundwelle λ des unverlängerten Strahlers.

Ich habe die Berechnung für zwei Beispiele ausgeführt.

1. Beispiel $b_0 = \frac{C}{C_0} = 3, \quad b_1 = \frac{C}{C_1} = \frac{1}{3}.$

Es handelt sich also um eine stark verkürzte Antenne ($C_0 = \frac{1}{3}C$), deren Endkapazität das Dreifache der verteilten Kapazität beträgt ($C_1 = 3C$). Die Gleichung (59) lautet hier, nachdem man die Zahlen für b_0 und b_1 eingesetzt und Zähler und Nenner mit μ multipliziert hat.

$$a_0 = \frac{3,333\mu + (1 - \mu^2)\operatorname{tg} \mu}{\mu^2\left(\mu + \frac{1}{3}\operatorname{tg} \mu\right)}.$$

Es zeigt sich, daß a_0 für $\mu = 1,377$ verschwindet. Daraus folgt die Grundwelle der unverlängerten Anordnung

$$\lambda = \frac{2\pi l}{1,377} = 4,56 l.$$

Die mit verschiedenen Verlängerungsspulen erzielten Wellen gehen aus der Tafel 7 hervor. Die Werte verlaufen ähnlich wie die in Abb. 15 dargestellten, weshalb sich die Wiedergabe der Kurve hier erübrigt.

Tafel 7.

μ_0	$a_0 = \frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\lambda}$
0,2	80,3	6,88
0,25	51,2	5,51
0,3	35,3	4,59
0,35	25,7	3,93
0,4	19,5	3,44
0,5	12,2	2,75
0,7	5,75	1,97
0,9	3,03	1,53
1,1	1,53	1,25
1,3	0,437	1,06
1,370	0,022	1,005
1,377	0	1

2. Beispiel. Es sei $b_0 = 0$; $b_1 = \frac{1}{3}$. D. h. wir betrachten einen Strahler mit derselben Endkapazität, aber ohne Verkürzung am Anfang. Es wird hier nach (59)

$$a_0 = \frac{0,3333 - \mu \operatorname{tg} \mu}{\mu^2 \left(1 + \frac{0,333 \operatorname{tg} \mu}{\mu} \right)}$$

a_0 wird null für $\mu = 0,547$, woraus

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{0,547} = 11,48 l.$$

Tafel 8 zeigt, wie die Grundwelle von der Verlängerungsinduktivität abhängt.

Tafel 8.

μ_0	$a_0 = \frac{L_0}{L}$	$\frac{\lambda_0}{\lambda}$
0,05	99,2	10,92
0,075	43,7	7,29
0,1	24,2	5,47
0,15	10,32	3,65
0,2	5,47	2,74
0,25	3,22	2,18
0,3	1,985	1,82
0,35	1,243	1,56
0,4	0,758	1,37
0,45	0,422	1,21
0,5	0,176	1,09
0,547	0	1

Es entsteht nun die Frage, inwieweit die hier betrachteten Anordnungen durch künstliche Antennen der in Abb. 10 dargestellten Art nachgebildet werden können. Die Konstanten der künstlichen Antenne sind nach den in den Abschnitten 6 und 7 erörterten Grundsätzen zu ermitteln.

Man findet für die Anordnung nach Beispiel 1

$$\frac{K}{C} = 0,307; \quad \frac{K_1}{C} = 0,185; \quad \frac{K_2}{C} = 0,122$$

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 1,52.$$

Für die Anordnung im Beispiel 2 ergibt sich

$$\frac{K}{C} = 4,00; \quad \frac{K_1}{C} = 0,49; \quad \frac{K_2}{C} = 3,51$$

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 0,14.$$

Die Gesamtkapazität K kann auch durch elementare, elektrostatische Betrachtungen ermittelt werden. Sie entsteht durch Reihenschaltung der Verkürzungskapazität C_0 mit den nebeneinander geschalteten Kapazitäten C und C_1 .

Im Beispiel 1 ist $C_1 = 3C$ und $C_0 = \frac{1}{3}C$; daraus folgt

$$K = \frac{4C \cdot \frac{1}{3}C}{4C + \frac{1}{3}C} = \frac{1,333}{4,333} C = 0,307 C,$$

wie vorher gefunden.

Im zweiten Beispiel ist einfach

$$K = C + C_1 = 4C,$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit dem vorher ermittelten Werte.

Ein Urteil über die Brauchbarkeit der künstlichen Antenne gewinnt man dadurch, daß man nach dem bereits geschilderten, auf Gleichung (54) beruhenden Verfahren für eine Reihe von Wellen die zugehörigen Verlängerungsinduktivitäten der künstlichen Antenne berechnet und sie mit den für den wirklichen Strahler geltenden Werten vergleicht. Tafel 9 enthält die Ergebnisse der für beide Beispiele durchgeführten Rechnung. Die Zahlen lehren, daß man auch Strahler mit Endkapazität, und zwar mit oder ohne Verkürzungskapazität am Anfang, durch die vorgeschlagene künstliche Antenne (Abb. 10) mit jeder nur wünschenswerten Genauigkeit nachbilden kann.

Aus naheliegenden Gründen wird das Kapazitätenverhältnis γ beim unverkürzten Strahler mit Endkapazität kleiner als beim einfachen homogenen Strahler ($\gamma = 0,22$ nach Gleichung 44). Eine Verkürzungskapazität am Anfang bewirkt, daß

Abb. 20. Homogener Strahler, mit einem geschlossenen Schwingungskreise gekoppelt.

Abb. 21. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der Anordnung nach Abb. 20.

γ beträchtlich größer ausfällt, im Einklang mit dem im Abschnitt 7 gefundenen Ergebnis.

Tafel 9.

$\frac{\lambda_0}{\lambda}$	Unverkürzter Strahler (Beispiel 2)			Verkürzter Strahler (Beispiel 1)		
	L_0/L		$\Delta\%$	L_0/L		$\Delta\%$
	wirkliche Antenne	künstliche Antenne		wirkliche Antenne	künstliche Antenne	
1,2	0,380	0,386	+ 1,6	1,28	1,28	0
1,4	0,820	0,831	+ 1,4	2,34	2,36	+ 1
1,6	1,320	1,340	+ 1,5	3,43	3,48	+ 1,5
2,0	2,550	2,550	0	6,00	6,03	+ 0,5
2,5	4,45	4,43	- 0,5	9,85	9,91	+ 0,6
3	6,76	6,72	- 0,6	14,7	14,64	- 0,4
3,5	9,45	9,45	0	20,2	20,2	0
4	12,45	12,56	+ 0,9	26,5	26,6	+ 0,4
5	20,3	20,0	- 1,3	41,8	41,9	+ 0,3
6	29,5	29,2	- 1,1	61,2	60,8	- 0,7
8	52,5	52,5	0	109,5	108,5	- 1
10	83	82,7	- 0,4			

9. Strahler und Zwischenkreis.

a) Als einfachster Fall werde ein homogener Strahler betrachtet, der mit einem geschlossenen Kreise L_o , C_o gekoppelt ist (Abb. 20).

In der allgemeinen Gleichung (19)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{iZ}{Z_o},$$

die zur Berechnung der Eigenwellen dient, ist im vorliegenden Falle

$$\frac{1}{Z_o} = i(\omega C_o - \frac{1}{\omega L_o})$$

zu setzen. Tut man das und berücksichtigt, daß

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \omega = \frac{\mu}{\sqrt{LC}}$$

ist, so ergibt sich

$$\operatorname{cotg} \mu = \frac{\mu}{\frac{L}{L_o} - \frac{C_o}{C} \mu^2}. \quad (60)$$

Die rechte Seite von (60), die wieder mit $R(\mu)$ bezeichnet sei, ist durch die stark ausgezogene Kurve in Abb. 21 veranschaulicht. Ihre Schnittpunkte P_o , P_1 , $P_2, \dots$ mit den dünn gezeichneten Cotangenslinien bestimmen die Wurzeln μ_o , μ_1 , $\mu_2, \dots$ der Gleichung (60). Die Größen μ sind den Eigenfrequenzen direkt, den Eigenwellenlängen umgekehrt proportional.

Die Asymptote BB_1 der Kurve $R(\mu)$ schneidet die Abszissenachse in dem Punkte Q_o , der durch das Verschwinden des Nenners in dem Ausdruck $R(\mu)$ bestimmt ist. Bezeichnen wir den zugehörigen Wert μ mit M_o , so wird

$$\frac{L}{L_o} - \frac{C_o}{C} M_o^2 = 0, \quad M_o = \sqrt{\frac{LC}{L_o C_o}}. \quad (61)$$

Dazu gehört die Kreisfrequenz

$$\Omega_o = \frac{M_o}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}},$$

d. h. der Punkt Q_o entspricht der Eigenfrequenz des geschlossenen Kreises L_o , C_o .

Strahler und Zwischenkreis sind durch die Spule L_o miteinander gekoppelt, die als gemeinsames Element beiden Teilen angehört. Die Grundfrequenz des entkoppelten Strahlers ist demnach die Grundfrequenz des aus dem Strahler und der Spule L_o allein bestehenden Systems.

Man findet sie, indem man in (60) $C_o = 0$ setzt, aus der Gleichung

$$\operatorname{cotg} \mu = \frac{L_o}{L} \mu. \quad (60a)$$

Die rechte Seite wird durch die Gerade OA in Abb. 21 dargestellt; mit $\operatorname{tg} \alpha = L_o/L$. Ihr Schnittpunkt Q mit der ersten Cotangenskurve bestimmt die kleinste Wurzel von (60a), die wir mit M bezeichnen und die die Grundwelle λ des entkoppelten Strahlers ergibt:

$$\lambda = \frac{2\pi l}{M}. \quad (61a)$$

Die beiden längsten Eigenwellen des aus dem Strahler und dem Zwischenkreis gekoppelten Systems sind durch die Werte

$$\lambda_0 = \frac{2\pi l}{\mu_0}, \quad \lambda_1 = \frac{2\pi l}{\mu_1}. \quad (61b)$$

gegeben. Die Eigenwelle des Zwischenkreises endlich ist

$$\lambda_0 = \frac{2\pi l}{M_0}. \quad (61c)$$

Man sieht, von den beiden Kopplungswellen ist die eine (λ_0) länger als die längere der beiden Grundwellen der entkoppelten Kreise, während die andere (λ_1) kürzer als die kürzere der Einzelwellen ist. Diese Eigenschaft haben bekanntlich auch die Kopplungswellen zweier geschlossener Kreise.

Die weiteren Schnittpunkte $P_2, P_3 \dots$ liegen in der Nähe der Punkte $3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots$ und bestimmen die Oberwellen des gekoppelten Systems. Sie haben praktisch geringes Interesse.

Von praktischer Bedeutung ist vor allem der Fall der Abstimmung zwischen Strahler und Zwischenkreis. Hier ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, d. h. $M = M_0$; die Asymptote BB_1 geht durch den Punkt Q.

Koppelt man zwei geschlossene, aufeinander abgestimmte Kreise miteinander, so ist bekanntlich die Wellenverschiebung um so größer, je fester die Kopplung k ist. Sind λ_0 und λ_1 die Kopplungswellen, so ist

$$k = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2}. \quad (62)$$

Denkt man sich den Strahler durch eine einfache Induktivität L_a und eine einfache Kapazität C_a ersetzt (vgl. Abschnitt 6a), so gewinnt man die aus Abb. 22 ersichtliche Anordnung. Der eine Kreis besteht aus L_0, C_0 , der zweite aus $L_0 + L_a$ und C_a . Die Gegeninduktivität L_{12} zwischen den beiden Kreisen hat den Wert L_0 . Daher ist

Abb. 22. Geschlossener Kreis und künstliche Antenne.

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_{11}}} = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 (L_0 + L_a)}} = \sqrt{\frac{L_0}{L_0 + L_a}} = \sqrt{\frac{C_a}{C_0}}. \quad (63)$$

Diese Formel ist indessen in unserem Falle zur Definition von k insofern nicht geeignet, als man nicht weiß, nach welchen Gesichtspunkten die Ersatzgrößen L_a, C_a zu bestimmen sind. Natürlich könnte man L_a und C_a nach irgend welchen Gesichtspunkten festsetzen (z. B. nach Abschnitt 6a, α oder 6a, β) und (63) als Definition von k ansehen. Damit wäre aber nicht viel gewonnen, weil in dem Falle des Strahlers mit seiner nicht quasistationären Stromverteilung noch keineswegs feststeht, daß dann die Beziehung (62) gültig ist. Diese ist vielmehr bisher lediglich für ein System abgeleitet, das aus zwei Kreisen besteht, von denen jeder quasistationäre Stromverteilung hat.

Nun wird man in erster Linie wünschen, daß die Beziehung (62) zwischen Kopplung und Wellenverschiebung auch für das aus dem Strahler und dem geschlossenen Kreise bestehende System ihre Gültigkeit behalte. Wir benutzen deshalb die Gleichung (62) zur Definition der Kopplung.

Dadurch ist auch eine weitere Schwierigkeit umgangen, die in der Gleichung (63) auftritt. Die Größen L_a und C_a ändern sich ja, wie wir sahen, mit der Wellenlänge, und zwar besonders stark in der Nähe der Grundwelle λ des unverlängerten Strahlers. Soll man nun in der Gleichung (63), $k = \sqrt{C_a/C_0}$, für C_a den Wert für die längere Welle λ_0 oder den Wert für die kürzere Welle λ_1 oder den Wert für

die Welle $\mathcal{A}$ einsetzen, die doch in dem gekoppelten System überhaupt nicht auftritt? Diese Fragestellung zeigt schon, daß die Gleichung (63) für nicht quasistationäre Kreise streng genommen keinen Sinn hat¹⁾.

Immerhin ist es bemerkenswert, daß in dem Falle loser Kopplung, wo die Wellenverschiebung gering ist, die Gleichung (63) für C_a genau den Wert liefert, der nach der Definition im Abschnitt 6a unter β für die mittlere Welle $\mathcal{A}$ zu erwarten ist. Lose Kopplung hat man, wenn L_o klein im Vergleich zu L , d. h. C klein im Vergleich zu C_o ist. In diesem Falle schmiegt sich, wie die Gleichung (60) lehrt, die Kurve $R(\mu)$ eng an die Asymptote BB_1 (Abb. 21); und die Punkte P_o und P_1 liegen ganz nahe bei $\frac{\pi}{2}$. Wir setzen demgemäß

$$\mu_o = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad (64)$$

wo ε einen kleinen Winkel bedeutet.

Dann ist

$$\cotg \mu = \pm \varepsilon.$$

Aus (60) ergibt sich, bei Vernachlässigung kleiner Größen,

$$\pm \varepsilon \approx \frac{\frac{C}{C_o} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{L}{L_o} \frac{C}{C_o} - \mu^2} = \frac{\frac{C}{C_o} \cdot \frac{\pi}{2}}{M^2 - \mu^2} = \frac{\frac{C}{C_o} \cdot \frac{\pi}{2}}{(M + \mu)(M - \mu)}, \quad M = \frac{\pi}{2}, \quad \pm \varepsilon = \frac{\frac{C}{C_o} \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi (\pm \varepsilon)}$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{C}{2C_o}}. \quad (65)$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung der Wellenverschiebung bei loser Kopplung und Abstimmung auf die Grundwelle des unverlängerten Strahlers. Die Verschiebung ist um so geringer, je größer die Kapazität C_o des Zwischenkreises im Vergleich zur Strahlerkapazität ist²⁾.

Nun folgt aus (62), wenn man (61b) beachtet,

$$k = \frac{\mu_1^2 - \mu_o^2}{\mu_1^2 + \mu_o^2}. \quad (66)$$

Hieraus erhält man, mit Rücksicht auf (64) und (65)

$$k = \frac{(\mu_1 + \mu_o)(\mu_1 - \mu_o)}{\mu_1^2 + \mu_o^2} = \frac{\pi \cdot 2\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi^2} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{C}{2C_o}}$$

$$k = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{C}{C_o}}. \quad (67)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit (63), so erkennt man, daß

$$C_a = \frac{8}{\pi^2} C$$

¹⁾ Aus diesem Grunde ist das Behnken'sche Verfahren zur Messung der wirksamen Antennenkapazität (a. a. O.) grundsätzlich nur dann richtig, wenn die Kopplung so lose ist, daß die Kopplungswellen nahe bei der Grundwelle des ungekoppelten Strahlers liegen.

²⁾ Der Fall der Abstimmung auf die Grundwelle des unverlängerten Strahlers ist bereits von M. Abraham in der Abhandlung „Zur drahtlosen Telegraphie“ (Phys. Zeitschr. Bd. 5, 1904, S. 174–179) eingehend erörtert. Dort ist auch die Gleichung (65) hergeleitet.

zu setzen ist, im Einklang mit dem früher gefundenen Werte (Gleichung 33 c im Abschnitt 6 a, β).

Macht man die Induktivität L_0 größer und größer und läßt zugleich C_0 so abnehmen, daß die Eigenfrequenz des Zwischenkreises dieselbe bleibt, so wird die Kopplung mit dem Strahler immer fester. Die Kurve $R(\mu)$ in Abb. 21 spreizt sich mehr und mehr auf, was zur Folge hat, daß der Schnittpunkt P_0 auf der Cotangenslinie nach oben, der Schnittpunkt P_1 auf der Cotangenslinie nach unten läuft. Im Grenzfall wird $\mu_0 = 0$ und $\mu_1 = \pi$, d. h. $\lambda_0 = \infty$ und $\lambda_1 = 2l$. Die Kopplung erreicht in diesem Falle nach Gleichung (62) oder (66) ihre obere Grenze $k = 1$.

Die hier gewonnenen Beziehungen wollen wir nun auf einige Meßwerte anwenden, die Behnken an der Antenne des Telegraphen-Versuchsamtes (siehe Abschnitt 6 c) erhalten und in der bereits genannten Arbeit mitgeteilt hat.

Behnken hat die in Abb. 20 dargestellte Schaltung benutzt. Der Zwischenkreis wurde auf die Grundwelle des durch die Induktivität L_0 verlängerten Strahlers abgestimmt. Die folgende Tafel 10 gibt die mit verschiedenen Spulen L_0 erhaltenen Wellen λ , die zugehörigen Kondensatorgrößen C_0 , ferner die zugehörigen Kopplungswellen λ_0 und λ_1 , die nach Gleichung (62) berechneten Kopplungen k , die aus den Wellen berechneten Werte von M , μ_0 und μ_1 und endlich die nach Gleichung (60 a) berechneten Größen L_0/L .

Tafel 10.

λ m	C_0 m	λ_0 m	λ_1 m	k	M	μ_0	μ_1	$\frac{L_0}{L}$
1612	53,2	1988	1150	0,500	1,305	1,058	1,830	0,207
1900	31,9	2495	1095	0,687	1,107	0,843	1,922	0,451
2230	26,9	3040	1088	0,773	0,943	0,693	1,933	0,768
3920	21,0	5380	1043	0,935	0,537	0,391	2,018	3,13
4930	18,8	6960	117 ¹⁾	0,990	0,427	0,303	—	5,14

Aus der Gleichung (60) erhalten wir

$$\frac{\cotg \mu}{\mu} = \frac{L_0}{L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{M^2}} = \varphi(\mu).$$

Tafel 11.

Lange Kopplungswelle			Kurze Kopplungswelle		
μ	$\frac{\cotg \mu}{\mu}$	$\varphi(\mu)$	μ	$\frac{\cotg \mu}{\mu}$	$\varphi(\mu)$
1,058	0,53	0,60	1,830	— 0,144	— 0,215
0,843	1,02	1,07	1,922	— 0,190	— 0,223
0,693	1,74	1,66	1,933	— 0,195	— 0,241
0,391	6,21	6,68	2,018	— 0,238	— 0,239
0,303	10,6	10,3			

¹⁾ Dieser Wert beruht sicherlich auf einem Irrtum; λ_1 kann nicht kleiner sein als $\frac{1}{2} \lambda_0 = 670$ m.

Auf Grund der in der Tafel 10 enthaltenen Werte kann man die beiden Seiten dieser Gleichung berechnen und miteinander vergleichen (Tafel 11). Die Übereinstimmung kann, mit Rücksicht auf die nicht besonders große Genauigkeit der Messungen, als zufriedenstellend bezeichnet werden. Die Abweichungen sind teils positiv, teils negativ, woraus wir, in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen (Abschnitt 6c) schließen dürfen, daß die von Behnken gemessene Antenne in der Tat einem homogenen Strahler nahe kommt.

b) Die Verbindung eines Strahlers mit einem Zwischenkreis in der Schaltung nach Abb. 20 hat den Nachteil, daß Welle und Kopplung zwangsläufig zusammenhängen, und zwar so, daß die Kopplung mit zunehmender Wellenlänge immer fester wird. Man vermeidet das durch die Hinzunahme einer besonderen Abstimmddrossel L_1 im Strahlerkreis nach Abb. 23.

In der Wellengleichung

Abb. 23. Gekoppeltes System aus einem geschlossenen Schwingungskreis und einem homogenen Strahler mit Abstimmddrossel.

Abb. 24. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der Anordnung nach Abb. 23, wenn die Kreise verstimmt sind.

$$\cotg \mu = \frac{Z_o}{iZ}$$

ist nunmehr

$$Z_o = i \left[L_1 \omega + \frac{L_o \omega}{1 - L_o C_o \omega^2} \right]$$

einzusetzen. Mit

$$\omega = \frac{\mu}{\sqrt{LC}}; \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \frac{LC}{L_o C_o} = M_o^2$$

erhält man

$$\cotg \mu = \frac{L_1}{L} \mu + \frac{\frac{L_o}{L} \mu}{1 - \frac{\mu^2}{M_o^2}} \quad (68)$$

M_o bestimmt, ebenso wie früher, die Eigenwelle des Zwischenkreises (Gleichung 61 und 61 c).

Die Gleichung (68) unterscheidet sich von (60) nur dadurch, daß auf der rechten Seite das Glied $\frac{L_1}{L} \mu$ hinzugetreten ist. Dieses Glied wäre für sich allein in Abb. 24 durch die gerade Linie OD darzustellen, deren Neigungswinkel durch

$$\operatorname{tg} \mu OD = \frac{L_1}{L}$$

gegeben ist. Das Glied überlagert sich der in Abb. 21 benutzten Funktion $R(\mu)$, so daß im vorliegenden Falle diese Funktion die in Abb. 24 stark ausgezogene Form annimmt.

Sie besitzt, wie die frühere Funktion $R(\mu)$, eine der Ordinatenachse parallele Asymptote BB_1 im Abstand M_0 vom Koordinatennullpunkt; ferner schmiegt sie sich für große μ der Asymptote OD mehr und mehr an.

Ihre Schnittpunkte $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ mit der Cotangensfunktion ergeben die Wurzeln $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ der Gleichung (68). Diese sind den Eigenfrequenzen proportional. μ_0 und μ_1 bestimmen die beiden Kopplungswellen

$$\lambda_0 = \frac{2\pi l}{\mu_0}, \quad \lambda_1 = \frac{2\pi l}{\mu_1}, \quad (68a)$$

die übrigen μ_k ergeben die Oberwellen:

$$\lambda_k = \frac{2\pi l}{\mu_k}.$$

Die Eigenwellen des entkoppelten Strahlers erhält man, indem man $C_0 = 0$ setzt. Dann geht (68) über in

$$\cotg \mu = \frac{L_1 + L_0}{L} \mu. \quad (69)$$

Die rechte Seite entspricht der Geraden OA ; ihr Neigungswinkel ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \mu OA = \frac{L_1 + L_0}{L}.$$

Ihre Schnittpunkte $Q, Q_1, Q_2, \dots$ mit der Cotangensfunktion bestimmen die Grundwelle

$$A = \frac{2\pi l}{M} \quad (69a)$$

und die Oberwellen des entkoppelten Strahlers.

Auch hier gilt wieder die Beziehung

$$\lambda_0 > A \text{ bzw. } A_0; \quad \lambda_1 < A \text{ bzw. } A_0. \quad (70)$$

Wichtig ist der Fall der Abstimmung. Er ist dadurch gegeben, daß $M = M$ wird; die Asymptote BB_1 geht dann durch den Punkt Q (Abb. 25). Dieser entspricht der Grundwelle des entkoppelten Strahlers und der ihr gleichen Eigenwelle des Zwischenkreises. Die Punkte $Q_1, Q_2, \dots$ bestimmen die Oberwellen des entkoppelten Strahlers. Koppelt man Strahler und Zwischenkreis, so treten P_0 und P_1 an die Stelle von Q ; d. h. die gemeinsame Welle der beiden Kreise spaltet sich auf in die beiden Kopplungswellen. Außerdem rücken die Punkte $Q_1, Q_2, \dots$ nach $P_2, P_3, \dots$. Wie man aus der Abb. 25 erkennt, werden dabei alle Oberschwingungen schneller und dementsprechend alle Oberwellen kürzer. Die Verkürzung macht aber um so weniger aus, je höher die Ordnungszahl der betreffenden Oberwelle ist.

Die übrigen, an dem Falle a) durchgeführten Betrachtungen lassen sich sinngemäß auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen.

Wir wollen unsere Betrachtungen damit abschließen, daß wir in dem praktisch wichtigen Fall loser Kopplung die Gültigkeit der Gleichung (63)

$$k = \sqrt{\frac{C_a}{C_0}} \quad (63)$$

für jede Welle $\lambda > 4l$ nachweisen, wenn unter C_a die im Abschnitt 6a, β definierte Antennenkapazität verstanden wird¹⁾. Bei der vorausgesetzten losen Kopplung unterscheiden sich die Kopplungswellen nur sehr wenig von der gemeinsamen Grundwelle der beiden Einzelkreise, so daß die vorher aufgeworfene Frage — für welche Welle das einzusetzende C_a zu nehmen sei — hier gegenstandslos wird²⁾.

Man hat lose Kopplung, wenn L_o klein im Vergleich zu L_1 bzw. $L_1 + L_a$ ist. Dann fallen die Geraden OA und OD in Abb. 25 praktisch zusammen, und die Kurve $R(\mu)$ schmiegt sich eng an die Asymptote BB_1 an. Man kann also

$$\left. \begin{aligned} \mu_o &= M - \varepsilon_o \\ \mu_1 &= M + \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

setzen, wo die ε_o und ε_1 kleine Größen sind. Die Tatsache, daß Strahler und Zwischenkreis aufeinander abgestimmt sind, drückt sich durch die Beziehung $M = M_o$

Abb. 25. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der Anordnung nach Abb. 23, für den Fall der Abstimmung der Grundwelle des Strahlers auf die Eigenwelle des geschlossenen Kreises.

aus. Setzt man (71) in die Gleichung (68) ein und entwickelt beide Seiten nach der Taylorsche Reihe, so ergibt sich unter Vernachlässigung von Größen, die von höherer Ordnung klein sind,

$$\cotg M + \frac{\varepsilon_o}{\sin^2 M} = \frac{L_1}{L} M - \frac{L_1}{L} \varepsilon_o + \frac{L_o}{L} \cdot \frac{M^2}{2 \varepsilon_o} \left(1 - \frac{\varepsilon_o}{2 M} \right)$$

$$\cotg M - \frac{\varepsilon_1}{\sin^2 M} = \frac{L_1}{L} M + \frac{L_1}{L} \varepsilon_1 - \frac{L_o}{L} \cdot \frac{M^2}{2 \varepsilon_1} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2 M} \right).$$

Nun ist aber nach Gleichung (69) $\cotg M = \frac{L_1}{L} M + \frac{L_o}{L} M$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so gewinnen wir eine quadratische Gleichung für ε_o . Geordnet lautet sie wie folgt:

$$\varepsilon_o^2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{L_o M \sin^2 M}{L + L_1 \sin^2 M} \varepsilon_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_o M^2 \sin^2 M}{L + L_1 \sin^2 M}.$$

¹⁾ Der vorher (unter a) geführte Nachweis bezog sich lediglich auf die Verhältnisse bei der Grundwelle des unverlängerten Strahlers ($\lambda = 4l$).

²⁾ Die Gleichung (63) war an Hand der Abb. 22 hergeleitet worden; diese kann auch auf den allgemeinen Fall b bezogen werden, man muß dann nur $L_a + L_1$ an die Stelle von L_a setzen.

Die Gleichung hat die Form

$$\varepsilon_0^2 + a \varepsilon_0 = a b. \quad (72a)$$

Darin bedeuten a und b die folgenden Abkürzungen:

$$a = \frac{5}{4} \cdot \frac{L_0 M \sin^2 M}{L + L_1 \sin^2 M}, \quad b = \frac{2}{5} M. \quad (72b)$$

a ist infolge unserer Annahme, daß L_0 klein im Vergleich zu L_1 sein soll (Voraussetzung loser Kopplung), eine im Vergleich zu b kleine Größe. Man findet, daß unter diesen Umständen die Lösung der Gleichung (72a) sehr angenähert durch den Wert

$$\varepsilon_0 = \sqrt{a b} = M \sqrt{\frac{L_0 \sin^2 M}{2(L + L_1 \sin^2 M)}} \quad (73)$$

gegeben ist. Auf demselben Wege erhält man für ε_1 die Gleichung

$$\varepsilon_1^2 - a \varepsilon_1 = a b. \quad (72c)$$

Sie liefert denselben Näherungswert

$$\varepsilon_1 = \sqrt{a b} = \varepsilon_0. \quad (74)$$

Da ε_1 und ε_0 gleichgroß sind, bezeichnen wir sie von jetzt ab mit demselben Buchstaben ε .

Nachdem wir die Wellenverschiebung durch die Gleichungen (73) und (74) festgelegt haben, müssen wir jetzt die Kopplung durch die Wellenverschiebung ausdrücken. Hierzu dient die Gleichung (66):

$$k = \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{\mu_1^2 + \mu_0^2}.$$

Sie liefert, mit $\mu_1 = M + \varepsilon$, $\mu_0 = M - \varepsilon$ und unter Vernachlässigung von Größen, die von höherer Ordnung klein sind,

$$k = \frac{2\varepsilon}{M}. \quad (75)$$

Der weitere Schritt besteht in der Einführung der Konstanten der im Abschnitt 6a unter β definierten künstlichen Antenne. Die dort gefundene Beziehung lautet mit den hier verwendeten Bezeichnungen¹⁾

$$\frac{L_0 + L_1 + L_a}{L} = \frac{1}{2 \sin^2 M} + \frac{\sin 2M}{4 M \sin^2 M} = \frac{M + \sin M \cos M}{2 M \sin^2 M}.$$

Setzt man hierin gemäß der Gleichung (69)

$$M = \frac{L \cos M}{(L_1 + L_0) \sin M} \approx \frac{L \cos M}{L_1 \sin M},$$

so erhält man

$$\frac{L_0 + L_1 + L_a}{L_0} = \frac{L + L_1 \sin^2 M}{2 L_0 \sin^2 M}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf Gleichung (73) und (75)

$$\frac{L_0 + L_1 + L_a}{L_0} = \frac{M^2}{4 \varepsilon^2} = \frac{1}{k^2}$$

¹⁾ Der Wert von $\frac{L_a}{L}$ ist der Formel (34b) zu entnehmen. Die Größe $\frac{L_1 + L_0}{L}$ ist nach Gleichung (21), wenn dort sinngemäß L_0 durch $L_0 + L_1$ ersetzt wird, gleich

$$\frac{1}{M \operatorname{tg} M} = \frac{2 \sin M \cos M}{2 M \sin^2 M} = \frac{2 \sin 2M}{4 M \sin^2 M}.$$

Durch Addition der Ausdrücke von L_a/L und $(L_0 + L_1)/L$ ergibt sich der hier angeschriebene Ausdruck.

$$k = \sqrt{\frac{L_o}{L_o + L_1 + L_a}} = \sqrt{\frac{C_a}{C_o}},$$

was zu beweisen war.

Damit ist gezeigt, daß eine künstliche Antenne mit den im Abschnitt 6a unter β definierten Konstanten bei loser Kopplung die gleichen Kopplungsverhältnisse aufweist wie der nachzubildende wirkliche Strahler. Wir schließen mit dem Hinweis, daß auch die Dämpfung in beiden Fällen dieselbe ist, sofern man den Widerstand R_a der künstlichen Antenne gleich dem auf den Eintrittsstrom I_o bezogenen wirksamen Widerstand des natürlichen Strahlers macht (vgl. 2a); denn in beiden Fällen sind bei einem gegebenen Strom I_o nicht nur die Verlustleistungen gleich groß, sondern (gemäß der im Abschnitt 6a, β benutzten Definition von L_a und C_a) auch die gesamten Schwingungsenergien.

10. Rückblick.

Wir haben unsere Betrachtungen damit begonnen, daß wir für die wichtigsten Strahlergebilde ein elektromagnetisches Normalschema einführten. Es besteht aus einem homogenen Strahlerteil mit gleichförmig verteilter Kapazität und Induktivität und mit Beschwerungen an einem oder an beiden Enden. Die Beschwerungen können aus Kapazitäten, Induktivitäten und Widerständen beliebig zusammengesetzt sein; ein Teil davon kann integrierender Bestandteil des Strahlergebildes selbst sein, der übrige Teil stellt die angeschlossenen Sende- oder Empfangsapparate dar. Nach dieser Auffassung kann der gesamte Strahlerkreis wie eine an beiden Enden belastete Kabelleitung behandelt werden. Auf diesem Wege gelangten wir zur Aufstellung allgemeiner Beziehungen, die die Spannungs- und Stromverteilung längs des Strahlers ergeben, sowie zur Berechnung der Eigenschwingungen (Grundwelle und Oberwellen) dienen.

Im Anschluß hieran wurde untersucht, wie sich ein Strahler durch möglichst einfache Zusammenstellungen von Kondensatoren und Drosseln nachbilden läßt.

Der Ersatz durch einen einzigen Kondensator hat den Nachteil, daß die Ersatzkapazität stark von der Betriebswelle abhängt; je näher man der Grundwelle des homogenen Strahlerteils kommt, um so größer muß die Ersatzkapazität genommen werden.

Es ist üblich, Antennen durch eine Kapazität C_a und eine Induktivität L_a in Reihenschaltung nachzubilden. Man wußte, daß die Konstanten C_a und L_a der künstlichen Antenne ebenfalls von der Betriebswelle abhängen. Man hat die Größen L_a und C_a bisher so bestimmt, daß erstens für eine gegebene Verlängerungsinduktivität die Eigenwelle der künstlichen Antenne mit der Grundwelle der natürlichen Antenne übereinstimmt, und daß zweitens die Spannung an der Kapazität C_a ebenso hoch wird wie die höchste Spannung am natürlichen Strahlergebilde bei demselben Antennenstrom und derselben Betriebswelle.

Die zweite Forderung ist ziemlich willkürlich. Wir haben sie ersetzt durch die Forderung, daß bei demselben Antennenstrom in der künstlichen Antenne dieselbe Schwingungsenergie umgesetzt wird wie im natürlichen Strahler. Wir gelangten so zu einer Nachbildung, deren Kapazität C_a von der Betriebswelle weniger abhängt, als es bei der üblichen Nachbildung der Fall ist, und die die gleichen Dämpfungs- und Kopplungsverhältnisse aufweist wie der wirkliche Strahler.

Zu einer künstlichen Antenne, deren elektrische Bemessung von der Betriebswelle unabhängig ist, führt die Kettenleiter-Schaltung. Es zeigt sich, daß man für alle praktischen Bedürfnisse mit einem einzigen Kettenglied auskommt. Es wurde gezeigt, wie man die Kettengliedantenne für gegebene Strahlergebilde aus den elektrischen Konstanten berechnet. Ein anderes Verfahren besteht darin, daß

man an dem wirklichen Strahlergebilde die beim Einschalten verschiedener Verlängerungs-Induktivitäten auftretenden Grundwellenlängen mißt und aus diesen Meßwerten die künstliche Antenne bestimmt. Auch dieses Verfahren ist an praktischen Beispielen erläutert worden¹⁾. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Kettengliedantenne ein anpassungsfähiges Gebilde ist, mittels dessen man Strahler der verschiedensten Art sehr genau nachbilden kann.

Weiterhin wurden die elektrodynamischen Eigenschaften und die Eigenwellen (Grundwelle und Oberwellen) von kapazitiv verkürzten Strahlern, von Strahlern mit Endkapazität (z. B. Schirmantennen) und Strahlern, die mit einem Zwischenkreis gekoppelt sind, untersucht. Auf den mit einem Zwischenkreis gekoppelten Strahler pflegt man die aus der Theorie der gekoppelten Schwingungen geschlossener Schwingungskreise geläufigen Begriffe ohne weiteres zu übertragen. Hier wurde die Anwendung dieser Begriffe auf eine exakte Grundlage gestellt.

¹⁾ Ich bemerke noch, daß im Anschluß an diese Arbeit Herr Bakhuis im Laboratorium der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie ein Verfahren zur unmittelbaren experimentellen Bestimmung der Kettengliedantenne ausgearbeitet hat. Herr Bakhuis wird demnächst in dem „Jahrbuch für drahtlose Telegraphie und Telephonie“ darüber berichten.

Eine einfache geometrische Darstellung des harmonischen Mittels.

Von

E. Orlich, Charlottenburg.

I. Allgemeine Grundlagen.

Das harmonische Mittel m zwischen zwei Größen a und b ist bekanntlich durch die Gleichung:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

definiert; setzt man hierin $m = 2c$, so ergibt sich eine Gleichung:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad (1)$$

die in den verschiedensten Zweigen der Physik eine wichtige Rolle spielt. Sind a und b Widerstände, so ist c der resultierende Widerstand der Parallelschaltung von a und b , sind es Kapazitäten, so ist c die resultierende Kapazität der Hintereinanderschaltung von a und b .

In der Optik stellt Gl. (1) bekanntlich die Linsenformel in der einfachsten Form dar: a und b sind Gegenstands- und Bildweite, c die Brennweite.

Es gibt nun eine sehr einfache und anschauliche geometrische Darstellung für die Gl. (1), die als solche gewiß nicht neu ist, die aber, nach den Lehrbüchern zu urteilen, in den Fachkreisen gänzlich unbekannt zu sein scheint.

Sie beruht auf folgendem geometrischen Satze: vom Punkte P (Bild 1) gehen drei Strahlen aus, die miteinander die Winkel α , β , $\alpha + \beta$, bilden; eine beliebige Transversale schneide auf den Strahlen die Längen $PA = a$, $PC = c$, $PB = b$ ab; dann ist der Flächeninhalt von:

$$\Delta PAC = \frac{1}{2} a c \sin \alpha$$

$$\Delta PBC = \frac{1}{2} b c \sin \beta$$