

**5. Die Beugung endlicher Wellenzüge an einer
Halbebene;
von A. Landé.**

Inhalt: § 1. Sommerfelds Lösung. — § 2. Identische Umformung. — § 3. Grenzbedingungen, Eindeutigkeit. — § 4. Unendlich lange Wellenzüge. — § 5. Chronologische Schilderung des Beugungsvorganges. — § 6. Ab- und Anklingung. — § 7. Photographische Gesamtwirkung einzelner und sukzessiver Wellenzüge.

In einer kürzlich erschienenen Mitteilung: „Überein Paradoxon der Optik“¹⁾ wurde die Beugung endlicher Lichtwellenzüge von verschiedenen physikalischen Gesichtspunkten aus behandelt, dabei aber die mathematische Lösung des Beugungsproblems ohne Beweis vorausgesetzt. Im folgenden soll der mathematische Teil der Untersuchung, die nach den Sommerfeldschen Methoden durchgeführte exakte Lösung der Lichtbeugung endlicher Wellenzüge an einer spiegelnden Halbebene mitgeteilt werden.

§ 1. Sommerfelds allgemeine Lösung.

Ein ebener Wellenzug komme ursprünglich aus Richtung der positiven x -Achse her; seine Wellenebenen seien die Ebenen $x = \text{const.}$ Der beugende Schirm sei eine einfache Halbebene, mit der z -Achse als Kante. Aus Symmetriegründen bleiben dann alle Vorgänge von der z -Koordinate unabhängig, und unsere Betrachtungen bewegen sich nur in der xy -Ebene. Die Schirmkante durchsetzt die xy -Ebene im Nullpunkt, die Spur des Schirmes schließe mit der Einfallrichtung x den Winkel $\varphi = \varphi'$ ein (Fig. 1). Damit der ebene Wellenzug nicht schon im Anfangszustand mit dem Schirm kollidiert, darf φ' nur zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$ liegen. Es

1) A. Landé, Physik. Zeitschr. 16, p. 201. 1915.

ist bequem, dem Winkel φ' einen noch engeren Spielraum

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} < \varphi' < \pi$$

zu geben, eine physikalisch bedeutungslose Einschränkung. Gesucht wird der raumzeitliche Verlauf der Lichterregung U in Aufpunkten P mit den Polarkoordinaten r und φ

$$(1') \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad 0 < r < \infty.$$

Zu Abkürzung führen wir ein

$$(2) \quad \psi = \varphi - \varphi' \quad \psi' = \varphi + \varphi',$$

so daß wegen (1) (1')

$$(2') \quad -\pi < \psi < \frac{3}{2}\pi \quad \frac{\pi}{2} < \psi' < 3\pi.$$

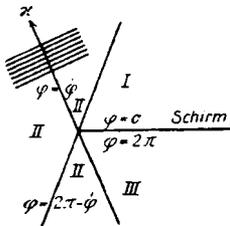


Fig. 1.

Der Halbstrahl $\varphi = \pi + \varphi'$, d. h. $\psi = \pi$ möge die *Schattengrenze*, der Halbstrahl $\varphi = \pi - \varphi'$, d. h. $\psi' = \pi$ möge die *Reflexionsgrenze* heißen. Der Halbstrahl $\varphi = 0$ bildet die *Lichtseite*, $\varphi = 2\pi$ die *Schattenseite* des Schirmes.

Durch Schirm, Schatten- und Reflexionsgrenze wird die xy -Ebene in die drei Gebiete (I) Reflexionsraum, (II) unbeschatteter Raum, (III) Schattenraum geteilt. Die Werte von ψ , ψ' , $\cos \psi/2$, $\cos \psi'/2$ in den drei Gebieten I, II, III sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Tabelle 1.

	I	II	III
ψ	$-\pi < \psi < 0$	$-\pi < \psi < +\pi$	$\pi < \psi < \frac{3\pi}{2}$
$\cos \frac{\psi}{2}$	> 0	> 0	< 0
ψ'	$\frac{\pi}{2} < \psi' < \pi$	$\pi < \psi' < 3\pi$	$2\pi < \psi' < 3\pi$
$\cos \frac{\psi'}{2}$	> 0	< 0	< 0

Wir schreiben nun Sommerfelds Lösung des Beugungsproblems sofort hin für einen beliebigen ebenen Impuls von endlicher Breite, der, aus dem Unendlichen $x = \infty$ kommend, auf eine vollkommen spiegelnde Halbebene $\varphi = 0$ fällt. Sie heißt in komplexer Darstellung, von der man durch Bildung des *Imaginärteiles* zur wirklichen Lichterregung gelangt¹⁾:

$$(3) \quad \begin{cases} U = u \mp u', \quad \text{wobei} \\ u(r, \varphi, t; + \varphi') = \frac{1}{4\pi} \int_{W_1, W_2} f(r \cos(\varphi - \alpha) + ct) \frac{d\alpha}{1 - e^{i\frac{\varphi' - \alpha}{2}}}, \\ u' = u(r, \varphi, t; - \varphi'). \end{cases}$$

Darin soll $f(\zeta)$ in komplexer Darstellung für reelle Argumente ζ den ankommenden Impuls vor der Beugung darstellen.

In unserem Fall eines Zuges von N Sinuswellen ist daher:

$$(3') \quad \begin{cases} f(\zeta) = e^{ik\zeta} \quad \text{für reelle Argumente } |\zeta| < \frac{N\lambda}{2}, \\ f(\zeta) = 0 \quad \text{,, ,, ,, } |\zeta| > \frac{N\lambda}{2}. \end{cases}$$

Der Imaginärteil von $f(x + ct) = f(r \cos \varphi + ct)$ stellt also den bei Abwesenheit des Schirmes ungestörten, in der $-x$ -Richtung fortschreitenden, aus N Perioden der Wellenlänge λ bestehenden ebenen Wellenzug dar. Dabei ist die Zeit t so normiert, daß für $t = 0$ gerade die Hälfte des Wellenzuges, nämlich $N/2$ Wellen, den Nullpunkt $x = 0 = y$ (die Schirmkante) bereits überstrichen hätte, wenn der Schirm keinen störenden Einfluß auf die Ausbreitung des Wellenzuges ausübte.

Die Integrationswege W_1 und W_2 in (3) sind nach Sommerfeld in der komplexen α -Ebene so zu führen, wie Fig. 2 zeigt: auf zwei beiderseitig ins Unendliche auslaufenden Schlingen²⁾,

1) A. Sommerfeld, Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46. p. 25 Gl. (10). 1901.

2) Die komplexe Funktion $f(\zeta)$ hat also auf der reellen Achse der ζ -Ebene bei $\zeta = \pm N\lambda$ unstetige Ableitungen. Wieso die Lösung (3) trotzdem als stetige Lösung der Wellengleichung $\Delta U - \ddot{U}/c^2 = 0$ betrachtet werden darf, vgl. Sommerfeld l. c.

3) Nehmen wir an, daß $f(\zeta)$ auch für komplexe Argumente ζ wie in (3') die Form $e^{ik\zeta}$ bzw. 0 besitzt, so ist dadurch noch unbestimmt, wo die Grenze zwischen den beiden Formen im Komplexen verläuft. Diese

welche die Geraden (G) und (H)

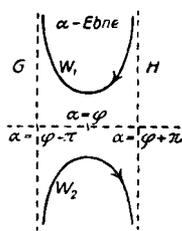


Fig. 2.

$$a = \varphi \mp \pi + ib \quad (-\infty < b < +\infty)$$

asymptotisch berühren.

Von dem *doppelten Vorzeichen* \mp in (3) ist das obere ($-$) bzw. das untere ($+$) zu nehmen, je nachdem unter dem Imaginärteil von U die Komponente $\mathfrak{E}_{\text{tang.}}$ oder $\mathfrak{H}_{\text{norm.}}$ bzw. $\mathfrak{E}_{\text{norm.}}$ oder $\mathfrak{H}_{\text{tang.}}$ der elektromagnetischen Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} verstanden wird (vgl. § 3).

§ 2. Identische Umformung.

Zum Zwecke der späteren Diskussion nehmen wir jetzt mit der Sommerfeldschen Lösung (3) eine identische Umformung vor. Zunächst führen wir statt a eine neue Variable $\beta = a - \varphi$ ein und erhalten mit Hilfe der Abkürzungen (2) aus (3)

$$(4) \quad u = \frac{1}{4\pi} \int_{W_1 W_2} f(r \cos \beta + ct) \frac{d\beta}{1 - e^{-i\frac{v+\beta}{2}}}, \quad u' = u(\psi).$$

Die Integrationswege W_1 und W_2 liegen jetzt in der β -Ebene zwischen den Asymptoten

$$\beta = \pm \pi + ib \quad (-\infty < b < +\infty).$$

Nun¹⁾ verzerren wir, unter Berücksichtigung des auf der reellen Achse liegenden Poles, $\beta = -\psi$ von u (bzw. $\beta = -\psi'$ von u') die Wege W_1 und W_2 so, daß f durchweg ein *reelles* Argument $r \cos \beta + ct$ erhält, wodurch f nach (3') erst einen bestimmten Sinn bekommt. Das wird erreicht, wenn wir W_1 mit W_2 längs des Stückes

$$-\pi < \beta < +\pi$$

der reellen Achse verschmelzen und im übrigen gegen die Asymptoten G und H anschmiegen (Fig. 3). Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

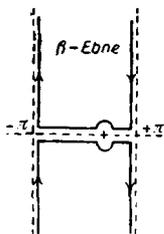


Fig. 3.

Unbestimmtheit wird uns aber nicht stören, wenn wir die Schlingen in der α -Ebene so verzerren, daß f nur *reelle* Argumente $r \cos(\varphi - \alpha) + ct$ erhält.

1) A. Sommerfeld, l. c.

A) Liegt der Pol $\beta = -\psi$ des Integranden (4) *außerhalb* des reellen Stückes $-\pi < \beta < \pi$, d. h. ist $|\psi| > \pi$, so heben sich die entgegengesetzt geführten Integrationen längs der reellen Achse gegenseitig auf, und es bleiben nur die vier senkrechten Integrationsstücke übrig. Das Integral (4) längs dieser Stücke läßt sich schreiben als Integral über das linke obere Stück, nämlich

$$(5) \quad u = u_s = \frac{1}{4i\pi} \int_{\beta=-\pi}^{\beta=-\pi+i\infty} f(r \cos \beta + ct) \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\psi+\beta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\psi-\beta}{2}} \right\} d\beta$$

B) Liegt aber der Pol $\beta = -\psi$ des Integranden (4) *innerhalb* des reellen Stückes $-\pi < \beta < +\pi$, d. h. ist $|\psi| < \pi$, so bleibt beim Verschmelzen der Wege W_1 und W_2 eine Umlaufung des Pols $\beta = -\psi$ übrig (vgl. Fig. 3). Die Integration über diese Umlaufungskurve ist aber nach dem Cauchy'schen Satze sofort auszuführen, falls $f(\zeta)$ auch noch in der Umgebung der reellen Achse der ζ -Ebene die Form (3') hat (außer an den Punkten $\zeta = \pm N\lambda$). Man erhält als Residuum an der Stelle $\beta = -\psi$

$$(5') \quad \begin{cases} u_0 = f(r \cos \psi + ct) = e^{ik(r \cos \psi + ct)}, & \text{wenn } |r \cos \psi + ct| < \frac{N\lambda}{2}; \\ u_0 = 0, & \text{wenn } |r \cos \psi + ct| > \frac{N\lambda}{2}; \end{cases}$$

das ist, beim Übergang zum Imaginärteil, ein aus N Perioden λ bestehender Sinuswellenzug.

Man hat also nach (5) (5')

$$\begin{aligned} u &= u_s, & \text{falls } |\psi| > \pi, \\ u &= u_s + u_0, & \text{,, } |\psi| < \pi. \end{aligned}$$

Daher schließlich nach Tab. 1 im

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Reflexionsraum I} & U = (u_s + u_0) \mp (u_s' + u_0') \\ & \cos \frac{\psi}{2} > 0, \quad \cos \frac{\psi'}{2} > 0. \\ \text{Ünbeschatteten Raum II} & U = (u_s + u_0) \mp u_s' \\ & \cos \frac{\psi}{2} > 0, \quad \cos \frac{\psi'}{2} < 0. \\ \text{Schattenraum III} & U = u_s \mp u_s' \\ & \cos \frac{\psi}{2} < 0, \quad \cos \frac{\psi'}{2} < 0. \end{array} \right.$$

wobei nach (7) (7')

$$(9') \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{k \left(ct - r - \frac{N\lambda}{2} \right)}, & \text{falls diese Wurzel reell,} \\ & \text{andernfalls } \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = \sqrt{k \left(ct - r + \frac{N\lambda}{2} \right)}, & \text{falls diese Wurzel reell,} \\ & \text{andernfalls } \sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Die endgültige Lösung U setzt sich nach (6) aus (5') und (9) zusammen, worin $u_s' = u_s(\psi')$, $u_0' = u_0(\psi')$ definiert war.

§ 3. Grenzbedingungen und Eindeutigkeit.

Daß unsere Lösung (6) wirklich den Beugungsvorgang eines aus dem Unendlichen kommenden, N Perioden der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ enthaltenden ebenen Wellenzuges an einer spiegelnden Halbebene beschreibt, geht erst aus den jetzt zu diskutierenden Grenz- und Anfangsbedingungen für U hervor.

A) Auf dem Schirm ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{auf der Lichtseite } \varphi = 0, \text{ also } \psi = -\psi' \\ \text{,, ,, Schattenseite } \varphi = 2\pi, \text{ ,, } \psi = 4\pi - \psi' \end{array} \right\} d\psi = -d\psi'.$$

Also wird nach (5) und (5') auf beiden Schirmseiten

$$u_0 = u_0' \quad \text{und} \quad u_s = u_s', \quad \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u_0'}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u_s'}{\partial \varphi}$$

(differentiiert bei konstantem r).

Bei Annahme des oberen bzw. unteren Vorzeichens in (6) wird also auf dem Schirm $U = 0$ bzw. $\partial U / \partial \varphi = 0$.

Durch das obere Vorzeichen (-) erfüllt also U die bekannten Grenzbedingungen der Elektrodynamik am vollkommenen Spiegel, wenn unter U die zur Schirmkante tangentialen bzw. normalen Komponenten $\mathfrak{E}_{\text{tang}}$ oder $\mathfrak{H}_{\text{norm}}$ der Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} verstanden werden. Entsprechend $\mathfrak{E}_{\text{norm}}$ oder $\mathfrak{H}_{\text{tang}}$ bei Annahme des unteren Vorzeichens (+).

B) Ferner untersuchen wir U in einem Zeitpunkt ($-T$), welcher so weit zurückliegt gegen die Zeit $t = 0$, daß zur Zeit $-T$ bei ungestörter Ausbreitung des Wellenzuges u_0 (5') seine Front noch nicht die Schirmkante erreicht hat, d. h. wir nehmen

$$-\infty < -cT < -\frac{N\lambda}{2}, \quad \text{also} \quad -cT \pm \frac{N\lambda}{2} < 0.$$

Dann wird für jedes $0 < r < \infty$ die obere und untere Integrationsgrenze

$$\sigma = \sqrt{k \left(-cT - r \pm \frac{N\lambda}{2} \right)}$$

in (9) imaginär, so daß der Integrationsbereich für σ auf Null zusammenschrumpft und $u_s = 0$ wird; desgleichen auch u_s' . Da im Reflexionsraum I $\pi/2 < \psi' < \pi$, also $\cos \psi' < 0$, wird $r \cos \psi - cT < -N\lambda/2$, so daß nach (5') $u_0' = f(r \cos \psi' - cT)$ verschwindet. Es bleibt also in allen drei Gebieten I, II, III nach (6) nur übrig

$$U = u_0$$

als *Anfangsbedingung* zur Zeit $ct = -cT < -N\lambda/2$ für jedes r . Der Anfangszustand des Imaginärteiles von U stellt also wirklich einen aus N Perioden der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ bestehenden ebenen Wellenzug dar, der bei den Argumenten $\pm N\lambda/2$ von u_0 stetig in den Wert Null übergeht, dort aber unstetige Ableitungen besitzt.

C) Endlich untersuchen wir U während des ganzen Zeitintervalls $-cT < ct < +cT$ auf der Peripherie eines Kreises um die Schirmkante vom Radius $r = R$, wobei

$$R > +cT + \frac{N\lambda}{2} \quad \text{und, wie oben,} \quad cT > \frac{N\lambda}{2}$$

sein soll. Dann wird die obere und die untere Integrationsgrenze

$$\sigma = \sqrt{k \left(ct - R \pm \frac{N\lambda}{2} \right)}$$

in (9) während des ganzen Zeitintervalles $-cT < ct < +cT$ imaginär, also u_s und u_s' beide gleich Null. Daher bleibt im Gebiet I bzw. in II und III nach (6) nur übrig

$$U = u_0 \mp u_0' \quad \text{bzw.} \quad U = u_0$$

als *Randbedingung* auf

$$R > cT + \frac{N\lambda}{2},$$

während

$$-\frac{N\lambda}{2} < -cT < ct < cT < +\frac{N\lambda}{2}.$$

Der Beweis der *Eindeutigkeit* der Lösung mit den Grenz-, Anfangs- und Randbedingungen ABC wird analog dem Sommerfeldschen Eindeutigkeitsbeweis beim Rechteckimpuls¹⁾ geführt.

§ 4. Grenzfall unendlich langer Wellenzüge.

Die Diskussion unserer Lösung (6) (5') (8) beginnen wir mit der Betrachtung eines aus Wellen bestehenden Zuges des Breite $N \cdot \lambda$, dessen Mitte zur Zeit $t=0$ die Schirmkante überstreicht, und gehen zur *Grenze* $\lim N = \infty$ über. Dann wird in (8) wegen (7') die *untere* Integrationsgrenze

$$\sqrt{ct - r - \frac{N\lambda}{2}} / 2r$$

für jedes endliche r und t imaginär, ist also wegen (7) durch 0 zu ersetzen. Die *obere* Grenze

$$\sqrt{ct - r + \frac{N\lambda}{2}} / 2r$$

wird reell positiv ∞ . Daher wird aus (8)

$$(10) \left\{ \begin{aligned} u_s = \frac{2i}{\pi} e^{ik(r \cos \psi + ct)} \int_0^\infty \frac{e^{+2ikr \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\psi}{2} \right)}}{2ik \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\psi}{2} \right)} \\ \cdot \sqrt{k} \cos \frac{\psi}{2} d \left(-i \sqrt{k} \cos \frac{\beta}{2} \right), \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [u_s \cdot e^{-ik(r \cos \psi + ct)}] &= \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty e^{2ikr \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\psi}{2} \right)} \\ &\quad \cdot \sqrt{k} \cos \frac{\psi}{2} d \left(-i \sqrt{k} \cos \frac{\beta}{2} \right) \\ &= \frac{2i}{\pi} e^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2r}} \int_0^\infty e^{-2ikr \left(-i \cos \frac{\beta}{2} \right)^2} \\ &\quad d \left(-i \sqrt{2kr} \cos \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

1) A. Sommerfeld, l. c.

Bei Einführung von (8') wird daraus wegen

$$(10) \quad \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma = \frac{\sqrt{-i\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [u_s \cdot e^{-ik(r \cos \psi + ct)}] = \frac{i\sqrt{-i\pi}}{\pi} e^{-i\tau^2} \frac{\sqrt{2k \cos \frac{\psi}{2}}}{2\sqrt{r}}$$

Durch Integration nach r wird wegen $dr = 2\sqrt{r} \cdot d(\sqrt{r})$,

$$u_s \cdot e^{-ik(r \cos \psi + ct)} = \frac{i\sqrt{-i\pi}}{\pi} \int_{\sqrt{r}=\infty}^{\sqrt{r}} e^{-i\tau^2} \sqrt{2k \cos \frac{\psi}{2}} d(\sqrt{r})$$

Dabei ist als untere Integrationsgrenze $\sqrt{r} = \infty$ genommen, weil u_s nur dann verschwindet, wenn in (8) die obere und untere Integrationsgrenze Null ist, d. h. nach (7) (7'), wenn

$$r \geq ct + \frac{N\lambda}{2},$$

in unserem Grenzfall also, wenn $r = \infty$ ist. Wegen

$$i\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{-i}}$$

wird also schließlich

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_s = e^{ik(r \cos \psi + ct)} \frac{1}{\sqrt{-i\pi}} \int_{\tau = \sqrt{2kr \cos \psi/2}}^{\tau = \infty \cdot \cos \psi/2} e^{-i\tau^2} d\tau \text{ und aus (5') mit (10')} \\ u_0 = e^{ik(r \cos \psi + ct)} \frac{1}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau, \end{array} \right.$$

wobei jetzt für u_0 nicht mehr die in (5') angegebene Beschränkung gilt. Daher wird, unter Berücksichtigung des in (6) angegebenen Vorzeichens von $\cos \psi/2$ und $\cos \psi'/2$, nach (6) im

I) Reflexionsraum

$$(11) \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{e^{ik(r \cos \psi + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \left(-\int_{\sqrt{2kr \cos \psi/2}}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right) \\ &\mp \frac{e^{ik(r \cos \psi' + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \left(-\int_{\sqrt{2kr \cos \psi'/2}}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right) \\ &= \frac{e^{ik(r \cos \psi + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi/2}} e^{-i\tau^2} d\tau \\ &\mp \frac{e^{ik(r \cos \psi' + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi'/2}} e^{-i\tau^2} d\tau. \end{aligned} \right.$$

II) Unbeschatteten Raum

$$(11') \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{e^{ik(r \cos \psi + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \left(-\int_{\sqrt{2kr \cos \psi/2}}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right) \\ &\mp \frac{e^{ik(r \cos \psi' + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \left(-\int_{\sqrt{2kr \cos \psi'/2}}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right) \\ &= \frac{e^{ik(r \cos \psi + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi/2}} e^{-i\tau^2} d\tau \mp \frac{e^{ik(r \cos \psi' + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi'/2}} e^{-i\tau^2} d\tau. \end{aligned} \right.$$

III) Schattenraum

$$(11') \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{e^{ik(r \cos \psi + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi/2}} e^{-i\tau^2} d\tau \\ &\mp \frac{e^{ik(r \cos \psi' + ct)}}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos \psi'/2}} e^{-i\tau^2} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Es läßt sich also U in allen drei Gebieten durch den gleichen Ausdruck (11') darstellen, der übrigens übereinstimmt mit der Sommerfeldschen Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ für den stationären Fall eines beiderseits unendlich langen Wellenzuges.¹⁾ Von den Folgerungen, die

1) A. Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraktion, Math. Ann. 47. p. 359. Gl. (5).

Sommerfeld aus seiner Lösung zieht, führen wir an, daß sich u_s in (11) nach der reziproken unteren Integralgrenze durch partielle Integration semikonvergent entwickeln läßt zu

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} u_s &= e^{ik(r \cos \psi + ct)} \frac{-1}{\sqrt{-i\pi}} \frac{e^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}}}{2i\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{2i} \frac{1}{2kr \cos^2 \frac{\psi}{2}} + \frac{1 \cdot 3}{(2i)^2} \frac{1}{\left(2kr \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)^2} - \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Ist

$$2kr \cos^2 \frac{\psi}{2} > \pi n,$$

und lassen wir in der Reihenentwicklung alle Glieder außer dem ersten fort, so machen wir einen relativen

$$(12') \quad \text{Fehler } \varepsilon < \frac{1}{\pi n},$$

da sich von der Reihe nachweisen läßt, daß jedes Glied absolut größer als die Summe aller folgenden Glieder ist. Mit dem Fehler ε , der bei wachsendem n kleiner wird, ist dann

$$(13) \quad u_s = \frac{-1}{\sqrt{-i\pi}} \frac{e^{ik(ct-r)}}{2i\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}}, \quad \text{solange}$$

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} 2kr \cos^2 \frac{\psi}{2} &\geq \pi n, \quad \text{d. h. solange} \\ y^2 &\geq n\lambda \left[-x + \frac{n\lambda}{4} \right]. \end{aligned} \right.$$

Der Gültigkeitsbereich von (13) ist also die ganze xy -Ebene, mit Ausschluß des Innern einer Parabel, welche die Schattengrenze ($\cos \psi = 0$, $y = 0$ bei negativem x [Fig. 1]) umschließt, die Schirmkante $x = y = 0$ zum Brennpunkt hat und den Parameter $n(\lambda/2)$ besitzt.

Die Erregung u_s besteht also, wegen des Exponenten $ik(ct-r)$, aus Kreiswellen bzw. bei Hinzunahme der z -Koordinate, aus *Zylinderwellen*, welche von der Schirmkante radial mit Lichtgeschwindigkeit forteilten. Die wirkliche Lichterregung ist nach (6)

III) im *Schattenraum* eine Überlagerung der Imaginärteile der beiden Zylinderwellen u_s und u_s' , deren Intensität, wegen des in (13) auftretenden Nenners $\cos \psi/2$ und $\cos \psi'/2$,

von der Schirmrückseite bis zur Schattengrenze *monoton* zunimmt, während zugleich der Fehler (12') mit zunehmender Annäherung an die Schattengrenze größer wird. Im

II) *unbeschatteten Raum* werden nach (6) die Kreiswellen $u_s \mp u_s'$ überlagert von der ebenen Welle u_0 , zu der im

I) *Reflexionsraum* noch u_0' tritt.

Im Gebiet II entsteht durch *Interferenz* der ebenen mit den Zylinderwellen ein System von *hellen und dunklen Streifen*, nämlich dort, wo die Summe

$$u_s \mp u_s' + u_0 = e^{ik(ct-r) + i\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi'}{2}} \right) e^{+ik(ct+x)},$$

also auch ihr für die reale Lichterregung maßgebender Imaginärteil maximale und minimale *Amplitude* besitzt; bringt man $u_s \mp u_s' + u_0$ auf die Form $e^{ikct} \cdot A \cdot e^{i\delta}$, so erhält man für die Amplitude A den Ausdruck

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} A^2 = 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi'}{2}} \right) \right]^2 \\ + 2 [\dots] \cdot \cos \left[k(x+r) - \frac{3\pi}{4} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dieser hat Extremalwerte auf den *Parabeln*

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} k(x+r) - \frac{3\pi}{4} = n \cdot \pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots) \\ \text{oder anders geschrieben} \\ 2kr \cos^2 \frac{\psi}{2} = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right) \\ \text{oder anders geschrieben} \\ y^2 = \lambda \left(n + \frac{3}{4} \right) \left[-x + \frac{\lambda}{4} \left(n + \frac{3}{4} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

und zwar *Maxima* für gerades n , *Minima* für ungerades n . Diese Parabeln sind mit den Parabeln (13') koaxial und konfokal.

Auf den Parabeln (14') liegen übrigens die Schnittpunkte der *Kreise*

$$r = \left(q + \frac{3}{4} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (q = 0, 1, 2, \dots)$$

auf denen u_s (13) die Phasen $q \cdot \pi + k c t$ hat, mit den Geraden

$$x = p \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

auf denen u_0 die Phasen $p \cdot \pi + k c t$ hat. Einige dieser Kreise und Geraden sind in Fig. 4 ausgezogen, ebenso Stücke der Parabeln (14'), welche ihre Lage zu allen Zeiten beibehalten.

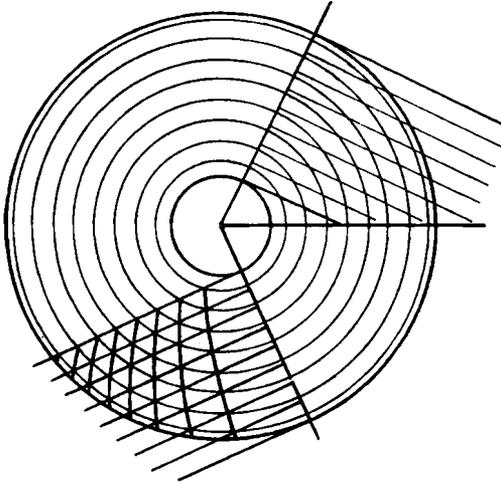


Fig. 4.

Im Schattenraum treten nach (6) keine Interferenzen von $u_s \mp u_s'$ mit u_0 auf.

Alle diese Ergebnisse der Sommerfeldschen Untersuchung werden hier angeführt, damit wir die Verhältnisse bei endlich breiten Wellenzügen mit denen bei unendlichen vergleichen können.

§ 5. Chronologische Schilderung der Beugung eines endlichen Wellenzuges.

Mit dieser Beugungserscheinung im stationären Grenzfall vergleichen wir jetzt die Erscheinungen bei einem endlichen ebenen Wellenzug (6) (5') (9). Je nachdem die Grenzen $\sigma_1 \sigma_2$ in (9) (9') reell ausfallen oder imaginär werden und daher durch 0 zu ersetzen sind, hat man die drei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a)} \quad ct - r < -\frac{N\lambda}{2}.$$

Dann wird sowohl σ_1 wie σ_2 in (9) imaginär; beide sind also durch 0 zu ersetzen. Daher wird

$$(15\text{a}) \quad u_s = 0, \text{ falls } ct - r < -\frac{N\lambda}{2};$$

$$\text{b)} \quad -\frac{N\lambda}{2} < ct - r < +\frac{N\lambda}{2}.$$

Dann wird nur σ_1 imaginär, also aus (8') (9)

$$(15\text{b}) \left\{ \begin{array}{l} u_s = -\frac{1}{\pi} e^{ik(ct-r)} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\sigma = \sqrt{k(ct-r+N\lambda/2)}} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma, \\ \text{falls } |ct - r| < \frac{N\lambda}{2}. \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \quad ct - r > +\frac{N\lambda}{2}.$$

Dann sind beide Grenzen σ_1 und σ_2 reell, also

$$(15\text{c}) \left\{ \begin{array}{l} u_s = -\frac{1}{\pi} e^{ik(ct-r)} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2} \int_{\sigma = \sqrt{k(ct-r-N\lambda/2)}}^{\sigma = \sqrt{k(ct-r+N\lambda/2)}} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma, \\ \text{falls } ct - r > N\lambda. \end{array} \right.$$

Die Gebiete (a) und (b) (vgl. Fig. 5) stoßen in der Grenzlinie $r = ct + N\lambda/2$ zusammen, die Gebiete (b) und (c) in der Grenzlinie $r = ct - N\lambda/2$.

Die beiden Grenzlinien sind Kreise, deren Peripherien mit Lichtgeschwindigkeit c von der Schirmkante radial fort-eilen.

Mit Hilfe der Gleichungen (6) und (15a, b, c) können wir nun den zeitlichen Ablauf des Beugungsvorganges vollständig beschreiben (Fig. 5).

In einem weit zurückliegenden Zeitmoment

$$ct < -\frac{N\lambda}{2} \text{ 1)}$$

haben wir nur den einfallenden ebenen Wellenzug u_0 (5'). Dieser schiebt sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung

1) Über die Normierung von t vgl. § 1.

der negativen x -Achse (Fig. 1) gegen die Schirmkante $x = y = 0$, $r = 0$ zu, ohne daß in den übrigen Partien der xy -Ebene der anfängliche Ruhezustand gestört wird. Im Moment

$$ct = -\frac{N\lambda}{2}$$

erreicht der ebene Wellenzug mit seiner Front die Schirmkante (im Moment $ct = +N\lambda/2$ wäre er gerade über die Schirmkante hinweggegangen, wenn keine Störung einträte). Der Wellenzug u_0 wird nun, von $ct = -N\lambda/2$ an, durch die Schattengrenze ($\cos \psi/2 = 0$, $y = 0$ bei negativem x) in zwei Teile zerschnitten. Der eine Teil wandert zur Linken der Schattengrenze ungestört fort (Fig. 5), der andere Teil

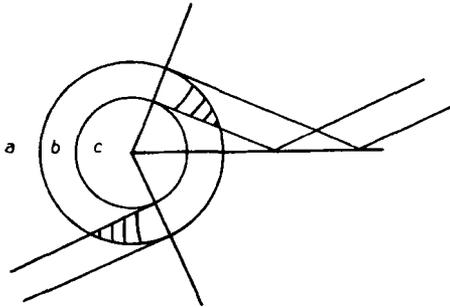


Fig. 5.

wird vom Schirm vernichtet. Statt seiner tritt weiterhin der „reflektierte“ ebene Wellenzug u'_0 auf. Außerdem beginnt aber im Moment $ct = -N\lambda/2$ radial von der Schirmkante aus der Wellenzug $u_s \mp u'_s$ auszugehen, den man als Kreisimpuls bzw. bei Hinzunahme der z -Koordinate als *Zylinderimpuls* bezeichnen kann. Die Lage der drei Gebiete (15 a, b, c) hängt nämlich von der Zeit ab:

$$\begin{aligned} \text{a) } ct + \frac{N\lambda}{2} < r < \infty, & \quad \text{b) } ct - \frac{N\lambda}{2} < r < ct + \frac{N\lambda}{2}, \\ \text{c) } 0 < r < ct - \frac{N\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Solange $ct < -N\lambda/2$ ist, nimmt das Gebiet (a) die ganze Ebene $0 < r < \infty$ ein, so daß u_s und u'_s nach (15 a) überall gleich Null sind.

Von $ct = -N\lambda/2$ an wird das Gebiet (a) von der Schirmkante aus radial mit Lichtgeschwindigkeit zurückgedrängt und läßt im Innern des Kreises $r = ct + N\lambda/2$ Raum für

das Gebiet (b), in welchem sich $u_s \mp u_s'$ aus (15b) bestimmt. Von $ct = +N\lambda/2$ an beginnt von der Schirmkante aus das Gebiet (c) sich auszubreiten, nach außen begrenzt durch einen Kreis $r = ct - N\lambda/2$, in dessen Innern sich $u_s \mp u_s'$ aus (15c) bestimmt. Von $ct = +N\lambda/2$ an bildet (b) ein Ringgebiet, wie in Fig. 4 gezeichnet.

Es tritt also an kleiner Stelle des Raumes eine Lichterregung auf, bevor nicht die zur Ausbreitung mit gewöhnlicher Lichtgeschwindigkeit um die Schirmkante herum nötige Zeit abgelaufen ist.

Wie in § 6 gezeigt werden soll, läßt sich u_s im Gebiet (b) auffassen als Überlagerung der stationären Erregung (13) des § 4 und eines Anklingungsvorganges, welcher sich aber nur nahe dem äußeren Rand $r = ct + N\lambda/2$ des Gebietes (b) wesentlich bemerkbar macht. In denjenigen Teilen von (b), welche mehr als etwa eine Wellenlänge λ zentral vom äußeren Rand entfernt liegen, findet sich in § 6 die wirkliche Erregung u_s nur wenig von der stationären Erregung (11') verschieden.

Abwechselnde Maxima und Minima der Lichterregung können nur dort vorkommen, wo sich das Kreisgebiet (b) mit dem Gebiet des ebenen Wellenzuges u_0 bzw. u_0' überdeckt, wo also Interferenz von u_0 bzw. u_0' mit $u_s \mp u_s'$ zustande kommt (Fig. 5). In diesen Überdeckungsgebieten sind dann aber die Lagen und Intensitätsverhältnisse der hellen und dunklen Streifen die gleichen wie im stationären Fall des § 4, wenn wir von dem erwähnten Anklingungsvorgang dicht am Rand $r = ct + N\lambda/2$ zunächst absehen. Die in Fig. 4 für den stationären Fall eingezeichnete Lage der Maxima und Minima gilt dann ohne weiteres auch beim abgebrochenen Wellenzug für das Überdeckungsgebiet. Da der Schnittpunkt der Rückfront von u_0 $x = -ct + N\lambda/2$ mit dem äußeren Rand $r = ct + N\lambda/2$ des Ringgebietes (b) auf der Parabel

$$(16) \quad x + r = N\lambda$$

wandert, welche mit den Parabeln (14')

$$(16') \quad \begin{cases} x + r = \left(-\frac{5}{8} + p\right)\lambda & \text{helle Streifen} \\ x + r = \left(-\frac{1}{8} + p\right)\lambda & \text{dunkle Streifen} \end{cases} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

konfokal ist, liegen innerhalb der Grenzparabel (16) gerade die N hellen und die N dunklen Streifen der niedrigsten Ordnungen ($p = 1, 2, \dots, N$). D. h.

Ein abgebrochener ebener Wellenzug von N Perioden gibt nur die N hellen und N dunklen Streifen der N niedrigsten Ordnungen.

Aus der Bedingung, daß die Streifen (16') nur zwischen der Geraden $x = -ct + N\lambda/2$ und dem Kreis $r = +ct + N\lambda/2$ auftreten, ergibt sich die Beobachtungsdauer $\tau_p^{(h)}$ bzw. $\tau_p^{(d)}$ des p ten hellen bzw. dunklen Streifens zu

$$(16'') \quad \tau_p^{(h)} = \frac{\lambda}{c} \left(N + \frac{5}{8} - p \right) \quad \text{bzw.} \quad \tau_p^{(d)} = \frac{\lambda}{c} \left(N + \frac{1}{8} - p \right).$$

Von diesen Zeiten ist aber, wie in § 6 abgeleitet wird, etwa eine Wellenperiode $\lambda/c \cdot 1$ als Anklingungsdauer in Abzug zu bringen. Daher wird der letzte helle und dunkle Streifen nicht mehr deutlich zum Vorschein kommen.

Im Kreisgebiet (c) spielt sich ein zum Anklingungsvorgang reziproker Abklingungsprozeß ab (§ 6).

§ 6. Abklingung und Anklingung.

Wir wollen nun ein Bild über das allmähliche Abklingen der Zylindererregung u_s im Gebiet (c), Fig. 5, gewinnen, wenn ein Wellenzug auf seiner Rückseite abgebrochen wird, der vorher schon seit unendlich langer Zeit gewirkt hat, der also aus ∞ vielen Wellen λ besteht. Führen wir in jedem Punkt (r, φ) der xy -Ebene eine neue Zeitnormierung

$$(17) \quad ct' = ct - r - \frac{N\lambda}{2}$$

ein, so überstreicht der Grenzkreis der beiden Gebiete (b) und (c) (15 b, c) den Punkt (r, φ) im Moment $t' = 0$. Für $t' > 0$ liegt (r, φ) dauernd im Gebiet c . Bei endlichem r und t und unendlichem N wird dann

$$ct - r - \frac{N\lambda}{2} = ct', \quad ct - r + \frac{N\lambda}{2} = \infty, \quad ct + \frac{N\lambda}{2} = \infty.$$

Also wird aus (15c), da $e^{i\pi N} = +1^1$,

1) $+1$, falls N eine grade Zahl. Ist N ungrade, so ist im Folgenden durchweg das Vorzeichen von v , umzukehren, d. h. die Phase um π zu verschieben, und in der Darstellung Fig. 7, 8 eine Drehung um π vorzunehmen, ohne daß sich physikalisch etwas ändert als die Normierung der Zeitrechnung.

$$(18) \quad u_s = -\frac{1}{\pi} e^{ikct'} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma \quad \text{für } t' > 0,$$

während für $t' < 0$ der stationäre Wert (11') gilt.

Wir beschränken uns auf Gebiete $\tau = \sqrt{2kr} \cos \psi/2 \gg \pi$. Dann können wir statt (11') (18) schreiben

$$(13) \quad u_s = \frac{-1}{\sqrt{-i\pi}} \frac{e^{ikct'}}{2i\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} = \frac{e^{ikct' + i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \quad \text{für } t' < 0.$$

$$(18') \quad u_s = \left(-\frac{1}{\pi} e^{ikct'} \tau \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma \right) + \left(\frac{1}{\pi} e^{ikct'} \tau \int_0^{\sqrt{kct'}} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma \right).$$

Das erste Glied der Summe (18') ist identisch mit dem Ausdruck (10), § 4, und hat in unserer Annäherung den Wert (13).

Das zweite Glied von (18') behandeln wir in dem Falle, daß die obere Grenze $\sigma = \sqrt{kct'} \ll \tau = \sqrt{2kr} \cos \psi/2$ ist. Es wird dann mit Benutzung von (13) aus (18')

$$(19) \quad u_s = \frac{e^{i(kct' + \frac{3\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{kct'}} e^{-i\sigma^2} d\sigma \right\}.$$

Um den Verlauf von u_s zu veranschaulichen, wollen wir die komplexe Größe u_s in einer komplexen Ebene als Fahrstrahl mit den Polarkoordinaten ρ und ω darstellen. Bis zum Zeitpunkt $t' = 0$ läuft dann nach (13) der Vektor (ρ, ω) auf einem Kreis vom Radius $1:2\sqrt{\pi} \sqrt{2kr} \cos \psi/2$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $d\omega/dct = k$ und erreicht im Moment $t' = 0$ die Phase $\omega = 3\pi/4$ (Fig. 7). Für $t' > 0$ gilt (19); das darin vorkommende Integral

$$J = \int_0^{\sqrt{kct'}} e^{-i\sigma^2} d\sigma$$

ist aus der Fresnelschen Beugungstheorie bekannt. In einer komplexen J -Ebene läuft J im Moment $t' = 0$ vom Nullpunkt aus, berührt dort die positive reelle Achse von unten und läuft dann auf einer Cornuschen Spirale um den asymptotischen Punkt

$$\frac{\sqrt{-i\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Vgl. Fig. 6. In den Zeitpunkten $k c t' = 0, 1\pi/2, 2\pi/2, 3\pi/2 \dots$ hat J abwechselnd horizontale und vertikale Tangenten in den markierten Punkten der Fig. 6. Für *sehr kleine* $\sqrt{k c t'}$ hat J die Entwicklung

$$J = \sqrt{k c t'} \left(1 - i \frac{k c t'}{3} + \dots \right).$$

Dann wird also

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} u_s &= \frac{e^{i(k c t' + \frac{3\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} + \frac{1}{\pi} \frac{e^{i k c t'}}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \sqrt{k c t'} (1 - \dots) \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} + \sqrt{k c t'} (1 - \dots) \right). \end{aligned} \right.$$

Der u_s darstellende Fahrstrahl geht also für $t' > 0$ in horizontaler Richtung von der Phase $\omega = 3\pi/4$ aus fort; vgl. Fig. 7.

Für *große* $\sqrt{k c t'}$ (die aber immer noch klein gegen $\sqrt{2kr} \cos \psi/2$ sein müssen, damit (19) benutzbar bleibt) wird durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma - \int_{\sqrt{k c t'}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \\ &= \frac{\sqrt{-i\pi}}{2} - \frac{e^{-i k c t'}}{2i \sqrt{k c t'}} \left(1 - \frac{1}{2i} \frac{1}{k c t'} + \dots \right). \end{aligned}$$

Daher wird

$$(19'') \quad u_s = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{k c t'} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} \left(i - \frac{1}{2k c t'} + \dots \right).$$

Der u_s darstellende Fahrstrahl (ϱ, ω) mündet also für große $k c t'$, von links oben kommend, in die positiv imaginäre Achse im Nullpunkt ein. Die Lage des Fahrstrahles (ϱ, ω) zu den Zeiten

$$k c t' = -\frac{1\pi}{2}, \quad 0, \quad \frac{1\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{2} \dots$$

ist in Fig. 7 markiert. Mit wachsender Zeit t' nimmt die Amplitude von u_s wegen (19'') nach Ablauf einiger Perioden proportional $1/\sqrt{k c t'}$ ab.

Ist aber $\sqrt{kct'}$ groß, ohne gleichzeitig klein gegen $\sqrt{2kr} \cos \psi/2$ zu sein, so berechnen wir u_s direkt durch eine Entwicklung von (18), und finden durch partielle Integration von (18) als erstes Glied für große $\sqrt{kct'}$ und große $\sqrt{2kr} \cos \psi/2$

$$(19''') \quad u_s = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{kct'}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2} + \frac{kct'}{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}}}$$

Der Unterschied zwischen u_s in den beiden Fällen, welche (19'') und (19''') zugrunde liegen, kommt erst bei großem kct' zum Vorschein, wo die Amplitude von u_s sowieso bereits klein gegen die ursprüngliche Amplitude des stationären Falles geworden ist; Fig. 7 stellt also die *Abklingung* auch in dem (19''') zugrunde liegenden Fall praktisch genau dar.

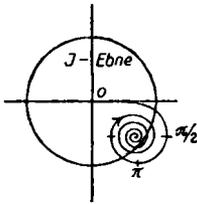


Fig. 6.

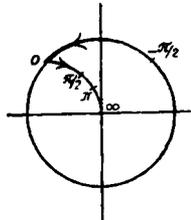


Fig. 7.

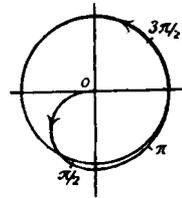


Fig. 8.

Es ist jetzt leicht, den Vorgang der *Anklingung* in einem Punkt (r, φ) der xy -Ebene zu behandeln, wenn derselbe aus dem Gebiet (a) in das Gebiet (b) eintritt [Gl. (15a, b)], Fig. 5. Führen wir die neue Zeitrechnung

$$ct'' = ct - r + N\lambda$$

ein, so überstreicht die äußere Kreisbegrenzung des Gebietes (b) den Punkt (r, φ) im Moment $t'' = 0$. Für $t'' < 0$ ist in (r, φ) nach (15a) $u_s = 0$. Für $t'' > 0$ gilt (15b)

$$(20) \quad u_s = -\frac{1}{\pi} e^{ikct'} \tau \int_0^{\sqrt{kct'}} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma, \quad \text{wo } \tau = \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Das ist aber nichts anderes als das zweite Glied der Summe (18'), nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das erste Glied

jener Summe stellte die stationäre Erregung bei unendlich langen Wellenzügen dar. Die Beschreibung des *Anklingungsvorganges* erhält man also durch *Subtraktion der Abklingung von der stationären Erregung*. Die Darstellung der Abklingung in der komplexen Ebene erhält man durch vektorielle Subtraktion des Fahrstrahles $u_s(k c t'')$ der Fig. 7 von einem Fahrstrahl, der mit der Amplitude $1 : 2\sqrt{\pi} \sqrt{2 k r} \cos \psi/2$ und mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $d\omega/dt = k c$ im Moment $t'' = 0$ die Phase $\omega = 3\pi/4$ erreicht. In Fig. 8 ist diese Subtraktion ausgeführt; man erkennt, daß u_s bereits nach einer halben Periode sich nicht mehr wesentlich von der stationären Erregung unterscheidet.

§ 7. Photographische Gesamtwirkung einzelner und sukzessiver Wellenzüge.

Neben dem chronologischen Verlauf des Beugungsvorganges interessiert uns die *Integralwirkung* des abgebrochenen Wellenzuges auf eine in den Beugungsraum gestellte photographische Platte. Eine bestimmte Stelle der Platte wird, wie nach Fig. 5 erkennbar, erst eine Zeitlang von den reinen ebenen Wellen u_0 überstrichen. Dann kommt eine Zeit, wo dieselbe Stelle der Platte *gleichzeitig* von den ebenen u_0 und den Zylinderwellen $u_s \mp u_s'$ überstrichen, also mit hellen und dunklen Interferenzstreifen belichtet wird; bzw. eine Zeit, wo die Stelle der Platte im Dunklen liegt. Schließlich bleibt die Stelle unter der alleinigen Wirkung der Zylindererregung $u_s \mp u_s'$ zurück. Ist N eine nicht gar zu kleine ganze Zahl, so dürfen wir den An- und Abklingungsvorgang des § 6, der sich nur etwa *eine* Periode lang bemerkbar macht, außer Betracht lassen und für u_s die Formeln des stationären Falles § 4 benutzen. Nennt man A_0, A_s, A_{0s} die Amplituden am Plattenpunkt (r, φ) in der ebenen, Zylinder- und Interferenz-erregung, so ist nach (5') (13) (14)

$$(21) \quad \begin{cases} A_0^2 = 1, \\ A_s^2 = \frac{1}{4\pi^2 k r} \left(\frac{1}{\cos \psi/2} \mp \frac{1}{\cos \psi'/2} \right)^2, \\ A_{0s}^2 = A_0^2 + A_s^2 + 2 A_0 A_s \cos \left[k(x+r) - \frac{3\pi}{4} \right]. \end{cases}$$

Ist τ die Verweilzeit im Interferenzlicht, so wird der photographische Gesamteindruck (vgl. Fig. 5)

$$J = \tau \cdot A_0^2 + \left(\frac{N\lambda}{c} - \tau\right) (A_0^2 + A_s^2), \quad \left(\tau < \frac{N\lambda}{c}\right)$$

$$(22) \quad J = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) + 2 A_0 A_s \cos [\dots] \cdot \tau.$$

Daneben schreiben wir die photographische Wirkung (14), welche während eines Zeitintervalles $N\lambda/c$ bei stationärer Erregung hervorgebracht wird:

$$(23) \quad G = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) + 2 A_0 A_s \cos [\dots] \cdot \frac{N\lambda}{c}.$$

Der Unterschied zwischen abgebrochenen und stationären Wellenzügen besteht also darin, daß das zu Streifen Anlaß gebende Kosinusglied im ersten Fall den mit wachsender Ordnung abnehmenden Faktor τ , im zweiten Fall statt dessen den konstanten Faktor $N\lambda/c$ hat. An der Stelle des p ten hellen bzw. dunklen Streifens, wo der \cos sein Extremum $+1$ bzw. -1 hat und τ nach (16'') durch $\tau_p^{(h)}$ bzw. $\tau_p^{(d)}$ gegeben ist, wird für

$$p < N \begin{cases} J_p^{(h)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) + \frac{\lambda}{c} (N - p + \frac{5}{8}) 2 A_0 A_s, \\ J_p^{(d)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) - \frac{\lambda}{c} (N - p + \frac{1}{8}) 2 A_0 A_s, \end{cases}$$

$$p > N \begin{cases} J_p^{(h)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2), \\ J_p^{(d)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_p^{(h)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) + \frac{N\lambda}{c} 2 A_0 A_s, \\ G_p^{(d)} = \frac{N\lambda}{c} (A_0^2 + A_s^2) - \frac{N\lambda}{c} 2 A_0 A_s. \end{cases}$$

Es wird also der Gegensatz zwischen hellen und dunklen Streifen bei kurzen Wellenzügen *mehr* verbleichen als bei stationärer Wellenerregung, derart, daß ein Zug von N Wellen in höherer als N ter Ordnung überhaupt keine Streifen mehr abgibt.

Hat man statt des betrachteten isolierten Wellenzuges eine Reihe sukzessiver Wellenzüge von je N Perioden, die aber in keiner Phasenbeziehung zueinander stehen, so läßt sich durch eine einfache Wahrscheinlichkeitsbetrachtung zeigen, daß zwar nicht in jedem Augenblick, wohl aber im *Durch-*

schnitt über viele Phasenwechsel die photographische Wirkung pro Zeitintervall $N\lambda/c$ ebenfalls durch obige Formeln wiedergegeben wird. Wechselt dagegen die Phase nicht immer genau nach N Perioden, sondern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einmal nach N_1 , ein andermal nach N_2, N_3, \dots Perioden, so findet man die *durchschnittliche* photographische Wirkung pro Zeiteinheit durch *Summierung* der zu $N = N_1, N = N_2 \dots$ gehörigen Ausdrücke, nachdem man sie mit passenden Wahrscheinlichkeitsfaktoren multipliziert hat. In diesem Fall hört der Gegensatz zwischen hellen und dunklen Streifen *nicht* in einer bestimmten Ordnung *ganz* auf, sondern er verblaßt nur viel schneller mit wachsender Ordnung, als es bei stationärer Wellenerregung der Fall ist: je häufiger die Phasenwechsel, desto flacher werden in einer bestimmten Plattengegend die Intensitätsmaxima, — eine Erscheinung, die eine gewisse, aber nur ganz äußerliche¹⁾ Analogie zu der Abflachung des nach Wellenlängen oder Schwingungszahlen aufgetragenen *Fourierspektrums* von Wellenzügen mit Phasenwechseln hat.

Resultate.²⁾

1. Bei der Beugung eines ebenen Wellenzuges an der Halbebene gelangt an keine Stelle des Raumes eine Lichterregung, bevor nicht die zu Ausbreitung mit normaler Lichtgeschwindigkeit um die Schirmkante herum nötige Zeit abgelaufen ist.

2. Besteht der Wellenzug aus N Wellen λ , so zeigt er im Beugungsbild nur die N hellen und N dunklen Streifen der N ersten Ordnungen. Die Beobachtungsdauer des hellen bzw. dunklen Streifens p ter Ordnung ist

$$(16'') \quad \tau_p^{(h)} = \frac{\lambda}{c} (N - p + \frac{5}{8}) \quad \text{bzw.} \quad \tau_p^{(d)} = \frac{\lambda}{c} (N - p + \frac{1}{8}),$$

nimmt also mit wachsender Ordnung p linear gegen Null ab.

1) Der fehlende innere Zusammenhang geht schon daraus hervor, daß das beobachtete Beugungsbild überall die gleiche Farbe λ hat, während das Fourierspektrum in seinen verschiedenen Teilen verschiedene Frequenzen besitzt.

2) Eine kurze Ableitung dieser Resultate für den Spezialfall senkrechter Inzidenz, bei der die mathematischen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung ohne Beweis mitgeteilt werden, findet sich bei A. Landé, Über ein Paradoxon der Optik, Physik. Zeitschr. 16. p. 201. 1915.

3. Die Streifen stellen sich nicht plötzlich in ihrer vollen Intensitätsstärke her und verlöschen nicht plötzlich, sondern durchlaufen einen *Anklingungs-* bzw. einen *Abklingungszustand*. Jedoch ist sowohl die An- wie die Abklingung innerhalb von ein bis zwei Lichtperioden in großer Annäherung abgeschlossen.

4. Ist also N eine nicht allzu kleine ganze Zahl, so haben die hellen und dunklen Streifen fast während der *ganzen Zeit* (16'') ihres Auftretens die gleiche zeitlich konstante Intensität und Schärfe, wie im Falle stationärer Wellenerregung während der ganzen unendlichen Zeit (keine Streifenverbreiterung durch Verkürzung des Wellenzuges).

5. Die *photographische Gesamtwirkung* einer Wellenerregung mit Phasenwechseln zeigt dagegen eine bei vermehrter Häufigkeit der Phasenwechsel zunehmende *Verwischung* der Maxima und Minima, eine Erscheinung, die mit wachsender Beobachtungsordnung an Stärke zunimmt.

Cholm, September 1915.

(Eingegangen 22. September 1915.)