3. *Nachtrag zu der Arbeit: „Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation"; von E. Reichenbächer.*

Der grundlegende Unterschied meiner Gravitationstheorie gegen die von Einstein, mit der sie so vieles gemeinsam hat, besteht in der Zurückführung der Verzerrung des Raumzeitkontinuums auf die elektromagnetische Drehung ϑ und im Anschluß daran in der Annahme eines einzigen skalaren, mit der Lichtgeschwindigkeit zusammenhängenden Gravitationspotentials statt der 10 Komponenten des Einsteinschen Fundamentaltensors. Demgegenüber verschwindet der in der Anwendung erhaltene Unterschied in dem Werte der Vorrückung des Perihels. Dieser ist nämlich nur auf die abweichende Form des Ausdruckes für das Bogendifferential zurückzuführen. In räumlichen Polarkoordinaten lautet dies bei Einstein[1]) für den materiefreien Äther:

$$\text{(I)}\quad d s^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\, d r^2 + r^2\, d \varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi\, d \psi^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) d x_0{}^2,$$

bei mir dagegen:

$$\text{(II)}\quad d s_1^2 = d r^2 + r^2\, d \varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi\, d \psi^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 d x_0{}^2,$$

da ich die Verzerrung in der radialen Richtung beseitigt wissen wollte.

Die erste Folge dieser abweichenden Annahme ist die, daß im Falle (I) sämtliche Komponenten $K_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors, im Falle (II) dagegen nur die skalare Krümmung $\mathfrak{K} = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ im Äther verschwindet. Eine zweite Folgerung ergibt sich bei der Aufstellung der Punktbewegung. Dabei ist zunächst interessant, daß meine Gleichungen

---

1) Vgl. dazu auch H. Reißner l. c. und K. Schwarzschild, Berliner Akad. Ber. p. 189ff. 1916.

$$40\text{b} \ldots \frac{\frac{d^2 x_\tau}{d s^2}}{g_0 \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2} = \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3)$$

durch die 4. ergänzt werden müssen:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} = 0,$$

um der Bedingung

$$\text{(II)} \quad \sum_{\tau=1}^{3} \left(\frac{d x_\tau}{d s}\right)^2 + g_0 \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 = 1$$

zu genügen. Aus dieser folgt nämlich:

$$\sum_{\tau=1}^{3} \frac{d x_\tau}{d s} \frac{d^2 x_\tau}{d s^2} + \frac{d x_0}{d s} \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} - \frac{1}{2} \frac{d g_0}{d s} \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 = 0.$$

Setzt man hierin den Wert aus (40b) ein, so erhält man:

$$g_0 \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 \sum_{\tau=1}^{3} \frac{d x_\tau}{d s} \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{d x_\tau} + \frac{d x_0}{d s} \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} - \frac{1}{2} \frac{d g_0}{d s} \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 = 0.$$

Da

$$\frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{d x_0} = 0$$

ist, erhält man:

$$\sum_{\tau=1}^{3} \frac{d x_\tau}{d s} \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{d x_\tau} = \frac{d \lg \sqrt{g_0}}{d s} = \frac{1}{2 g_0} \frac{d g_0}{d s};$$

das 1. und das 3. Glied heben sich auf, und es bleibt die Gleichung (III) übrig; denn $d x_0 / d s$ ist nicht 0.

Überträgt man Gleichung (III) auf den Einsteinschen Ansatz, was wegen des in bezug auf x_0 gleichartigen Baues der Formel für das Linienelement zulässig ist, so erhält man:

$$g_0 \frac{d x_0}{d s} = c_0, \qquad g_0 \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 = \frac{c_0^2}{g_0}.$$

Setzt man diesen Wert in (I) ein, so wird

$$\text{(IV)} \quad 1 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d \varphi}{d s}\right)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d \psi}{d s}\right)^2 + \frac{c_0^2}{1 - \frac{\alpha}{r}}\,^{1)}.$$

1) D. h. der Energiesatz; dieser wird also durch die leichte Integration der Gleichung (III) geliefert; entsprechend hätte ich ihn auch für den Ansatz (II) herleiten können.

12*

Der Flächensatz folgt aus den Gleichungen (40b), die auch nach ihrer Umformung für den Ansatz (I) jedenfalls die Folgerung $d^2 x_\tau / d s^2$ proportional x_τ wie bei Einstein zulassen, woraus die Möglichkeit sich ergibt, $\psi = \text{const.}$ in (IV) zu setzen. Da dann aber

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{iB}{r^2},$$

so folgt aus (IV):

$$1 = -\frac{B^2}{1-\frac{\alpha}{r}}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 - B^2\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{c_0^2}{1-\frac{\alpha}{r}},$$

d. h. die Einsteinsche Gleichung[1])

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c_0^2-1}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3},$$

die sich übrigens auch aus seiner Voraussetzung der Punktbewegung als kürzester Weltlinie ohne jede Vernachlässigung höherer Glieder folgern läßt.

Wie man sieht, verträgt sich also auch die Einsteinsche Planetenbewegung durchaus mit der Annahme eines skalaren Gravitationspotentials; aber dies hängt für seinen Ansatz (I) nicht so einfach mit der Lichtgeschwindigkeit zusammen wie im Falle (II), für den einfach das Gravitationspotential

$$\text{(VI)} \qquad \mathfrak{A} = \lg \mathfrak{l}\ ,$$

gleich dem Logarithmus der Lichtgeschwindigkeit zu setzen ist. Für n anziehende Zentren ergibt sich dann einfach aus der Feldgleichung:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\mathfrak{K}}{2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_\mu}\ .$$

$$\text{(VIII)} \qquad \mathfrak{A} = \lg \mathfrak{l}_1 + \lg \mathfrak{l}_2 + \ldots \lg \mathfrak{l}_n,$$

d. h. die resultierende Lichtgeschwindigkeit ist das Produkt der durch jedes besondere Elektron erzeugten Einzellichtgeschwindigkeiten.

Im Einsteinschen Falle (I) aber ist:

$$\text{(IX)} \qquad \mathfrak{K} = \frac{d^2\mathfrak{l}}{dr^2} + \frac{4\,d\mathfrak{l}}{r\,dr} + 2\,\frac{\mathfrak{l}-1}{r^2}\ .$$

---

1) Berliner Akad. Ber. p. 837. Gleichung (11), 1915.

Daraus folgt, wenn A eine Funktion von r allein soll:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \lg \mathfrak{l} + \int \frac{d r}{r} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{l}}\right). \tag{X}$$

Beide Gleichungen (IX) und (X) führen zu gewissen Unzuträglichkeiten. Will man nämlich den stetigen Übergang für das Gravitationspotential von innen nach außen wahren, so ist in der für das Innere gültigen Formel

$$g_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}$$

wegen $\cos \vartheta > 1$ die Größe k_0 als von 1 verschieden anzunehmen. Dann erhält man aber für $\mathfrak{K}$ im Mittelpunkte des Elektrons einen unendlich großen Wert. Dies könnte man vermeiden, wenn man im Innern des Elektrons Ansatz (II), außen aber (I) gelten läßt. Dann ist freilich für die Größe g_1 ein stetiger Übergang nicht möglich. Gleichung (X) aber gibt für n Elektronen keinen so eleganten Ausdruck wie (VIII); denn es gilt zwar wegen des besonderen, durch (IX) bedingten Wertes von $\mathfrak{l}$ im freien Äther die Gleichung:

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{1}{2} \lg \mathfrak{l} \;; \tag{XI}$$

diese trifft aber im Innern nicht mehr zu.

Es hat sich also herausgestellt, daß auch bei meiner Auffassung des Gravitationspotentials als Skalar die Einsteinsche Punktbewegung sich ergibt, wenn ich den Ausdruck (I) für das Bogendifferential wähle. Trotzdem möchte ich nicht so ohne weiteres diesen vor dem Ansatz (II) bevorzugen, sondern die Vorteile folgendermaßen abwägen[1]:

In Fall (I) verschwinden

1. alle Komponenten $K_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors, während für (II) nur $\mathfrak{K} = 0$ wird. Ferner ergibt sich

2. die Vorrückung des Perihels richtig für den Merkur, vorausgesetzt, daß alle störenden Massen schon richtig in Rechnung gesetzt sind.

Im Fall (II) dagegen erscheint

1. der Raum durch die Gravitation eines in ihm ruhenden Körpers nicht verzerrt, und es wird

---

1) Vgl. auch F. Kottler, Ann. d. Phys. **50**. p. 972. 1916.

2. der Wert der mit der Gesamtkrümmung zusammenhängenden Massendichte $\mathfrak{d}$ bei Wahrung des stetigen Überganges aller Fundamentalgrößen nirgends unendlich.

3. Die resultierende Lichtgeschwindigkeit läßt sich aus den einzelnen auf die einfachste Art berechnen.

Wenn daher nicht die unbedingt sichere Gewähr für die Richtigkeit der Annahme (I) durch astronomische Messungen gegeben wird, möchte ich mich doch für (II) entscheiden.

Schließlich möchte ich nochmals auf den einfachen Bau der Formel für die Weltfunktion $\mathfrak{H}_1$ bei skalarem Gravitationspotential hinweisen:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{4\pi\varkappa} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\nu} .$$

In dieser ist die Feldgleichung (VII) nicht nur, wie schon gezeigt, implicite enthalten, sondern kann auch daraus hervorgehen, wenn man bei der Variation $\mathfrak{d}$ und $\partial \mathfrak{A} / \partial x_\mu$ konstant läßt. Genau so ergeben sich die elektrischen Feldgleichungen aus $\mathfrak{H}_2$.

(Eingegangen 5. Dezember 1916.)