**4. Über eine Form des Prinzips
der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik
des Relativitätsprinzips;
von E. Henschke.**

(Zweiter und dritter Teil der Berliner Dissertation des Verfassers).¹⁾

Erst mit der Aufstellung des modernen Relativitätsprinzips durch Einstein²⁾ war es gelungen, eine Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper zu liefern, welche allen bisherigen Erfahrungen Genüge leistet. Aus den von Minkowski³⁾ mit Hilfe dieses Prinzips in eleganter Weise aufgestellten elektrodynamischen Grundgleichungen für bewegte Körper können alle Ergebnisse der Versuche von Eichenwald, Wilson und Michelson einwandfrei hergeleitet werden.

Allerdings konnte der Ansatz, den Minkowski für die ponderomotorische Kraft gegeben hatte, nach den Einwänden von Einstein und Laub⁴⁾ nicht aufrecht erhalten werden. Aber daß dies kein Mangel der Relativitätstheorie war, hat Abraham⁵⁾ in zwei Arbeiten gezeigt. Durch Aufstellung eines allgemeinen für alle erwähnten Theorien gültigen Ausdrucks für die ponderomotorische Kraft ist es Abraham gelungen, unter Hinzunahme der dem Relativitätsprinzip entsprechenden Verknüpfungsgleichungen zwischen den das elektromagnetische Feld bestimmenden Vektoren einen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft herzuleiten, welcher allen bisherigen Erfahrungen entspricht.⁶⁾

1) Über den ersten Teil „Vierdimensionale Vektoranalysis“ vgl. die Dissert. Die hier zitierten Gleichungen dieses Teiles sind mit (I) bezeichnet.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

3) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 53, separat erschienen bei Teubner, Leipzig.

4) A. Einstein u. S. Laub, Ann. d. Phys. 26. p. 541. 1908.

5) M. Abraham, Rendiconti del circoli matematico di Palermo, 28. p. 1; (I). 30. p. 33; (II).

6) Vgl. R. Gans, Physik. Zeitschr. 12. p. 806. 1911.

War somit durch die Minkowskischen Grundgleichungen und diesen Abrahamschen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft eine Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper aufgestellt worden, welche sowohl in der Einfachheit und Allgemeinheit der Voraussetzungen als auch in den tatsächlichen Erfolgen allen anderen Theorien weit überlegen war, so erschien es doch von erheblichen Interesse zu sein, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob sich diese Theorie auch aus einem Variationsprinzip herleiten ließe.

Die hohe Bedeutung einer derartigen Herleitung der Theorie erhellt vor allem aus der Arbeit von Planck¹⁾ über die „Dynamik bewegter Systeme“, in welcher ausgeführt ist, daß das Prinzip der kleinsten Wirkung zusammen mit dem Relativitätsprinzip in allererster Linie als eine wirklich exakte Grundlage der Dynamik anzusehen ist.

Auch bei den früheren Theorien hatte man ja stets großen Wert auf eine Herleitung aus einem Variationsprinzip gelegt. So hatte H. A. Lorentz²⁾ seine Gleichungen aus einem mit dem D'Alembertschen verwandten Prinzip hergeleitet, und Helmholtz³⁾ war es ja bekanntlich gelungen, eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung anzugeben, aus welchem sich nicht nur die Hertzschen Grundgleichungen für bewegte Körper, sondern auch die Maxwell-Hertzschen Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte ermitteln ließen.

In Anlehnung an diese Helmholtzsche Arbeit hat dann Schwarzschild⁴⁾ aus zwei Formen des Prinzips der kleinsten Wirkung einmal die Maxwell-Lorentzschen Grundgleichungen für das Vakuum dann aber auch den bekannten Lorentzschen Kraftansatz herleiten können.

Aus dem von Schwarzschild benutzten Integral haben dann später H. Poincaré⁵⁾ und M. Born⁶⁾ durch andere Methoden dieselben Resultate ermittelt.

1) M. Planck, *Ann. d. Phys.* **26**. p. 1. 1908.

2) H. A. Lorentz, „Versuch . . .“, Leiden 1895. *Enzyklop. d. math. Wiss.* V, 2, Art. 14, 1903.

3) H. v. Helmholtz, *Wied. Ann.* **47**. p. 1—26. 1892. *Wiss. Abh.* III. p. 476—504. *Wiss. Abh.* III. p. 597—603.

4) K. Schwarzschild, *Göttinger Nachr.* 1903. p. 126.

5) H. Poincaré, *Rend. del circolo mat. di Palermo* **21**. p. 129. 1906.

6) M. Born, *Ann. d. Phys.* **28**. p. 571. 1909.

Indessen ist in keiner dieser Arbeiten aus einem Variationsprinzip der Ausdruck für die ponderomotorische Kraft hergeleitet worden, welcher aus dem Maxwellschen Spannungstensor und der elektromagnetischen Bewegungsgröße in der bekannten Weise zusammengesetzt ist. Da in diesem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft der fundamentale Unterschied zwischen der Maxwell-Hertzschen und den modernen Theorien der Elektrodynamik in unmittelbarster Weise in Erscheinung tritt, so erschien es wichtig, diesen Ausdruck aus einem Variationsprinzip herzuleiten.

In der vorliegenden Arbeit ist es nun für den Fall des Vakuums gelungen, Prinzipie aufzustellen, welche einerseits die elektrodynamischen Grundgleichungen einschließlich der Divergenzbedingungen liefern, andererseits die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte ergeben, welche außer der aus einem Spannungstensor abgeleiteten Kraft noch die elektromagnetische Trägheitskraft enthalten.

Die eingeschlagene Methode bringt es mit sich, daß zu den Ausdrücken für die ponderomotorischen Kräfte auch immer noch Gleichungen für die Energieverhältnisse sich ergeben.

Das zur Anwendung gebrachte Prinzip ist als eine Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips der kleinsten Wirkung anzusehen, welche von dem Gedanken ausgehend vorgenommen worden ist, daß die Bevorzugung der Zeit, welche in der klassischen Form des Hamiltonschen Prinzips vorhanden ist, sich eliminieren lassen muß gemäß dem Relativitätsprinzip, welches ja bekanntlich eine Gleichberechtigung von Raum und Zeit in mathematischer Beziehung verlangt.

Um diese Gleichberechtigung von Raum und Zeit bei jedem Schritt unmittelbar in Evidenz zu setzen, empfahl es sich, bei der Aufstellung des Prinzips vierdimensionale Betrachtungen anzustellen und als Methode die vierdimensionale Vektoranalysis zu verwenden. Freilich bedurften die bisherigen Ansätze einer Vektoranalysis im vierdimensionalen Raum erst erheblicher Erweiterungen, ehe ein erfolgreiches Operieren mit dieser Methode möglich war.

Im ersten Teil der Arbeit ist deshalb ein umfangreiches,

auf den Lewisschen¹⁾ Ansätzen basierendes System der vierdimensionalen Vektoranalysis entwickelt worden. Die dabei angestellten Betrachtungen erwiesen sich später für die verwickelten Rechnungen im zweiten und dritten Teil als äußerst bequem.

Es erschien angebracht den Fall des Vakuums getrennt von dem allgemeinen Fall zu behandeln, wie dies im zweiten Teil der Arbeit geschehen ist. Hierdurch ergab sich nicht nur eine bessere Übersicht über das Wesen der Prinzipie und der Methode, sondern es wurden auch verwickelte Rechnungen vermieden, wie sie sonst für den Fall der ponderablen Körper anzustellen gewesen wären. Es wurden bei der Formulierung des Prinzips vierdimensionale Betrachtungen angestellt, welche den von Minkowski gemachten ähnlich sind. Planck hat in der zitierten Arbeit gezeigt, daß das von ihm „Wirkungsgröße“ benannte Zeitintegral über das Helmholtzsche kinetische Potential eine Invariante gegenüber Lorentztransformationen ist. Damit gleichbedeutend ist die Aussage, daß die Wirkungsgröße im vierdimensionalen Raum ein Skalar ist.

Das aufgestellte Prinzip geht nun von einer Lokalisierung der Wirkungsgröße im vierdimensionalen Raum aus und betrachtet die Änderung der in einem vierdimensionalen Bereich enthaltenen Wirkungsgröße, welche stattfindet, falls den Punkten dieses Bereiches eine von Ort zu Ort stetig variierende Verschiebung zuerteilt wird. Die für den Fall des Vakuums angesetzte Wirkungsgröße ist mit dem von Schwarzschild benutzten Integral identisch.

Bei der Verschiebung werden äußere Einwirkungen sowohl auf die vierdimensionalen als auch auf die dreidimensionalen Elementargebiete des betrachteten vierdimensionalen Bereiches zugelassen. Diese äußeren Einwirkungen bestehen einerseits aus der von den ponderomotorischen Kräften bei der Verschiebung der Raumkoordinaten geleisteten Arbeit, welche ja auch in dem Hamiltonschen Prinzip eine Rolle spielt. Dann aber tritt hier zu den äußeren Einwirkungen immer noch ein Glied hinzu, welches gleich dem Produkt ist aus der Variation der zeitlichen Koordinate und der zeitlichen Komponente der-

1) G. N. Lewis, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik. 7. p. 321 bis 347. 1910.

jenigen Viererkraft, welche als räumliche Komponenten die äußere ponderomotorische Kraft besitzt. Diese zeitliche Komponente der Viererkraft ist im allgemeinen Falle bis auf konstante Faktoren gleich der Summe aus der pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit und der entwickelten Wärme.

Die bei der Verschiebung der Punkte des betrachteten Bereiches eintretenden lokalen Variationen der Vektoren werden durch dem Relativitätsprinzip entsprechende Verallgemeinerungen der Helmholtzschen Festsetzungen gewonnen. Wird die zeitliche Komponente der Verschiebung gleich Null gesetzt, so gehen die benutzten Variationen der Vektoren in die von Helmholtz angewandten über. Auch wird das aufgestellte Prinzip in diesem Fall mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung identisch.

Aber gerade durch die vorgenommene Verallgemeinerung kommt in den Ausdruck für die ponderomotorische Kraft das wichtige Glied, die elektromagnetische Trägheitskraft, hinein.

Die Grundgleichungen für das Vakuum und die Divergenzbedingungen werden unabhängig von der betrachteten Koordinatenverschiebung durch Variation des elektromagnetischen Vektorpotentials bzw. des skalaren elektromagnetischen Potentials abgeleitet.

Es wird in diesem Teil weiter das von Schwarzschild¹⁾ aufgestellte und auch von Born²⁾ benutzte Prinzip nach der eingeschlagenen Methode behandelt, wobei sich die in diesen Arbeiten erhaltenen Resultate ergeben.

Aus den Oberflächenintegralen ergibt sich ein Ausdruck für den Druck der Strahlung auf bewegte Flächen und eine Gleichung, welche die Arbeit des Strahlungsdrucks und die entwickelte Wärme bestimmt.

Im dritten Teil der Arbeit wird nun versucht, die für das Vakuum erhaltenen Resultate auf den Fall der ponderablen Körper auszudehnen. Es wird dabei als Wirkungsgröße ein in naheliegendster und dem Relativitätsprinzip entsprechender Weise aus der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße verallgemeinerter Ausdruck angenommen und untersucht, zu welchen Resultaten diese Wirkungsgröße führt.

1) K. Schwarzschild, l. c.

2) M. Born, l. c.

Die Minkowskischen Grundgleichungen für ponderable Körper ergeben sich ohne große Schwierigkeiten. Dagegen aber kann der Ausdruck, der mit dieser Form der Wirkungsgröße für die ponderomotorische Kraft aus dem dynamischen Prinzip hervorgeht, nicht aufrecht erhalten werden, da er zu Folgerungen führt, welche unseren Erfahrungen im Falle ruhender ponderabler Körper widersprechen. Es gelingt zwar, wie weiter gezeigt wird, durch Aufnahme eines neuen Gliedes in das dynamische Prinzip einen Ausdruck herzuleiten, welcher mit dem Abrahamschen Kraftausdruck identisch ist. Indessen kann dieses abgeänderte Prinzip nicht recht befriedigen, da man von einer bestimmten Wirkungsgröße nicht mehr sprechen kann.

Es bleibt die Frage offen, ob der Grund für diese Unstimmigkeit in einer unzureichenden Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße zu suchen ist, oder etwa darin, daß es nicht zulässig ist, in dem dynamischen Prinzip die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität als konstante Größen anzusehen, daß bei diesen Größen vielmehr darauf Rücksicht genommen werden muß, daß sie doch im Sinne der Elektronentheorie nur als Mittelwerte zu betrachten sind.¹⁾

Als Maßsystem für die elektromagnetischen Größen ist das Heaviside-Lorentzsche²⁾ verwandt worden.

Zweiter Teil.

Die Elektrodynamik des Vakuums.

§ 1. Die Wirkungsgröße.

Es soll im folgenden die Bewegung der Elektrizität betrachtet werden wie das Strömen eines kontinuierlichen Mediums von der Raumdichte ρ , dessen Geschwindigkeitszustand angegeben wird durch den dreidimensionalen Vektor $\mathbf{v}$. Von atomistischen Vorstellungen der Ladung soll vollständig abgesehen werden.

1) Auf diese Möglichkeit hat mich Hr. Geh.-Rat Planck freundlichst aufmerksam gemacht.

2) H. A. Lorentz, l. c.

Die Raumdichte ϱ und den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ vereinigen wir mit der Lichtgeschwindigkeit c zu dem Vektor dritter Art P mit den Komponenten

$$(1) \quad P_{yuz} = \frac{\varrho v_x}{c}, \quad P_{zux} = \frac{\varrho v_y}{c}, \quad P_{uyx} = \frac{\varrho v_z}{c}, \quad P_{xyz} = i\varrho.$$

Diesen Vektor dritter Art können wir durch den Vektor erster Art P^* und den Einheitspseudoskalar h_{xyz} gemäß der Gleichung (I, 36) ersetzen, so daß wir haben

$$P = P^* h_{xyz}$$

und

$$(1a) \quad \begin{cases} P_x^* = P_{yuz} = \frac{\varrho v_x}{c}, & P_y^* = \frac{\varrho v_y}{c}, \\ P_z^* = \frac{\varrho v_z}{c}, & P_u^* = i\varrho. \end{cases}$$

Der Zustand des elektromagnetischen Feldes sei durch den Vektor zweiter Art $\mathfrak{M}$ angegeben. Wie bei M. Laue²⁾ seien die Komponenten von $\mathfrak{M}$:

$$(2) \quad \begin{cases} M_{yz} = \mathfrak{S}_x, & M_{zx} = \mathfrak{S}_y, & M_{xy} = \mathfrak{S}_z, \\ M_{xu} = -i\mathfrak{E}_x, & M_{yu} = -i\mathfrak{E}_y, & M_{zu} = -i\mathfrak{E}_z, \end{cases}$$

wofür auch kurz geschrieben werde

$$(2a) \quad \mathfrak{M} = (\mathfrak{S}, -i\mathfrak{E}).$$

Mit Born fassen wir das elektromagnetische Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das skalare elektromagnetische Potential φ zusammen zu dem Vektor

$$(3) \quad \Phi = \Phi_x h_x + \Phi_y h_y + \Phi_z h_z + \Phi_u h_u,$$

indem wir setzen

$$(3a) \quad \Phi_x = \mathfrak{A}_x, \quad \Phi_y = \mathfrak{A}_y, \quad \Phi_z = \mathfrak{A}_z, \quad \Phi_u = i\varphi.$$

1) Wenn die Integralform der Maxwell'schen Gleichungen (96 a) wie von Sommerfeld (Ann. d. Phys. **33**. p. 658 (24a). 1910) angegeben, in unserer Schreibweise nach (74 a) lautend

$$\int_{\sigma} f^* d\sigma = \int_S P dS,$$

beibehalten bleibt, muß P , da dS ein Vektor dritter Art ist und auf der linken Seite ein Skalar steht, als ein Vektor dritter Art angesehen werden.

2) M. Laue, „Das Relativitätsprinzip“ 1911. p. 78.

Alle diese angeführten Größen haben an jedem Ort und zu jeder Zeit bestimmte Werte.

Wenn wir also in unserem oben betrachteten vierdimensionalen Raume die Koordinaten x, y, z mit den Cartesischen Koordinaten des gewöhnlichen Raumes identifizieren und die vierte Koordinate in der Weise

$$(4) \quad u = i c t$$

mit der Zeit t , der Lichtgeschwindigkeit c und der Einheit des Imaginären i in Beziehung setzen, so können wir sagen, daß in jedem Punkt x, y, z, u unseres vierdimensionalen Raumes die eben definierten Größen bestimmte Werte haben.

Nach diesen Bemerkungen hat dann das Integral

$$(5) \quad W = \int_{\Sigma} d\Sigma \left(-\frac{1}{2} (\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}^*) + (P \times \Phi) \right)$$

erstreckt über einen beliebigen, im vierdimensionalen Raum festliegenden Bereich Σ , wohldefinierten Sinn.

Dieses Integral, das wir als die im Bereich Σ enthaltene Wirkungsgröße¹⁾ bezeichnen, legen wir unseren Betrachtungen zugrunde.

Aus der mit (5) gleichwertigen Form der Wirkungsgröße

$$(5') \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi \right)$$

erkennen wir, daß W im vierdimensionalen Raum ein gewöhnlicher Skalar ist, und daher invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems x, y, z, u , d. h. gegen Lorentztransformationen ist. Diese Bedingung muß nach Planck¹⁾ für die Wirkungsgröße erfüllt sein.

Da gemäß der Definitionen von $\mathfrak{M}$, P^* und Φ gilt

$$(6) \quad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{S}^2 - \mathfrak{G}^2,$$

$$(7) \quad P^* \Phi = \frac{e v_x}{c} \mathfrak{M}_x + \frac{e v_y}{c} \mathfrak{M}_y + \frac{e v_z}{c} \mathfrak{M}_z - e \varphi,$$

so erkennt man leicht die Übereinstimmung unseres Ausdrucks mit dem von Schwarzschild²⁾ und Born³⁾ benutzten Integrale, nur daß wir hier das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

1) M. Planck, l. c.

2) K. Schwarzschild, l. c.

3) M. Born, l. c.

§ 2. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum.

Die beiden Vektoren $\mathfrak{M}$ und Φ setzen wir miteinander in Beziehung durch die Vektorgleichung

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi,$$

welche in der Schreibweise der gewöhnlichen Vektoranalysis lautet

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S} = \text{curl } \mathfrak{A} \\ \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Dieser Ansatz für $\mathfrak{M}$ ermöglicht eine Ersetzung von $\mathfrak{M}$ durch Φ in dem Ausdruck für die Wirkungsgröße.

Nunmehr stellen wir folgendes Prinzip auf:

Es soll die erste Variation der Wirkungsgröße

$$(9) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} (\diamond \times \Phi)^2 + P^* \Phi \right\}$$

des Bereiches Σ verschwinden.

Der Vektor P soll dabei als eine im Bereich Σ bekannte Funktion von x, y, z, u angesehen werden.

Die Komponenten von Φ sind dagegen die gesuchten Funktionen von x, y, z, u , welche W zu einem Extremum machen sollen.

Führen wir nun die Variationen aus, so erhalten wir, wenn wir nur die Glieder, welche $\delta \Phi_x$ enthalten, ausführlich hinschreiben

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int dx dy dz du \left\{ \left(-\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad + \left(-\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial u} \right) \left(-\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) - P^*_x \delta \Phi_x \Big\} \\ &\quad + ((\delta \Phi_y)) + ((\delta \Phi_z)) + ((\delta \Phi_u)) \\ &= - \int dx dy dz du \left\{ -M_{xy} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} - M_{xz} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. - M_{xu} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} - P^*_x \delta \Phi_x \right\} \\ &\quad + ((\delta \Phi_y)) + \dots \end{aligned}$$

Nach dem vierdimensionalen Analogon zur Greenschen Umformung eines Raumintegrals können wir dafür schreiben:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = & - \int_{\Sigma} dx dy dz du \left(\delta \Phi_x \left\{ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xu}}{\partial u} - P_x^* \right\} \right. \\ & + \delta \Phi_y \left\{ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial u} - P_y^* \right\} \\ & + \dots \Big) \\ & + \int_S dS (\delta \Phi_x \{ M_{xy} \cos ny + M_{xz} \cos nz + M_{xu} \cos nu \} \\ & + \delta \Phi_y \{ M_{yx} \cos nx + M_{yz} \cos nz + M_{yu} \cos nu \} \\ & + \dots), \end{aligned} \right.$$

wo S die dreidimensionale Begrenzung unseres Bereiches bedeutet und n die eindeutig bestimmte nach außen gerichtete Normale des Elements dS der Oberfläche ist.

Behandeln wir die Größen $\delta \Phi_x$, $\delta \Phi_y$, $\delta \Phi_z$, $\delta \Phi_u$ als voneinander unabhängig, wie das Schwarzschild und Born tun, so erhalten wir aus dem über den Bereich Σ erstreckten Raumintegral die Gleichungen

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xu}}{\partial u} = P_x^*, \\ & \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial u} = P_y^*, \\ & \frac{\partial M_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial u} = P_z^*, \\ & \frac{\partial M_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial M_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial z} = P_u^*, \end{aligned} \right.$$

wofür wir auch kurz schreiben können

$$(11a) \quad \diamond \mathfrak{M} = P^*.$$

Die Gleichungen (11) sind nun in der Tat die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Wirkungen bewegter Elektronen im Vakuum in der Minkowskischen symmetrischen Bezeichnungsweise.

Der Bedeutung von $\mathfrak{M}$ und P gemäß sind diese identisch mit den in gewöhnlicher Weise geschriebenen Gleichungen

$$(11b) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{curl } \mathfrak{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}, \\ \text{div } \mathfrak{E} &= \varrho. \end{aligned} \right.$$

Das andere System von Grundgleichungen ergibt sich bereits aus dem Ansatz

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi.$$

Da nämlich für jeden Vektor erster Art α nach (I, 60)

$$(I, 60) \quad \diamond \times (\diamond \times \alpha) \equiv \alpha$$

gilt, so folgt

$$(12) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0$$

oder in Komponenten geschrieben nach (50).

$$(12 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{uz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial z} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{zu}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ux}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{uy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

welche Gleichungen der Bedeutung von $\mathfrak{M}$ nach mit dem zweiten System Maxwell-Lorentzscher Grundgleichungen

$$(12 b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -c \operatorname{curl} \mathfrak{E} \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \end{array} \right.$$

identisch sind.

Die ermittelten Gleichungen genügen, um $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zu bestimmen.

Die bekannten Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale ergeben sich aus den oben erhaltenen Gleichungen (11) vermittelt der aus (I, 38) für $\alpha = \mathfrak{b} = \diamond$, $c = \Phi$ hergeleiteten Gleichung

$$\diamond (\diamond \times \Phi) = \diamond (\diamond \Phi) - \diamond^2 \Phi,$$

falls noch die Bedingung

$$(13 a) \quad \diamond \Phi = 0$$

oder anders geschrieben

$$(13) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

hinzugenommen wird. Diese Gleichung wird ja auch in der gewöhnlichen Theorie für die Ableitung der Potentialdifferentialgleichungen angenommen.¹⁾

1) Vgl. M. Abraham, Theorie d. Elektr. II. p. 37.

In der Tat ergibt die obige Gleichung bei Annahme von (13 a) und Beachtung von

$$(11 \text{ a}) \quad \diamond (\diamond \times \Phi) = \diamond \mathfrak{M} = P^*$$

die Beziehung

$$(14) \quad \diamond^2 \Phi = -P^*.$$

Diese Gleichung ist, weil

$$\diamond^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$$

identisch mit den Differentialgleichungen für die retardierten Potentiale.¹⁾

Nimmt man die Bedingung

$$(13 \text{ a}) \quad \diamond \Phi = 0$$

von vornherein mit in das Prinzip auf, so erhält man aus dem sich dann ergebenden isoperimetrischen Variationsproblem unmittelbar die Differentialgleichung (17) für die Potentiale.¹⁾

Die Grundgleichungen (11) sind im übrigen nichts anderes als die Eulerschen Differentialgleichungen des gewöhnlichen Variationsproblems in vier Variablen, welches unserem Prinzip zugrunde liegt.

§ 3. Die Gleichungen für die Begrenzung.

Schwarzschild und Born verlangen in ihren Prinzipien, daß die Variationen von Φ an der Begrenzung der Integrationsbereiche verschwinden.

In unserem Prinzip ist diese einschränkende Bedingung aufgehoben. Wir müssen daher das Integral über die Begrenzung in (10) für sich gleich Null setzen und erhalten so die Gleichung

$$(15) \quad (n \mathfrak{M}) = 0,$$

wobei n der Vektor erster Art von der Richtung der Normale²⁾ des Oberflächenelements und der Einheit der Länge ist. Seine Komponenten sind daher die cos der Winkel zwischen der Normalen und den Koordinatenachsen.

Die Bedingung (15) können wir auf eine von Herglotz angegebene Weise leicht in die gewöhnliche Ausdrucksweise übersetzen.

1) Vgl. Zemplén, Math. Ann. **62**, p. 568—581. 1906.

2) Es ist stets die nach außen gerichtete Normale gemeint.

Es sei im gewöhnlichen Raum

$$(16) \quad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

die Begrenzung des Vakuums, in welchem die elektromagnetischen Vorgänge stattfinden. ξ, η, ζ seien hierbei die Koordinaten der Teilchen der Begrenzung zu irgend einer Zeit t_0 . Die Koordinaten derselben Teilchen zu der Zeit t , welche x, y, z sein mögen, sind dann gewisse Funktionen von ξ, η, ζ . Umgekehrt werden dann auch ξ, η, ζ Funktionen von x, y, z, u sein, so daß wir schreiben können:

$$(16a) \quad \psi(\xi, \eta, \zeta) = f(x, y, z, u).$$

Falls nun ν die Normale der Begrenzung ist, und v_ν die Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens derselben nach dieser Normalen bedeutet, gilt die Beziehung¹⁾

$$(17) \quad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial u} = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z : \frac{i v_\nu}{c}.$$

Wenn wir nunmehr annehmen, daß unser Bereich Σ von der Fläche

$$f(x, y, z, u) = 0$$

eingeschlossen wird, so haben wir

$$(18) \quad \begin{cases} n_x : n_y : n_z : n_u = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z : \frac{i v_\nu}{c} \\ \quad \quad \quad = v_x : v_y : v_z : \frac{i v_\nu}{c}. \end{cases}$$

Infolge dieser Beziehung können wir die Gleichung

$$(15) \quad (\mathfrak{n} \mathfrak{M}) = 0$$

ersetzen durch die folgenden:

$$(15a) \quad \begin{cases} [\mathfrak{N} \nu] = \frac{v_\nu}{c} \mathfrak{E} \\ \quad \mathfrak{E}_\nu = 0. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen ist, wie unmittelbar zu sehen, eine Folge der vorhergehenden.

Falls die Fläche

$$f(x, y, z, u) = 0$$

nicht die Begrenzung des Bereichs ist, in welchem wir nur elektromagnetische Vorgänge annehmen, sondern nur eine Un-

1) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 36. p. 509. 1911.

stetigkeitsfläche der das Feld bestimmenden Größen ist, so ergibt die Anwendung unseres Prinzips auf einen Bereich Σ' , welcher die Fläche $f = 0$ einschließt, für $f \geq 0$ die Gültigkeit der Grundgleichungen (11), (12), für die Fläche $f = 0$ selber aber die sogenannten „Kompatibilitätsbedingungen“. Diese sind mit den obigen Bedingungen gleichlautend, nur müssen statt der Vektoren die Sprünge derselben an der Fläche $f = 0$ gesetzt werden.¹⁾

§ 4. Das dynamische Prinzip.

Wir haben oben in einem Prinzip die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum dadurch ermittelt, daß wir mit dem Vektor Φ , welcher das elektromagnetische Feld bestimmt, Variationen vorgenommen haben.

Wenn wir nun etwas über die ponderomotorischen Kräfte erfahren wollen, so müssen wir, da diese ja doch nur bei Änderungen von Bewegungszuständen in Erscheinung treten, Variationen der Vektoren in Betracht ziehen, die mit einer Änderung des Bewegungszustandes der Elektronen zusammenhängen.

Die Lage und der Bewegungszustand eines Punktes ist nun nach Minkowski²⁾ für alle Zeiten bestimmt durch Angabe der Weltlinie des Punktes im vierdimensionalen Raum. Wir werden demgemäß Variationen der Vektoren zu betrachten haben, welche mit einer Verschiebung der Weltlinien Zusammenhang haben.

Ähnlich wie Minkowski³⁾ denken wir uns die Weltlinien bestehend aus substantiellen Punkten und erteilen nun den Punkten unseres Bereichs Σ , der ja überall dicht von Weltlinien durchsetzt wird, und auch denen seiner Begrenzung S eine unendlich kleine von Punkt zu Punkt stetig variierende Verschiebung, die wir durch den Vektor δq angeben wollen.

Hierdurch werden die Vektoren an jeder Stelle des Be-

1) Vgl. G. Zemplén, l. c. — L. Silberstein, Ann. d. Phys. 26 p. 751. 1908; 31. p. 436. 1910. — A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 31. p. 443. 1910.

2) H. Minkowski, „Raum und Zeit“, Leipzig, B. G. Teubner.

3) H. Minkowski, l. c. p. 49.

reichs gewisse Änderungen erfahren. Die Wirkungsgröße erleide dabei die Änderung

$$\delta W = \delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi \right\}.$$

Wir wollen in unserem Prinzip auch äußere Wirkungen in Betracht ziehen und denken uns auf jeden inneren Punkt unseres Bereichs die Viererkraft $\mathfrak{F}^1$) wirkend. Bei der Verschiebung wird von dieser Kraft, im übertragenen Sinne, die Arbeit

$$\int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q = \int_{\Sigma} dx dy dz du \{ F_x \delta q_x + F_y \delta q_y + F_z \delta q_z + F_u \delta q_u \}$$

geleistet. Diesen Ausdruck fügen wir zu δW hinzu.

Dem Umstande entsprechend, daß wir auch den Punkten der Oberfläche Verschiebungen erteilen, fügen wir ein diesem Ausdruck für die Arbeit der Viererkraft entsprechendes Oberflächenintegral

$$\int_S dS \mathfrak{P} \delta q = \int_S dS \{ \mathfrak{P}_x \delta q_x + \mathfrak{P}_y \delta q_y + \mathfrak{P}_z \delta q_z + \mathfrak{P}_u \delta q_u \}$$

hinzu. Hierbei ist $\mathfrak{P}$ die von außen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft.

Schließlich muß noch ein Glied hinzugefügt werden, welches dem Umstande Rechnung trägt, daß durch die Verschiebung der Oberfläche Wirkungsgröße in den Raum Σ eintritt, nämlich

$$\int_S dS \{ n(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi) \delta q \}.$$

Unser Prinzip verlangt nun die Gültigkeit der Gleichung

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi \right\} + \int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q \\ & + \int_S dS \mathfrak{P} \delta q + \int_S dS \{ n(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi) \delta q \} = 0. \end{aligned} \right.$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 770; M. Laue, l. c. p. 79.

Die enge Beziehung zum gewöhnlichen Hamiltonschen Prinzip ist erkennbar. Wir haben aber hier völlige Symmetrie zwischen den Raum- und Zeitkoordinaten, während beim Hamiltonschen Prinzip die Zeitkoordinate eine bevorzugte Rolle spielt.

§ 5. Die Variationen der Vektoren.

Die Ermittlung der Variationen der Vektoren nehmen wir in einer der Helmholtzschen analogen Weise vor. Wir wollen nämlich annehmen, daß bei der Verschiebung der Punkte unseres Bereichs und seiner Begrenzung die substantiellen Änderungen der Ausdrücke

$$\Phi ds, \quad \mathfrak{M} d\sigma, \quad P dS$$

verschwinden.

Die substantiellen Änderungen dieser Vektorprodukte haben wir in den Kapiteln über die Vektoranalysis nun ganz allgemein für eine Verrückung der Elemente ds , $d\sigma$, dS ermittelt.

Nach (I, 82) haben wir für die substantielle Änderung von $P dS$

$$\delta(P dS) = dS\{\delta_0 P - \delta q(\diamond \times P) + \diamond \times (P \delta q)\}.$$

Die Bedingung

$$(20) \quad \delta(P dS) = 0$$

liefert daher für die lokale Änderung von P

$$(21) \quad \delta_0 P = \delta q(\diamond \times P) - \diamond \times (P \delta q).$$

Da nach dem Gauss'schen Satze für einen geschlossenen Raum

$$\int_s P dS = \int_\Sigma d\Sigma(\diamond \times P)^1)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{q v}{c} = 0$$

geschrieben werden kann:

$$\diamond \times P = 0.$$

1) Vgl. I. Teil der Diss.

so erkennt man, daß wir durch unsere Forderung

$$\delta(P dS) = 0$$

den Satz von der Erhaltung der Elektrizität für unsere Variation als gültig annehmen.

Die auf diesem Wege ermittelte lokale Variation von P stimmt übrigens genau mit der von Minkowski-Born¹⁾ auf gänzlich verschiedenem Wege aufgefundenen überein. Man setze nur in der Formel (11) der unten zitierten Arbeit $\delta q_x \delta q_y \dots \delta q_u$ statt $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{u}$, δ_0 statt δ , dann erkennt man auf Grund unserer Bezeichnungen die genaue Übereinstimmung.

Ganz entsprechend ermitteln wir die lokale Variation von $\mathfrak{M}$, indem wir analog der Helmholtzschen Festsetzung verlangen:

$$(22) \quad \delta(\mathfrak{M}^* d\sigma) = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$\delta(\mathfrak{E}_x dy dz + \mathfrak{E}_y dz dx + \mathfrak{E}_z dx dy - c dt(\mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz)) = 0.$$

Wir erhalten so nach (I, 79) für die lokale Variation von $\mathfrak{M}$:

$$(23) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = -\delta q (\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q).$$

Ebenfalls in der vierdimensionalen Analogie zu der Helmholtzschen Festsetzung über das Vektorpotential²⁾ verlangen wir

$$(24) \quad \delta(\Phi ds) = 0,$$

und erhalten nach (I, 77) für die lokale Variation von Φ

$$(25) \quad \delta_0 \Phi = \delta q (\diamond \times \Phi) - \diamond (\Phi \delta q).$$

Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Variationen und den von Helmholtz benutzten besteht darin, daß wir hier eine Verschiebung im vierdimensionalen Raum vorgenommen haben.

Die Glieder, welche durch die Variation der zeitlichen Komponente der Verschiebung zu dem Ausdruck für die pon-

1) Minkowski-Born, Die Grundgleichungen vom Standpunkte der Elektronentheorie; als Sonderabdruck erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig, p. 69.

2) Vgl. H. Helmholtz, l. c.

deromotorische Kraft hinzukommen, sind aber gerade diejenigen, welche den Maxwell-Hertzschen Kraftausdruck zu dem Lorentzschen ergänzen.

Dies zeigt sich, wenn wir jetzt einmal überall die Variation der zeitlichen Komponente der Verschiebung gleich Null setzen. Wir erhalten dann, wenn wir für den Augenblick unter δq den dreidimensionalen Vektor mit den Komponenten δq_x , δq_y , δq_z verstehen, nach (23) aus den ersten drei Komponenten von $\delta_0 \mathfrak{M}^*$

$$\delta_0 \mathfrak{E} = -\delta q \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{curl} [\delta q \mathfrak{E}].$$

Diese Variation der elektrischen Feldstärke stimmt genau mit der von Helmholtz angegebenen überein.

Aus den drei letzten Komponenten von $\delta_0 \mathfrak{M}^*$ bekommen wir für die Variation der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{S}$

$$\delta_0 \mathfrak{S} = -\operatorname{grad} (\delta q \mathfrak{S}) + [\delta q, \operatorname{curl} \mathfrak{S}].$$

Schwarzschild hat in seinem dynamischen Prinzip, welches wir mit verändertem Vorzeichen schreiben wollen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int dx dy dz \left\{ \delta_0 \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{S}^2) + \frac{e}{c} v \mathfrak{A} - \varrho \varphi + \mathfrak{R} \delta q \right\} = 0,$$

nur ϱ und v variiert, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ dagegen unvariiert gelassen. Durch seine spezielle Variation erhält er genau den Lorentzschen Kraftansatz

$$\varrho \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{S} \right] \right).$$

Gegen diese spezielle Wahl der Variation läßt sich nichts einwenden, da ja die festen Bedingungen durchaus willkürlich beschränkt werden können. Wenn man jedoch den ersten Teil $\frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{S}^2)$ auch variiert, wie das Helmholtz ebenfalls getan hat, so erhält man, wie durch Einsetzen von $\delta_0 \mathfrak{E}$ und $\delta_0 \mathfrak{S}$, und Vornahme der nötigen partiellen Integrationen zu erkennen ist, als Koeffizient von δq_x :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{S}_x^2 - \mathfrak{S}_y^2 - \mathfrak{S}_z^2) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_y) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_z) \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke für die anderen Komponenten.

Wir bekommen daher durch die vorgenommene Spezialisierung unserer allgemeinen Variationen die Maxwell-Hertz'sche Darstellung der ponderomotorischen Kraft.

Dieser Kraftausdruck unterscheidet sich bekanntlich von dem Lorentz'schen durch das Glied

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{S}].$$

Wir werden unten sehen, daß die Anwendung unserer allgemeinen Variation gerade dieses, in prinzipieller Hinsicht äußerst wichtige Glied in dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft ergibt.

§ 6. Der Lorentz'sche Kraftansatz.

Wie Schwarzschild in der zitierten Arbeit gezeigt hat, läßt sich der Lorentz'sche Kraftausdruck durch Variation der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ aus einem Integral herleiten, welches in unserer Schreibweise lautet:

$$- \int dx dy dz du \delta_0 (P^* \Phi) + \int dx dy dz du \mathfrak{R} \delta \mathfrak{q} = 0,$$

wobei wir wieder unter $\delta \mathfrak{q}$ und auch unter $\mathfrak{R}$ vierdimensionale Vektoren erster Art verstehen wollen.

Die Potentiale $\mathfrak{A}$, φ bleiben dabei unverändert.

Born hat aus demselben Integral in einer Arbeit¹⁾, in der es ihm hauptsächlich darauf ankam, eine befriedigende Einwirkung der trägen Masse des Elektrons zu bringen, ebenfalls den Lorentz'schen Kraftansatz abgeleitet. Da er vierdimensionale Betrachtungen angestellt hat, erhält er durch seine Variation noch eine vierte, der Zeitkoordinate entsprechende Gleichung, welche die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte angibt. Seine Methode entspricht der in der Hydrodynamik als Lagrange'sche bezeichneten.

Es sollen nun in diesem Paragraphen die Resultate dieser Autoren auf einem anderen Wege durch rein lokale Variation aus demselben Integral hergeleitet werden und zwar gelingt dies durch alleinige Variation von P , in welchem Vektor ja ϱ und $\mathfrak{v}$ zusammengefaßt sind.

1) M. Born, Ann. d. Phys. 28. p. 571. 1909.

Da wir jedoch in unserem allgemeineren Prinzip (19) dasselbe Integral, nur mit anderem Vorzeichen, nämlich

$$+ \int_{\Sigma} dx dy dz du (P^* \Phi),$$

zu variieren haben, so wollen wir hier, um die Rechnungen später ohne weiteres benutzen zu können, die Variation von P in dem mit positiven Vorzeichen versehenen Integral vornehmen.

Führen wir bei konstant gehaltenen Φ den Wert (21) für $\delta_0 P$ ein, so bekommen wir die folgenden δq_x enthaltenden Glieder:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dx dy dz du \Phi \delta_0 P^* &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \Phi_x \left[-\frac{\partial \delta q_r P^*_y}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \delta q_x P^*_z}{\partial z} + \frac{\partial \delta q_x P^*_u}{\partial u} \right] \right. \\ &\quad - \Phi_y \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_y) - \Phi_z \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_z) \\ &\quad - \Phi_u \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_u) + ((\delta q_y)) + \\ &\quad \left. + ((\delta q_u)) \right\}. \end{aligned}$$

Werden die nötigen partiellen Integrationen ausgeführt, so erhalten wir:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Sigma} dx dy dz du \Phi \delta_0 P^* \\ &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \delta q_x \left[P^*_y \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P^*_z \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \right) + P^*_u \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial u} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta q_y [\dots] + \dots + \delta q_u [\dots] \right\} \\ &\quad + \int_S dS \left\{ \delta q_x [\Phi_x (P^*_x \cos nx + P^*_y \cos ny + P^*_z \cos nz \right. \\ &\quad \left. + P^*_u \cos nu) - (\Phi_x P^*_x + \Phi_y P^*_y + \Phi_z P^*_z \right. \\ &\quad \left. + \Phi_u P^*_u) \cos nx] + \delta q_y [\dots] + \dots \right\} \\ &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \delta q P^* (\diamond \times \Phi) \\ &\quad + \int_S dS \delta q \{ \Phi (P^* n) - n (\Phi P^*) \}. \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten daher aus dem am Eingang dieses Paragraphen formulierten Schwarzschild-Bornschen Prinzip durch alleinige Berücksichtigung der Integrale über Σ in der Tat den Lorentz-schen Kraftansatz, denn es gilt, wie leicht zu erkennen:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = (P^*(\diamond \times \Phi))_{x,y,z} = (P^*\mathfrak{M})_{x,y,z} = \varrho \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \mathfrak{E} \right] \right)_{x,y,z} \\ \mathfrak{R}_u = (P^*\mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} \varrho (\mathfrak{E} v). \end{cases}$$

Die ersten drei Komponenten stellen nun den auf die Volumeneinheit bezogenen Lorentzschen Kraftansatz dar. Die letzte Komponente ist aber gleich der mit i/c multiplizierten an der bewegten Elektrizität pro Zeit- und Volumeneinheit geleisteten Arbeit.

§ 7. Die Viererkraft als Divergenz eines Welttensor.

Nunmehr heben wir die speziellen Voraussetzungen des vorigen Paragraphen auf und wenden das in § 20 formulierte Prinzip (19) in seiner ganzen Allgemeinheit an. Die zu benutzenden lokalen Variationen haben wir bereits in § 5 allgemein ermittelt.

Wenn wir zunächst den zweiten Teil der Wirkungsgröße $+ P^* \Phi$ vollständig variieren, so haben wir noch die Variation von Φ bei konstant gehaltenem P^* auszuführen.

Da nach (25):

$$\delta_0 \Phi = \delta q (\diamond \times \Phi) - \diamond (\Phi \delta q),$$

so erhalten wir, falls nur die δq_x enthaltenden Glieder hingeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int dx dy dz du \{ & + P^*_y \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{yx} + P^*_z \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{zx} \\ & + P^*_u \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{ux} \\ & - P^*_x \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_x \delta q_x) - P^*_y \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_x \delta q_x) \\ & - P^*_z \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_x \delta q_x) - P^*_u \frac{\partial}{\partial u} (\Phi_x \delta q_x) + ((\delta q_y)) + \dots \} \end{aligned}$$

Hieraus aber ergibt sich durch partielle Integration und Beachtung, daß infolge der Kontinuitätsgleichung der Elektrizität

$$\diamond \times P \equiv \diamond P^* = 0$$

gilt,

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Sigma} dx dy dz du \{ -\delta q_x [P^*_y (\diamond \times \Phi)_{xy} + P^*_z (\diamond \times \Phi)_{xz} \\ & \quad + P^*_u (\diamond \times \Phi)_{xu}] \\ & \quad + \delta q_y [\quad] + \dots \} \\ & + \int_S dS \{ -\delta q_x [\Phi_x (P^*_x \cos nx + P^*_y \cos ny + P^*_z \cos nz \\ & \quad + P^*_u \cos nu)] \\ & \quad - \delta q_y [\quad] + \dots \} \\ & = \int_{\Sigma} dx dy dz du (-\delta q (P^* \mathfrak{M})) + \int_S dS (-\delta q \Phi (P^* n)). \end{aligned} \right.$$

Man erkennt daher, wenn man diese Ergebnisse mit den des vorigen Paragraphen vereinigt, daß bei der vollständigen Variation des zweiten Teils der Wirkungsgröße nur das Flächenintegral

$$(29) \quad - \int_S dS \delta q n (P^* \Phi)$$

übrig bleibt. Dieses Flächenintegral aber wird gerade kompensiert durch den zweiten Teil des letzten Flächenintegrals in unseren Prinzip (19).

Variieren wir nunmehr den ersten Teil der Wirkungsgröße $W - \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2$, indem wir setzen:

$$(23) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = -\delta q (\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q),$$

also z. B. für die Komponente $M_{yz} = M^*_{xu}$:

$$(23a) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0 M_{yz} = & -\delta q_y \left(\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial u} \right) \\ & + \delta q_z \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial M_{uy}}{\partial u} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy} + \delta q_y M_{xz} + \delta q_z M_{yx}) \\ & - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_y M_{zu} + \delta q_z M_{uy} + \delta q_u M_{yz}), \end{aligned} \right.$$

so erhalten wir, wenn wir nur die δq_x enthaltenden Glieder hinschreiben:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma} dx dy dz du \{ & M_{yz} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy}) - M_{yu} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{yu}) \\
 & + M_{zu} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{uz}) \\
 & - \delta q_x M_{xy} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial u} \right) \\
 & + M_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy}) - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_x M_{yu}) \right) \\
 & + \delta q_x M_{zx} \left(\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial u} \right) \\
 & + M_{zx} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta q_x M_{zy}) - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_x M_{zu}) \right) \\
 & - \delta q_x M_{xu} \left(\frac{\partial M_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial x} \right) \\
 & + M_{xu} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta q_x M_{yu}) - \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zu}) \right) \\
 & + ((\delta q_y)) + \dots \}
 \end{aligned}$$

Führen wir die nötigen partiellen Integrationen aus, so bekommen wir, falls nun das Prinzip mit den ausgeführten Variationen vollständig hingeschrieben wird,

$$(30) \left\{ \begin{aligned}
 & \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ - \delta q_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} (M_{yz}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2 - M_{xy}^2 - M_{zx}^2 - M_{xu}^2) \right. \right. \right. \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} (M_{zx} M_{yz} - M_{xu} M_{yu}) \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x} (M_{xy} M_{yz} - M_{xu} M_{zu}) \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial u} (M_{xy} M_{yu} - M_{zx} M_{zu}) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \delta q_y [\dots] - \dots \right\} \\
 & + \int_S dS \delta q_x \{ (M_{yz}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2) \cos nx + (M_{zx} M_{yz} \\
 & \quad - M_{xu} M_{yu}) \cos ny + (M_{xy} M_{yz} - M_{xu} M_{zu}) \\
 & \quad \cos nz + (M_{xy} M_{yu} - M_{zx} M_{zu}) \cos nu \} \\
 & \quad + \delta q_y \{ \dots \} + \dots \\
 & + \int_{\Sigma} dx dy dz du (\mathfrak{F}_x \delta q_x + \dots) + \int_S dS \{ \delta q_x \mathfrak{F}_x + \dots \} \\
 & \quad + \int_S dS \{ \cos nx (-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2) + \dots \} = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Nunmehr sind die für unser Prinzip nötigen Variationen vollständig ausgeführt.

Die Forderung unseres Prinzips liefert daher zunächst aus den Integralen über Σ die Gleichungen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ F_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ F_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ F_u = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}. \end{array} \right.$$

Hierbei haben die Größen $X_x, X_y \dots U_z, U_u$ in der gewöhnlichen Schreibweise die Werte:

$$(32a) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_x^2 - \mathfrak{S}_y^2 - \mathfrak{S}_z^2 + \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \\ Y_x = \frac{1}{2}(-\mathfrak{S}_x^2 + \mathfrak{S}_y^2 - \mathfrak{S}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \\ Z_x = \frac{1}{2}(-\mathfrak{S}_x^2 - \mathfrak{S}_y^2 + \mathfrak{S}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ U_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_x^2 + \mathfrak{S}_y^2 + \mathfrak{S}_z^2 + \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \end{array} \right.$$

$$(32b) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_y = Y_x = \mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y, \\ X_z = Z_x = \mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_z + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z, \\ Y_z = Z_y = \mathfrak{S}_y \mathfrak{S}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \end{array} \right.$$

$$(32c) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = X_u = -i(\mathfrak{E}_y \mathfrak{S}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{S}_y), \\ U_y = Y_u = -i(\mathfrak{E}_z \mathfrak{S}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{S}_z), \\ U_z = Z_u = -i(\mathfrak{E}_x \mathfrak{S}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{S}_x). \end{array} \right.$$

Wir haben also in (31) die bekannte Darstellung der ponderomotorischen Kraft durch die Maxwellschen Spannungen und die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Die Größen $X_x, X_y \dots U_z, U_u$ sind die Komponenten des von Laue¹⁾ mit

$$(32) \quad T = [\mathfrak{M} \mathfrak{M}]$$

bezeichneten Welttensors, jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. Wir können also, wenn wir den Begriff der Divergenz eines Welttensors von Laue übernehmen, für die Gleichungen (31) schreiben:

$$(31a) \quad \mathfrak{F} = -\Delta i \nu T.$$

1) M. Laue, l. c. p. 82.

Mit der Ermittlung dieses Ausdruckes für die Viererkraft haben wir nun aber die ganze Elektrodynamik des Vakuums aus unseren Prinzip hergeleitet. Denn, wie Laue in seinem Buch ausführlich gezeigt hat¹⁾, enthalten die vier Gleichungen:

$$(11a) \quad \diamond \mathfrak{M} = P^*,$$

$$(12) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0,$$

$$(31a) \quad \mathfrak{F} = - \operatorname{Div} T,$$

$$(32) \quad T = [[\mathfrak{M} \mathfrak{M}]]$$

die ganze atomistische Elektrodynamik einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

§ 8. Der Strahlungsdruck auf bewegte Flächen.

Unser Prinzip verlangt ferner das Verschwinden der Integrale über die Begrenzung S . Fassen wir die Integrale über S , die im Prinzip selber vorkommen, zusammen mit den durch die partiellen Integrationen entstandenen, so erhalten wir aus den Gliedern mit δq_x die Gleichung:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{P}_x = & \frac{1}{2}(M_{yz}^2 - M_{zx}^2 - M_{xy}^2 - M_{xu}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2) \cos nx \\ & + (M_{zx} M_{yz} - M_{xu} M_{yu}) \cos ny \\ & + (M_{xy} M_{yz} - M_{xu} M_{zu}) \cos nz \\ & + (M_{xy} M_{yu} - M_{zx} M_{zu}) \cos nu \end{aligned}$$

oder wenn wir die Bezeichnungen (32 a, b, c) des vorigen Paragraphen wieder aufnehmen:

$$-\mathfrak{P}_x = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz + X_u \cos nu.$$

Desgleichen ergeben die Koeffizienten von δq_y , δq_z , δq_u :

$$(33) \quad \begin{cases} -\mathfrak{P}_y = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz + Y_u \cos nu, \\ -\mathfrak{P}_z = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz + Z_u \cos nu, \\ -\mathfrak{P}_u = U_x \cos nx + U_y \cos ny + U_z \cos nz + U_u \cos nu. \end{cases}$$

Da $X_x, X_y, \dots, U_u$ die Komponenten eines Welttensors und $\cos nx, \cos ny, \dots, \cos nu$ die Komponenten eines Vektors erster Art sind, so folgt aus der Definition des Welttensors²⁾, daß

1) M. Laue, l. c. p. 88.

2) M. Laue, l. c. p. 73.

$\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z, \mathfrak{P}_u$ als die Komponenten eines Vierervektors anzusehen sind.

Wir haben also in dem Vektor $\mathfrak{P}$ ein vollständiges Analogon zu der Flächenkraft im gewöhnlichen Raume.

Wir kehren nun auf dieselbe Weise wie es bereits im § 3 geschehen ist, zu dem gewöhnlichen Raume zurück. Es gilt, falls ν die Normale des Flächenelements der Begrenzung im gewöhnlichen Raume und $\mathfrak{v}_\nu$ die Komponente der Geschwindigkeit des Flächenelements nach dieser Normalen ist, welche wie immer nach außen gerichtet ist:

$$(18) \quad \cos nx : \cos ny : \cos nz : \cos nu = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z : \frac{i \mathfrak{v}_\nu}{c},$$

also:

$$- \mathfrak{P}_x = X_x \cos \nu x + X_y \cos \nu y + X_z \cos \nu z + \frac{\mathfrak{v}_\nu}{c} i X_u$$

.

Wir setzen nun:

$$(33a) \quad \mathfrak{T} = - \mathfrak{P}$$

und nehmen an, daß das Prinzip von der actio und reactio im vierdimensionalen Raume gilt. Dieses Prinzip ist ja bekanntlich für die Lorentzsche Elektrodynamik im gewöhnlichen Raum nicht gültig.

Nach dieser Annahme ist dann $\mathfrak{T}$ die von innen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft, und wir erhalten für $\mathfrak{T}$ nach dem obigen:

$$T_{x, y, z} = \left\{ \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} \nu + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H} \nu - \frac{1}{2} \nu (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{\mathfrak{v}_\nu}{c} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \right\}_{x, y, z},$$

$$T_u = \frac{i}{c} \left\{ -c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_\nu + \mathfrak{v}_\nu \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \right\}.$$

Da wir Kräfte und Spannungen mechanisch-elastischer Art völlig ausgeschlossen haben, so kann der durch $\mathfrak{T}$ bestimmte Druck auf die Oberfläche nur herrühren von dem elektromagnetischen Feld, welches von der Fläche S eingeschlossen ist.

In der Tat stimmen die drei ersten Komponenten von $\mathfrak{T}$ genau mit dem von Abraham¹⁾ für die Kraft des Strahlungsdruckes auf die bewegte Flächeneinheit angegebenen Ausdruck überein. Die u -Komponente von $\mathfrak{T}$ liefert aber wieder die energetischen Beziehungen.²⁾

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. p. 316.

2) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. p. 324.

Dritter Teil.

Die Elektrodynamik bewegter materieller Körper.

§ 1. Die Wirkungsgröße.

In der Elektrodynamik der ponderablen Körper spielt neben dem Vektor zweiter Art $\mathfrak{M}$, dessen Komponenten

$$(1) \quad \begin{cases} M_{yz} = \mathfrak{B}_x, & M_{zx} = \mathfrak{B}_y, & M_{xy} = \mathfrak{B}_z, \\ M_{xu} = -i\mathfrak{E}_x, & M_{yu} = -i\mathfrak{E}_y, & M_{zu} = -i\mathfrak{E}_z, \end{cases}$$

($\mathfrak{B}$ magnetische Induktion, $\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke) sind, und der von Laue³⁾ als „Feldvektor“ bezeichnet wird, der von Laue „Verschiebungsvektor $\mathfrak{B}$ “ benannte Vektor zweiter Art eine Rolle.

Die Komponenten von $\mathfrak{B}$ sind, falls $\mathfrak{D}$ die elektrische Verschiebung, $\mathfrak{S}$ die magnetische Feldstärke bedeutet,

$$(2) \quad \begin{cases} V_{yz} = \mathfrak{S}_x, & V_{zx} = \mathfrak{S}_y, & V_{xy} = \mathfrak{S}_z, \\ V_{xu} = -i\mathfrak{D}_x, & V_{yu} = -i\mathfrak{D}_y, & V_{zu} = -i\mathfrak{D}_z. \end{cases}$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ stehen miteinander in Beziehung durch die Gleichungen¹⁾

$$(3a) \quad \mathfrak{w} \mathfrak{B} = \varepsilon (\mathfrak{w} \mathfrak{M}),$$

$$(3b) \quad \mathfrak{w} \mathfrak{M}^* = \mu (\mathfrak{w} \mathfrak{B}^*).$$

Hierbei bedeuten ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, und $\mathfrak{w}$ ist der als Vierergeschwindigkeit bezeichnete Vektor erster Art mit den Komponenten

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_x = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_y = \frac{v_y}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_z = \frac{v_z}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_u = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{array} \right. \quad \mathfrak{w}^2 = -1.$$

1) M. Laue, l. c. p. 118, 119.

2) H. Minkowski, l. c. p. 38.

Die Beziehungen (3) können auch geschrieben werden

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}' = \varepsilon \mathfrak{E}', \\ \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}', \end{cases}$$

falls

$$(6 a) \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H} \right],$$

$$(6 b) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right],$$

$$(6 c) \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{E} \right],$$

$$(6 d) \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{D} \right]$$

gesetzt wird.

Wir führen wieder ein Welpotential ein durch die Vektorgleichung

$$(7) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi,$$

welche die Gleichungen

$$(7 a) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \end{cases}$$

zusammenfaßt, wenn $\mathfrak{A}$, $i\varphi$ wieder die Komponenten von Φ sind.

In der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern spielt ferner der Leitungsstrom J eine Rolle. Der Leitungsstrom kann als Konvektionsstrom der Elektrizität relativ zum Körper aufgefaßt werden. Bewegt sich der Körper selber, so tritt dem Leitungsstrom noch der Konvektionsstrom der wahren Ladung ϱ an die Seite. $J + \varrho v$ ist dann der von den Leitungselektronen herrührende Gesamtstrom.

Wir führen einen Vektor dritter Art P , den Viererstrom ein, welcher in jeder Beziehung dem oben benutzten Vektor dritter Art P entspricht und in diesen übergeht, falls der Leitungsstrom nicht vorhanden ist, indem wir setzen

$$(8) \quad \begin{cases} P_{yuz} = \frac{1}{c} (\varrho v_z + J_x), \\ P_{zux} = \frac{1}{c} (\varrho v_y + J_y), \\ P_{uxy} = \frac{1}{c} (\varrho v_x + J_z) \\ P_{xyz} = i\varrho. \end{cases}$$

Die Wirkungsgröße, welche wir unseren Betrachtungen zugrunde legen, muß

1. gegen Lorentztransformationen invariant sein,
2. muß ihre Variation für den Fall des Vakuums mit der Variation der oben benutzten Wirkungsgröße übereinstimmen.

Die naheliegendste Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße, welche diesen Bedingungen genügt, ist die Funktion

$$(9) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi \right\}.$$

Dieser Wert der Wirkungsgröße soll vorläufig unseren Betrachtungen zugrunde liegen. Später werden wir allerdings eine Erweiterung des Ausdrucks (9) vornehmen müssen. Wir können und werden nämlich zu der Variation von W noch eine für das Vakuum identisch verschwindende Funktion hinzufügen.

§ 2. Die Minkowskischen Grundgleichungen für bewegte materielle Körper.

In der Gleichung (9) sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ Funktionen von Φ bzw. der Abgeleiteten von Φ .

Der explizite Zusammenhang der angenommenen Wirkungsgröße mit diesen Größen soll zunächst ermittelt werden.

Es gilt nach Minkowski¹⁾ für jeden Vektor zweiter Art die Gleichung

$$\mathfrak{w}^2 \mathfrak{M} = -\{\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \mathfrak{M}\} + (\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \mathfrak{M}^*)^*$$

oder nach (4) auch

$$(10) \quad \mathfrak{M} = \{(\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \mathfrak{M}) + (\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \mathfrak{M}^*)^*\}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck von $\mathfrak{M}$ nach Art des inneren Produktes mit $\mathfrak{B}$, so ergibt sich infolge der Regeln

$$(I, 41) \quad \mathfrak{A}(a \times b) = -b(\mathfrak{A}a), \\ \mathfrak{A}(a \times b)^* = \mathfrak{A}^*(a \times b),$$

der Ausdruck

$$(11) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{B} = -\{(\mathfrak{w} \mathfrak{M})(\mathfrak{w} \mathfrak{B}) + (\mathfrak{w} \mathfrak{M}^*)(\mathfrak{w} \mathfrak{B}^*)\},$$

1) H. Minkowski, l. c. Glehg. (45).

oder infolge von (3) auch

$$(11 \text{ a}) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{B} = - \left\{ \varepsilon (\mathfrak{w} \mathfrak{M})^2 + \frac{1}{\mu} (\mathfrak{w} \mathfrak{M}^*)^2 \right\}.$$

Daher bekommen wir nach (7) als in Φ explizite Darstellung von W

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left[\frac{1}{2} \left\{ \varepsilon (\mathfrak{w} (\diamond \times \Phi))^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\mu} (\mathfrak{w} (\diamond \times \Phi)^*)^2 \right\} + P^* \Phi \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir werden uns ferner gelegentlich der abkürzenden Bezeichnungen bedienen

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{e} &= \mathfrak{w} \mathfrak{M}, \\ i \mathfrak{b} &= \mathfrak{w} \mathfrak{M}^*, & \mathfrak{b} &= \varepsilon \mathfrak{e}, \\ \mathfrak{d} &= \mathfrak{w} \mathfrak{B}, & \mathfrak{b} &= \mu \mathfrak{h}, \\ i \mathfrak{h} &= \mathfrak{w} \mathfrak{B}^*, \end{aligned} \right.$$

welche von Minkowski elektrische Ruhkraft $\mathfrak{e}$ bzw. Ruhinduktion $\mathfrak{b}$ und magnetische Ruhkraft $\mathfrak{h}$ bzw. Ruhinduktion $\mathfrak{b}$ genannt worden sind.

Führen wir diese Bezeichnungen in (130) ein, so können wir auch schreiben

$$(14 \text{ a}) \quad W = \int dx dy dz du \left\{ \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathfrak{e}^2 - \frac{1}{\mu} \mathfrak{b}^2 \right) + P^* \Phi \right\}.$$

Der erste Teil der Wirkungsgröße

$$- \int \frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) dx dy dz du$$

kann nach (13) auch geschrieben werden

$$(14 \text{ b}) \quad \int dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\varepsilon} - \mu \mathfrak{h}^2 \right).$$

Diese Form werden wir später zu benutzen haben. Wir stellen nun mit der mit (9) identischen Form (14 a) der Wirkungsgröße folgendes Prinzip auf, welches uns zu den Minkowskischen Grundgleichungen führen wird:

Es soll die erste Variation des vierfachen Integrals

$$(15) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathfrak{e}^2 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mu} \right) + P^* \Phi \right\}$$

über die vier unabhängigen Variablen x, y, z, u verschwinden, wenn wir $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_u$ als die gesuchten Funktionen von x, y, z, u ansehen. ε und μ sind dabei bekannte Funktionen von x, y, z, u und unter e und b sind die Funktionen

$$(16) \quad \begin{cases} e = w(\diamond \times \Phi), \\ b = -i w(\diamond \times \Phi)^* \end{cases}$$

zu verstehen. Die Vierergeschwindigkeit w ist desgleichen als bekannte Funktion von x, y, z, u anzusehen.

Wir führen die Variationen aus, sammeln die $\delta \Phi_x$ enthaltenden Glieder und erhalten, unter Beachtung, daß

$$(13) \quad \frac{b}{\mu} = h, \quad \varepsilon e = b.$$

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \left[b_x \left(-w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} - w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} - w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \right. \right. \\ + w_x \left(b_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} + b_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \\ + i h_y \left(-w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} + w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right) \\ + i h_z \left(-w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} + w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \\ + i h_u \left(-w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} + w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} \right) \\ \left. + P_x^* \delta \Phi_x \right] + ((\delta \Phi_y)) + \dots + ((\delta \Phi_u)) \} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich aber durch partielle Integration

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = - \int dx dy dz du \delta \Phi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} ((w \times b)_{xy} + i(w \times h)_{xy}^*) \right. \\ + \frac{\partial}{\partial z} ((w \times b)_{xz} + i(w \times h)_{xz}^*) \\ + \frac{\partial}{\partial u} ((w \times b)_{xu} + i(w \times h)_{xu}^*) \\ \left. - P_x^* \right\} + \delta \Phi_y \{ \dots \} + \\ + \int_{\Sigma} dS \delta \Phi_x \left\{ ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xy} \cos ny \right. \\ + ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xz} \cos nz \\ + ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xu} \cos nu \} \\ \left. + \delta \Phi_y ((\dots)) \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

Setzen wir das Oberflächenintegral gleich Null, so bekommen wir, da nach (10), $\mathfrak{B}$ statt $\mathfrak{M}$ gesetzt, und

$$(18) \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{w} \times \mathfrak{b}) + i(\mathfrak{w} \times \mathfrak{h})^*,$$

die Gleichung

$$(19) \quad \mathfrak{n} \mathfrak{B} = 0,$$

welche, in die gewöhnliche Schreibweise nach § 3, (18) übertragen, mit den Gleichungen

$$(19a) \quad \begin{cases} [\mathfrak{H} \nu] = \frac{v_\nu}{c} \mathfrak{D}, \\ \nu \mathfrak{D} = 0 \end{cases}$$

identisch ist.

Das Integral über Σ liefert dagegen die Gleichungen

$$(20a) \quad \begin{cases} \frac{\partial V_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial V_{zu}}{\partial u} = P_x^*, \\ \frac{\partial V_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial V_{yu}}{\partial u} = P_y^*, \\ \frac{\partial V_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{zu}}{\partial u} = P_z^*, \\ \frac{\partial V_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial V_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{uz}}{\partial z} = P_u^* \end{cases}$$

oder kurz geschrieben

$$(20) \quad \diamond \mathfrak{B} = P^*.$$

Diese Gleichungen sind aber völlig identisch mit den von Minkowski aufgestellten und lauten in gewöhnlicher Schreibweise

$$(20') \quad \begin{cases} \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho \mathfrak{b} + \mathfrak{S} \right\} \\ \text{div } \mathfrak{D} = \rho. \end{cases}$$

Das zweite System von Grundgleichungen ergibt sich auch hier aus dem Ansatz

$$(7) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi.$$

Da nämlich für jeden Vektor erster Art die Beziehung

$$(I, 60) \quad \diamond \times (\diamond \times \mathfrak{a}) = 0$$

gilt, so ergibt sich

$$(21) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$(21a) \quad \begin{cases} \frac{\partial M_{ux}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ux}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{uy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

In gewöhnlicher Schreibweise lauten diese Gleichungen:

$$(21') \quad \begin{cases} \text{curl } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{B} = 0. \end{cases}$$

Damit hätten wir aber unter dem vorausgesetzten Zusammenhang von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$, nämlich

$$(3a) \quad w \mathfrak{B} = \varepsilon (w \mathfrak{M}),$$

$$(3b) \quad w \mathfrak{M}^* = \mu (w \mathfrak{B}^*),$$

die dem Relativitätsprinzip entsprechenden Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter materieller Körper aus einem Variationsprinzip hergeleitet.

§ 3. Die dynamische Prinzip für die ponderablen Körper.

Die Möglichkeit der Darstellung der in der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern eine Rolle spielenden Größen durch Vektoren und Skalare im vierdimensionalen Raum läßt die Aufstellung eines dem oben im zweiten Teil für das Vakuum benutzten ganz analogen dynamischen Prinzips zu. Es zeigt sich hier der Vorteil der angewandten vierdimensionalen Methode, indem sich die Herleitung der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern, die sonst mit größeren Schwierigkeiten verknüpft ist, ohne nennenswerte neue Schwierigkeiten aus dem oben behandelten Fall des Vakuums übertragen läßt.

Wir wollen wieder wie im zweiten Teil äußere Wirkungen auf unseren Bereich Σ im vierdimensionalen Raum zulassen. Die Integrale, welche diesen entsprechen, sind dieselben wie früher, nur hat die Wirkungsgröße einen anderen Wert.

Wir stellen nun in völliger Analogie zu dem oben im zweiten Teil § 4 angewandten Prinzip ein dynamisches Prinzip für die ponderablen Körper auf, indem wir die Gültigkeit der Gleichung

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \{ -\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi \} + \int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q \\ & + \int_S dS \mathfrak{P} \delta q + \int_S dS \{ n (-\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi) \delta q \} = 0 \end{aligned} \right.$$

verlangen.

Die in Betracht kommenden Variationen der Vektoren P und Φ leiten wir genau wie oben aus den auf dem vierdimensionalen Fall verallgemeinerten Helmholtzschen Bedingungen

$$\delta(P dS) = 0, \quad \delta(\Phi ds) = 0$$

her und erhalten demgemäß dieselben Variationen für P und Φ wie früher, nur daß jetzt diese Vektoren eine allgemeinere Bedeutung haben.

Helmholtz¹⁾ leitet die Variation der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ her, indem er verlangt:

$$(23) \quad \delta \{ \mathfrak{D}_x dy dz + \mathfrak{D}_y dz dx + \mathfrak{D}_z dx dy \} = 0.$$

Wir verallgemeinern diese Bedingung im Sinne unserer Anschauungen über die Darstellung der elektromagnetischen Vektoren im vierdimensionalen Raum, indem wir festsetzen:

$$\delta \{ (-i \mathfrak{D}_x) dy dz + (-i \mathfrak{D}_y) dz dx + (-i \mathfrak{D}_z) dx dy + du (\mathfrak{S}_x dx + \mathfrak{S}_y dy + \mathfrak{S}_z dz) \} = 0,$$

oder in unserer Vektorschreibweise:

$$(24) \quad \delta(\mathfrak{B}^* d\sigma) = 0.$$

Aus dieser Bedingung erhalten wir aber

$$(25) \quad \delta_0 \mathfrak{B}^* = -\delta q (\diamond \times \mathfrak{B}^*) + \diamond \times (\mathfrak{B}^* \delta q).$$

Die Variation des Feldvektors $\mathfrak{M}$ ergibt sich aus der Variation des Verschiebungsvektors $\mathfrak{B}$ ohne weiteres für den Fall, daß die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ unverändert bleiben. Für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ müssen dann nämlich die Variationen identisch werden.

Wir bekommen also für die Variation des Feldvektors $\mathfrak{M}$, falls ε und μ unverändert bleiben,

$$(26) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = -\delta q (\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q).$$

1) H. Helmholtz, l. c.

§ 4. Die ponderomotorische Kraft.

Ein dem Schwarzschildschen wie im § 6 des zweiten Teiles nachgebildetes dynamisches Prinzip für ponderable Körper ergibt genau wie oben als Kraftansatz den Ausdruck

$$P^*(\diamond \times \Phi) = P^* \mathfrak{M}$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise:

$$(27) \quad \begin{cases} (P^* \mathfrak{M})_x = \varrho \left(\mathfrak{E}_x + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_x \right) + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}]_x, \\ (P^* \mathfrak{M})_y = \varrho \left(\mathfrak{E}_y + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_y \right) + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}]_y, \\ (P^* \mathfrak{M})_z = \varrho \left(\mathfrak{E}_z + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_z \right) + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}]_z, \\ (P^* \mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} \left(\varrho (v \mathfrak{E}) + \mathfrak{S} \mathfrak{E} \right). \end{cases}$$

Hierbei bedeutet

$$\varrho \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right] \right\}$$

die vom Felde auf die konvektiv bewegten wahren Ladungen ausgeübte Kraft, während

$$\frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}]$$

die Kraft darstellt, die auf den Leitungsstrom wirkt. Diese Kraft wird also nicht durch die magnetische Feldstärke, sondern durch die magnetische Induktion bestimmt.¹⁾

Die vierte der Gleichungen (145) schreiben wir besser

$$(P^* \mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} \left\{ \varrho (v \mathfrak{E}) + \frac{v}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}] + \left(\mathfrak{S}, \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right] \right) \right\},$$

denn nunmehr haben wir in

$$\varrho (v \mathfrak{E}) + \frac{v}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}]$$

die Arbeit der eben erwähnten ponderomotorischen Kräfte, die in der Zeiteinheit an der Volumeneinheit geleistet wird, während

$$\mathfrak{S} \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right] \right\}$$

als Joulesche Wärme anzusehen ist.²⁾

1) Vgl. R. Gans, Physik. Zeitschr. 12. p. 806. 1911.

2) M. Abraham, l. c. I. — W. v. Ignatowsky, Das Relativitätsprinzip. Archiv d. Math. u. Phys. 17. p. 36. — M. Laue, l. c. p. 141.

Die Anwendung des Prinzips in seinem vollen Umfange ergibt die ponderomotorische Kraft wieder als Divergenz eines Welttensors. Wie unmittelbar aus dem obigen hervorgeht,¹⁾ ergeben die Integrale über Σ

$$(28) \quad \begin{cases} F_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ F_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ F_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ F_u = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}. \end{cases}$$

Hierbei ist gesetzt

$$(29a) \quad \begin{cases} X_x = \mathfrak{S}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{S} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ Y_y = \mathfrak{S}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{B}_y - \frac{1}{2}(\mathfrak{S} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ Z_z = \mathfrak{S}_z \mathfrak{B}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{B}_z - \frac{1}{2}(\mathfrak{S} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ U_u = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{S} \mathfrak{B}). \end{cases}$$

$$(29b) \quad \begin{cases} X_y = Y_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{S}_y \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x), \\ X_z = Z_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_x \mathfrak{B}_z + \mathfrak{S}_z \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x), \\ Y_z = Z_y = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{S}_z \mathfrak{B}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y). \end{cases}$$

$$(29c) \quad \begin{cases} U_x = X_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{S}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{S}_y + \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_y), \\ U_y = Y_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_z \mathfrak{S}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{S}_z + \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_z), \\ U_z = Z_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{S}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{S}_x + \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_x). \end{cases}$$

Soll die letzte der Gleichungen (28) wieder einen Ausdruck für das Energieprinzip darstellen, so liegt es nahe, auch hier $i c U_x, i c U_y, i c U_z$ als die Komponenten des Energiestroms $\mathfrak{E}$ zu deuten, U_u als Energiedichte und die anderen Tensorkomponenten als Maxwellsche Spannungen anzusehen.

Wir hätten dann genau das Hertzsche System von Maxwellschen Spannungen und den gleichen Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Es hieße aber die wohlverprobten Ansätze der Elektrodynamik ruhender materieller Körper aufgeben, wenn man den oben in einfachster Weise aus den Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ kon-

1) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ werden ja in gleicher Weise und genau wie $\mathfrak{M}$ im zweiten Teil variiert.

struierten Tensor (29) für die ponderomotorischen Kräfte zugrunde legen wollte. Denn für die in Ruhe befindlichen ponderablen Körper gilt

$$(30) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E} \\ \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \end{cases}$$

und wir würden demnach aus den Ausdrücken für U_x , U_y , U_z erhalten:

$$(31) \quad \mathfrak{S} = \frac{\epsilon\mu + 1}{2} c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}],$$

wenn $\mathfrak{S}$ den Energiestrom bedeutet.

Der Poyntingsche Ansatz für den Energiestrom

$$\mathfrak{S} = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$$

müßte demnach aufgegeben werden.

Auf diese Tatsache hat M. Abraham¹⁾ aufmerksam gemacht, als er bei der Aufgabe, zu zeigen, daß die von ihm hergeleiteten Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte mit dem Relativitätsprinzip in Einklang stehen, auf genau denselben Welttensor (29) gestoßen war.

§ 5. Der Abrahamsche Ausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Indessen ist es Abraham gelungen den Welttensor (29) durch einen Zusatztensor derart zu erweitern, daß bei ruhenden materiellen Körpern für die Energieströmung gerade der Poyntingsche Ansatz hervorgeht.

Unser Prinzip in der obigen Fassung ist nun nicht imstande den Abrahamschen Kraftausdruck zu liefern.

Es ist aber hier zu beachten, daß in der Herleitung der Wirkungsgröße noch eine gewisse Willkür steckt, die wir bereits oben bezeichnet haben. Wir haben nämlich die Wirkungsgröße in § 1 durch Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten gewonnen. Die benutzte Verallgemeinerung ist aber insofern nicht eindeutig, als immer noch eine für den Fall des Vakuums identisch verschwindende Funktion in das Prinzip aufgenommen werden kann.

1) M. Abraham, l. c. II.

Die Abrahamsche Arbeit¹⁾ zeigt uns den Weg, die Ergänzung zur Wirkungsgröße zu finden, welche nötig ist, um den Abrahamschen Kraftausdruck herzuleiten. Abraham hat nämlich den Tensor (29) ermittelt, indem er eine gewisse quadratische Form aufgestellt hat, deren Koeffizienten dann die Tensorkomponenten sind. Ebenso hat er den Zusatztensor hergeleitet.

Es liegt die Vermutung nahe, daß der leicht zu erkennende äußere Zusammenhang zwischen der ersten Abrahamschen quadratischen Form und der von uns benutzten Wirkungsgröße derselbe ist wie der zwischen der von Abraham für den Zusatztensor benutzten quadratischen Form und der von uns gesuchten Funktion, die wir zu unserer Wirkungsgröße hinzuzufügen haben. In der Tat gelangen wir durch eine derartige Vergleichung zum Ziel.

Wir führen den auch von Abraham benutzten Minkowskischen Begriff des Ruhstrahls²⁾ Ω ein durch die Gleichung

$$(32) \quad \Omega = -icw(e \times \mathfrak{h})^*$$

wo w , e , $\mathfrak{h}$ die angegebene Bedeutung haben.

Die beiden Vektoren Ω und w sind zueinander orthogonal, es gilt:

$$(33) \quad w\Omega = 0.$$

Ω ist, wie aus der Darstellung (32) folgt, ein Vektor erster Art, dessen x -Komponente lautet:

$$\Omega_x = -ic\{w_y(e \times \mathfrak{h})^*_{xy} + w_z(e \times \mathfrak{h})^*_{xz} + w_u(e \times \mathfrak{h})^*_{xu}\}.$$

Da nach (131) (124)

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{h}_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathfrak{S}'_x, \\ &\dots\dots\dots & & \\ e_u &= \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{E}'\right), & \mathfrak{h}_u &= \frac{i \left(\frac{v}{c} \mathfrak{S}'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

so gilt

1) M. Abraham l. c. (II).

2) H. Minkowski l. c. p. 34.

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{e} \times \mathfrak{h})_{xu}^* &= (\mathfrak{e} \times \mathfrak{h})_{yz} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} [\mathfrak{E}' \mathfrak{H}']_x \\
 (\mathfrak{e} \times \mathfrak{h})_{xu} &= \frac{i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\mathfrak{E}'_x \left(\frac{v}{c} \mathfrak{H}' \right) - \mathfrak{H}'_x \left(\frac{v}{c} \mathfrak{E}' \right) \right] \\
 &= \frac{i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{v}{c} [\mathfrak{E}' \mathfrak{H}'] \right]_x
 \end{aligned}$$

und es geht daher für den Fall, daß sich der Körper in Ruhe befindet Ω in das Vektorprodukt $c[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$ über.

Die Bezeichnung des Vektors Ω als „Ruhstrahl“ findet hierin ihre Berechtigung.

Wir stellen nunmehr ein neues Prinzip auf, indem wir die Gültigkeit der Gleichung verlangen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) + P^* \Phi \right\} \\ &+ \int_{\Sigma} dx dy dz du \delta_0 \left\{ \frac{\varepsilon \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) \right\} \\ &+ \int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q + \int_S dS \mathfrak{B} \delta q \\ &+ \int_S dS \{ n \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi \right) \delta q \} = 0 \end{aligned} \right.$$

Das hinzugefügte Glied verschwindet für das Vakuum. Da nämlich

$$(35) \quad \mathfrak{w} \Omega \equiv 0,$$

so gilt in jedem Falle

$$\delta_0 \frac{\varepsilon \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) = \frac{\varepsilon \mu - 1}{2} \delta_0 (\mathfrak{w} \Omega)$$

und daher für das Vakuum

$$\delta_0 \frac{\varepsilon \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) \equiv 0.$$

Aus der Bedingung (35) folgt natürlich keineswegs das Verschwinden von $\delta_0 (\mathfrak{w} \Omega)$, $\mathfrak{w} \delta_0 \Omega$ oder das von $\Omega \delta_0 \mathfrak{w}$.

Die Variation der Vierergeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ kann auf folgende Weise ermittelt werden.

Es gilt für den Vektor dritter Art

$$(35a) \quad P = \left(\frac{e v}{c}, \quad i \varrho \right)$$

die Beziehung

$$(35) \quad P = \varrho_0 w$$

falls der Pseudoskalar ϱ_0

$$(36) \quad \varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

die Ruhdichte der Elektrizität bedeutet.

Wir setzen nun fest, daß bei der Variation die Gleichung

$$(37) \quad \delta(\varrho_0 d\Sigma) = 0$$

gilt. Dann erhalten wir aus (I, 85) für die Variation der Ruhdichte den auch von Minkowski-Born¹⁾ benutzten Wert der Variation der Ruhdichte

$$(38) \quad \delta_0 \varrho_0 = - \left(\frac{\partial \varrho_0 \delta q_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_z}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_u}{\partial u} \right).$$

Da wir nun die Variation von P aus dem obigen kennen, so ergibt sich aus der Beziehung (35a) auch die Variation der Vierergeschwindigkeit, und zwar ergibt eine einfache Rechnung mit Beachtung, daß infolge der Kontinuitätsgleichung

$$(39) \quad \diamond \times \varrho_0 w \equiv \left(\frac{\partial \varrho_0 w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 w_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 w_z}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 w_u}{\partial u} \right) k_{xyzu} = 0$$

$$(40) \quad \delta_0 w = - (\delta q \diamond) w + (w \diamond) \delta q.$$

Nunmehr können wir auch die Variation von Ω berechnen, denn wir kennen die Variationen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ und w , und daher auch von e und $\mathfrak{h}$. Jedoch ist diese Rechnung dermaßen umständlich und weitläufig, daß sie nicht durchgeführt werden soll.

Es soll vielmehr nur gezeigt werden, daß der (40) ganz analoge Ansatz

$$(41) \quad \delta_0 \Omega = - (\delta q \diamond) \Omega + (\Omega \diamond) \delta q$$

uns zu dem Abrahamschen Kraftausdruck gelangen läßt.

Führen wir die Variationen von w und Ω in dem hinzugefügten Gliede aus, so erhalten wir, falls ε und μ unverändert bleiben, und

$$(42) \quad (\varepsilon \mu - 1) \Omega = \mathfrak{L}'$$

1) Minkowski-Born, l. c. (Gl. 9).

gesetzt wird, folgende Glieder mit δq_x :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \delta_0 (w \Omega') &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \frac{-\delta q_x}{2} \left[\Omega'_x \frac{\partial w_x}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Omega'_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + \Omega'_z \frac{\partial w_z}{\partial x} + \Omega'_u \frac{\partial w_u}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_x \frac{\partial \Omega'_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial \Omega'_y}{\partial x} + w_z \frac{\partial \Omega'_z}{\partial x} + w_u \frac{\partial \Omega'_u}{\partial x} \right] \right\} \\ + \int_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left\{ w_x \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + w_y \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial y} + w_z \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + w_u \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial u} + \Omega'_x w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + \Omega'_y w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \Omega'_z w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial z} + \Omega'_u w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial u} \right\} + ((\delta q_y)) + \dots \end{aligned}$$

Durch partielle Integration entsteht hieraus unter Beachtung von (33):

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\delta q_x \left[\frac{\partial}{\partial x} w_x \Omega'_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} (w_x \Omega'_y + w_y \Omega'_x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} (w_x \Omega'_z + w_z \Omega'_x) + \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{2} (w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} (w \Omega) \right] \right\} - \delta q_y [\dots] \dots \\ &+ \int_S dS \delta q_x \{ w_x \Omega'_x \cos nx + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_y + w_y \Omega'_x) \cos ny \\ &\quad + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_z + w_z \Omega'_x) \cos nz + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x) \cos nu \} \\ &\quad + \delta q_y \{ \dots \} + \dots \end{aligned} \right.$$

Als Gesamtergebnis erhalten wir daher aus dem Prinzip (152) für die ponderomotorische Kraft den Ausdruck

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{F}_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{F}_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{F}_u &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

wo nunmehr der Welttensor $X_x \dots U_u$ bestimmt ist durch die Beziehungen

$$(46\ c) \quad \begin{cases} U_x = X_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x - \mathfrak{M}_x - \frac{v_x}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{M} \right) \right), \\ U_y = Y_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_y + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_y - \mathfrak{M}_y - \frac{v_y}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{M} \right) \right), \\ U_z = Z_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_z + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_z - \mathfrak{M}_z - \frac{v_z}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{M} \right) \right). \end{cases}$$

Dieser Tensor ist aber nun genau identisch mit dem von Abraham konstruierten¹⁾, denn der Vektor $\mathfrak{M}$ hat hier denselben Wert wie bei Abraham, wie sich leicht bestätigen läßt.

Für den Fall ruhender ponderabler Körper ergibt sich nunmehr in der Tat der Poyntingsche Ausdruck für den Energiestrom, denn aus dem angeführten Wert von

$$X_u = -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_x = -\frac{i}{2} ([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x + i(w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x))$$

erhalten wir für $v = 0$ in der Tat

$$\mathfrak{S}_x = c \left(\frac{\epsilon \mu + 1}{2} - \frac{\epsilon \mu + 1}{2} \right) [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x.$$

Damit haben wir zwar nun auch die Abrahamschen Kraftausdrücke aus einem Variationsprinzip hergeleitet. Indessen erscheint es als ein Mangel, daß in dem hierbei benutzten Prinzip (34) von einer bestimmten Wirkungsgröße nicht die Rede sein kann.

§ 6. Berücksichtigung der Variation von ϵ und μ .

Wir haben die Variation des Feldvektors $\mathfrak{M}$ aus der des Verschiebungsvektors $\mathfrak{B}$ abgeleitet unter der Bedingung, daß ϵ und μ nicht variiert werden. Wenn wir nun aber die Variation von ϵ und μ allgemein zulassen, so werden wir natürlich vorteilhafterweise eine Form der Wirkungsgröße wählen, in der ϵ und μ explizit vorkommen, also etwa eine der Formen (14).

Von diesen Formen ist für uns die vorteilhafteste

$$(14\ b) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{d}^2}{\epsilon} - \mu \mathfrak{h}^2 \right);$$

denn infolge der Beziehung

$$\mathfrak{B} = (w \times \mathfrak{d}) + i(w \times \mathfrak{h})^*,$$

1) M. Abraham, l. c. II.

welche wir bereits oben benutzt haben, ist der Verschiebungsvektor $\mathfrak{B}$ mit den Vektoren $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ auf das engste verknüpft. Die Variationen von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ sind daher unabhängig von der oben gemachten Voraussetzung, daß ε und μ nicht variiert werden sollen. Da der Feldvektor $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}) + i(\mathfrak{w} \times \mathfrak{b})^*$$

zusammenhängt, bei der Variation von $\mathfrak{M}$ aber Unvariierbarkeit von ε und μ vorausgesetzt ist, so können wir von den Variationen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ nicht dasselbe behaupten. Aus diesem Grunde ist die Form (14 b) der Wirkungsgröße hier vorzuziehen.

Die durch allgemeine Zulassung der Variation von ε und μ zu dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft hinzutretenden Glieder erhalten wir also aus dem Integral

$$(47) \quad \int_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\mathfrak{d}^2 \delta_0 \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{h}^2 \delta_0 \mu \right).$$

Führen wir die Variation aus, indem wir in Verallgemeinerung der Helmholtzschen Bedingungen setzen

$$(48) \quad \delta_0 \varepsilon = -\delta q \diamond \varepsilon = -\left(\delta q_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \delta q_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \delta q_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \delta q_u \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \right),$$

$$(49) \quad \delta_0 \mu = -\delta q \diamond \mu = -\left(\delta q_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \delta q_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \delta q_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \delta q_u \frac{\partial \mu}{\partial u} \right),$$

so erhalten wir

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\delta q_x \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad -\delta q_y \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ & \quad -\delta q_z \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \\ & \quad \left. -\delta q_u \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben also noch zu unseren Ausdrücken für die ponderomotorische Kraft hinzuzufügen

$$(51 a) \quad -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

zu der x -Komponente, entsprechende Glieder zu der y, z -Komponente und

$$(51 \text{ b}) \quad -\frac{e^2}{2} \frac{\partial s}{\partial u} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial u}$$

zu der energetischen Komponente.

Diese Ausdrücke stimmen ebenfalls mit den Abraham'schen überein, denn es gilt z. B. für den Fall, daß die x -Achse mit der Richtung der Geschwindigkeit v zusammenfällt

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^2 = \mathfrak{E}_x'^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\mathfrak{E}_y'^2 + \mathfrak{E}_z'^2), \\ \mathfrak{h}^2 = \mathfrak{S}_x'^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\mathfrak{S}_y'^2 + \mathfrak{S}_z'^2). \end{array} \right.$$

Das erweiterte Prinzip liefert wegen

$$w \Omega = -i c (w (d \times \mathfrak{h})^*) \frac{w}{s} \equiv 0$$

kein neues Glied zu dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Wenn wir nun den Tensor

$$(53) \quad T = [\mathfrak{M} \mathfrak{B}] + [w \Omega] (\varepsilon \mu - 1)$$

einführen, wobei wir mit Laue¹⁾ unter $[\mathfrak{M} \mathfrak{B}]$ die Ausdrücke

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{M} \mathfrak{B}]_{jk} = \frac{1}{4} \{ (M_{jx} V_{kx} + M_{jy} V_{ky} + M_{jz} V_{kz} + M_{ju} V_{ku}) \\ \quad + (M_{kx} V_{jx} + M_{ky} V_{jy} + M_{kz} V_{jz} + M_{ku} V_{ju}) \\ \quad - (M_{jx}^* V_{kx}^* + M_{jy}^* V_{ky}^* + M_{jz}^* V_{kz}^* + M_{ju}^* V_{ku}^*) \\ \quad - (M_{kx}^* V_{jx}^* + M_{ky}^* V_{jy}^* + M_{kz}^* V_{jz}^* + M_{ku}^* V_{ju}^*) \} \\ \quad j, k = x, y, z, u, \\ M_{jj} = 0, \quad M_{jk} = -M_{kj} \end{array} \right.$$

verstehen, und wobei der aus den Vektoren erster Art w und Ω gebildete Tensor $[w \Omega]$ die Komponenten

$$(55) \quad [w \Omega]_{jk} = -\frac{1}{2} (w_j \Omega_k + w_k \Omega_j) \quad j, k = x, y, z, u$$

hat, so können wir, wie unmittelbar zu erkennen, den endgültigen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft in der

1) M. Laue, l. c. p. 74 (80).

Elektrodynamik bewegter materieller Körper in die Form bringen

$$(56) \quad \mathfrak{F} = - \operatorname{Div} T - \frac{e^2}{2} \diamond \varepsilon - \frac{h^2}{2} \diamond \mu . \quad .$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß dieser von Abraham zuerst hergeleitete Ausdruck für die ponderomotorische Kraft dem Relativitätsprinzip genügt; denn $\mathfrak{F}$ ist offenbar ein Vektor erster Art.

Es zeigen sich auch hier wieder die Vorzüge der vektoranalytischen Darstellung im vierdimensionalen Raum, denn wir können sagen, daß in den aus unserem Prinzip hergeleiteten Gleichungen (56) und

$$(20) \quad \diamond \mathfrak{B} = P^*,$$

$$(21) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0 ,$$

im Verein mit den vorausgesetzten Beziehungen zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$

$$(3a) \quad \mathfrak{w} \mathfrak{B} = \varepsilon (\mathfrak{w} \mathfrak{M}) ,$$

$$(3b) \quad \mathfrak{w} \mathfrak{M}^* = \mu (\mathfrak{w} \mathfrak{B}^*) ,$$

sowie der hier nicht weiter in Betracht gekommenen Beziehung zwischen Leitungsstrom und Leitfähigkeit σ :

$$P^* + \mathfrak{w} (\mathfrak{w} P^*) = \frac{\sigma}{c} (\mathfrak{w} \mathfrak{M}) ,^1)$$

die ganze Elektrodynamik bewegter Körper enthalten ist, einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

§ 7. Der Strahlungsdruck in der Theorie der Elektrodynamik bewegter materieller Körper.

Die vollständige Anwendung unseres Prinzips liefert aus den Integralen über die Begrenzung, ganz analog dem § 8 des zweiten Teiles, die Gleichungen:

$$- \mathfrak{B}_x = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz + X_u \cos nu ,$$

$$- \mathfrak{B}_y = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz + Y_u \cos nu ,$$

$$- \mathfrak{B}_z = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz + Z_u \cos nu ,$$

$$- \mathfrak{B}_u = U_x \cos nx + U_y \cos ny + U_z \cos nz + U_u \cos nu .$$

1) M. Laue, l. c. p. 125.

Hierbei haben $X_x \dots U_u$ die Werte (46). Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Behauptung aus dem Oberflächenintegral (43) und dem im zweiten Teil, § 7, ausführlich angegebenen Rechnungen, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ in gleicher Weise und genau wie $\mathfrak{M}$ im zweiten Teil variiert werden.

Ersetzen wir die von außen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft $\mathfrak{B}$ durch die, dieser entgegengesetzt gleich angenommenen, von innen auf die Flächeneinheit wirkende,

$$(57) \quad \mathfrak{X} = - \mathfrak{B}$$

und gehen wir auf die nun bereits mehrmals angewandte, durch (II, 18) gekennzeichnete Weise zu Betrachtungen im gewöhnlichen Raum über, so erhalten wir, falls v , wie immer, die äußere Normale bedeutet:

$$(58) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = X_x \cos vx + X_y \cos vy + X_z \cos vz + v_y g_x, \\ \mathfrak{X}_y = Y_x \cos vx + Y_y \cos vy + Y_z \cos vz + v_x g_y, \\ \mathfrak{X}_z = Z_x \cos vx + Z_y \cos vy + Z_z \cos vz + v_x g_z, \\ \mathfrak{X}_u = \frac{i}{c} \{ - \mathfrak{S}_v + v_v \psi \}. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(59) \quad \psi = U_u$$

die Energiedichte, $\mathfrak{S}$ der Strahlvektor und

$$(60) \quad g = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} = \frac{i X_u}{c}$$

die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Da wir elastische Spannungen gänzlich ausgeschlossen haben, so können wir in völliger Analogie zu dem oben behandelten Fall des Vakuums schließen, daß die Kraft, welche $\mathfrak{X}_x, \mathfrak{X}_y, \mathfrak{X}_z$ als Komponenten hat, nichts anderes ist, als die Kraft des Strahlungsdruckes auf bewegte materielle Flächen.

Die u -Komponente der Viererkraft $\mathfrak{X}$ gibt uns wie immer die energetischen Beziehungen.

Wir können die Kraft des Strahlungsdruckes, gemäß den Bedeutungen von $X_x, \dots Z_z$, auch in der Form schreiben:

$$(61) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_{x,y,z} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} v + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} v + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} v + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} v) \\ \quad - \frac{1}{2} v (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}) + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \cdot \mathfrak{B} v + \frac{v v}{c} \mathfrak{B} \right) + v v \cdot g. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck für die Kraft des Strahlungsdruckes muß sich auch nach den bekannten Methoden¹⁾ aus den oben hergeleiteten Grundgleichungen und dem angegebenen Werte der ponderomotorischen Kraft berechnen lassen, ebenso wie man die oben erörterten Kompatibilitätsbedingungen aus den Grundgleichungen allein bereits ermitteln kann.

Wir erhalten daher aus den Oberflächenintegralen niemals Beziehungen, welche sich nicht schon aus den Gleichungen ableiten ließen, welche das Variationsprinzip aus den Integralen über den Raum Σ liefert.

Indessen erscheint die mühelose Herleitung der Kraft des Strahlungsdruckes, wie sie hier durch unser Prinzip erfolgt ist, nicht ohne Interesse zu sein.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Planck, für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, sowie für das während der Bearbeitung stets bewiesene wohlwollende Interesse meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

1) Vgl. z. B. M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung, 2. Abschn. 1. Kap.; W. Meissner, Berliner Diss. 1907.

(Eingegangen 9. Februar 1913.)