MOUVEMENT D'UN POINT ABANDONNÉ À L'INTÉRIEUR D'UN CUBE.

Par MM. Dénes König et Adolphe Szűcs (Budapest).

Adunanza del 9 marzo 1913.

I.

Avant d'aborder le problème que nous avons en vue, posons-nous le problème analogue relatif au plan.

On suppose qu'un point mobile se meut à l'intérieur d'un carré en ligne droite avec, par exemple, une vitesse constante et, chaque fois qu'il atteint la frontière du carré, sa vitesse change brusquement de direction d'après les lois du choc ¹⁾, le point restant toujours dans le carré. Proposons-nous d'étudier la trajectoire parcourue par le point dans le passé et dans l'avenir.

Soient

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = \frac{1}{2}$$

les équations des droites qui forment le carré et imaginons des miroirs plans perpen-

¹⁾ Si le choc a lieu en un point qui appartient à un côté C seulement, la nouvelle vitesse s'obtient en prenant le vecteur symétrique à la vitesse primitive par rapport au côté C ; si le choc a lieu

(Fig. 1).

en un sommet, point de concours des côtés C et C' , il faut appliquer à la vitesse primitive deux transformations de symétrie, l'une par rapport au côté C , l'autre par rapport au côté C' . C'est dire que le point décrira en sens inverse le chemin déjà suivi. La seconde loi résulte de la première par des considérations de continuité.

diculaires au plan du carré, substitués à ces droites. On verrait dans ces miroirs une infinité de carrés formés par les droites

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{n}{2}$$

(m et n étant des entiers quelconques) et dans chaque carré une image d'un point $P(a, b)$ choisi arbitrairement dans le carré primitif. Il y aura quatre espèces d'images :

$$(a + m, b + n), \quad (a + m, -b + n), \quad (-a + m, b + n), \quad (-a + m, -b + n)$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

et les images situées dans un même carré seront toutes de la même espèce. On peut dire aussi que deux quelconques de ces carrés seront représentés l'un sur l'autre par une série de transformations de symétrie, la représentation étant indépendante du choix de cette série, et pour deux carrés contigus, les points de la frontière commune se correspondront à eux-mêmes. Considérons aussi les images du vecteur qui représente en $P(a, b)$ la vitesse du point mobile. En désignant par α et β les cosinus directeurs de ce vecteur, les cosinus directeurs des vitesses des quatre espèces d'images seront, dans l'ordre qui correspond à celui des images :

$$\alpha, \beta; \quad \alpha, -\beta; \quad -\alpha, \beta; \quad -\alpha, -\beta;$$

donc seules les images de première espèce, ayant pour coordonnées $a + m, b + n$ auront une vitesse de même direction et sens que le point mobile.

(Fig. 2).

Choisissons sur la trajectoire un point arbitraire $P(a, b)$ que nous considérerons comme position initiale du point mobile. En partant du point P , le mobile commence par suivre une droite (e). Après le premier choc, une des images, celle qui était en contact avec le point mobile au moment du choc ²⁾, continue à s'éloigner suivant la

²⁾ Si le choc a lieu en un sommet, le point mobile entre en contact avec trois images, une de ces images suivra la droite (e).

droite (e). Après le deuxième choc, il y aura une deuxième image qui continuera le chemin de la première et ainsi de suite. Le réseau de carrés divise la droite (e) en un nombre infini de segments et chaque segment sera parcouru, l'un après l'autre, par une image. Le point qui correspond, dans le carré primitivement donné, à cette image, décrira la trajectoire du mobile.

1. Si la droite (e) passe par une image P' du point $P(a, b)$, le mobile repassera

(Fig. 3).

par sa position initiale et inversement. De plus, le mobile aura, en repassant par P , sa vitesse initiale, si le point P' est une image de première espèce et dans ce cas seulement. En effet, au moment du repassage, l'image au point P' de la vitesse du mobile est un vecteur dirigé suivant la droite (e); ce vecteur ne coïncide avec l'image de la vitesse initiale que si le point P' est une image de première espèce. Or si le mobile revient au point de départ avec la vitesse initiale, le mouvement est *périodique* et la trajectoire est une ligne fermée.

Donc, pour que le mouvement d'un point mobile partant d'un point (a, b) du carré, dans la direction (α, β) , soit périodique, il faut et il suffit que les équations

$$(e) \quad \begin{cases} x = a + \alpha t, \\ y = b + \beta t \end{cases}$$

soient vérifiées par trois valeurs t, x, y , les deux dernières ayant la forme

$$\begin{aligned} x &= a + m, \\ y &= b + n, \end{aligned}$$

où m et n désignent des entiers non tous nuls. En d'autres termes, il faut et il suffit que l'on ait

$$m = \alpha t, \quad n = \beta t$$

et cela revient à dire que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est rationnel. (Si $\beta = 0$, on peut encore considérer $\frac{\alpha}{\beta}$ comme rationnel). En résumé :

La condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire soit une ligne fermée, est que le coefficient angulaire de la vitesse initiale ait une valeur rationnelle.

En dehors des cas $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, un exemple simple sera fourni par le mouvement périodique d'un point, dont la vitesse initiale est parallèle à une des diagonales : la trajectoire est, dans ce cas, un rectangle. En général, une trajectoire fermée est un

(Fig. 4).

polygone qui se coupe lui-même.

2. Le théorème précédent sera complété par le suivant :

Si le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, le point mobile s'approche indéfiniment de n'importe quel point du carré.

Observons d'abord que les transformations de symétrie conservent les distances. Il suffit donc de démontrer que, (ξ, η) étant un point arbitraire du carré et ε un nombre positif arbitraire, il existe une image de première espèce $(\xi + m, \eta + n)$ et un point (t) sur la droite (e) , tels que

$$|a + \alpha t - (\xi + m)| < \varepsilon,$$

$$|b + \beta t - (\eta + n)| < \varepsilon.$$

Pour déterminer convenablement t , m et n , donnons à t une valeur qui vérifie, au lieu de la seconde inégalité, l'égalité

$$b + \beta t - (\eta + n) = 0,$$

d'où

$$t = \frac{\eta - b}{\beta} + \frac{n}{\beta}$$

($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, autrement $\frac{\alpha}{\beta}$ ne serait pas irrationnel) ; il reste à déterminer les entiers m et n de façon que la première inégalité aussi soit vérifiée :

$$|a + \alpha t - (\xi + m)| = \left| n \frac{\alpha}{\beta} + \left[a - \xi + \frac{\alpha}{\beta}(\eta - b) \right] - m \right| < \varepsilon.$$

Un théorème connu nous assure, dans l'hypothèse où le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, que l'on peut trouver deux entiers satisfaisant à cette condition, quelle que soit la valeur entre crochets.

Les raisonnements précédents s'appliquent sans changement si l'on considère, au lieu d'un carré, un rectangle quelconque de dimensions: e_1 et e_2 . Le rôle, joué précédemment par α et β , sera joué par $\frac{\alpha}{2e_1}$ et $\frac{\beta}{2e_2}$ et la trajectoire sera fermée ou non, suivant que le rapport $\frac{\alpha}{2e_1} : \frac{\beta}{2e_2}$ est rationnel ou irrationnel. Dans le cas général, comme dans le cas du carré, le point de départ n'intervient pas dans la condition dont dépend la périodicité du mouvement. Des remarques analogues s'appliqueront au cas de l'espace.

II.

Notre problème étant résolu dans le cas du plan, étudions le mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube et subissant, à la frontière, les lois du choc ³⁾. Soient $P(a, b, c)$ la position initiale du point (choisie arbitrairement sur la trajectoire) et α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse initiale. Nous supposons l'arête du cube égale à $\frac{1}{2}$ et nous prendrons pour trièdre de référence trois arêtes issues d'un sommet O .

Imaginons l'espace divisé en une infinité de cubes, images du cube donné par rapport aux plans

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{n}{2}, \quad z = \frac{p}{2}$$

$$(m, n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

On obtient ces images en substituant, par la pensée, des miroirs plans aux faces du cube. Dans chacun de ces cubes, il y aura un point $P'(\pm a + m, \pm b + n, \pm c + p)$ image du point $P(a, b, c)$ et les points P' et P se correspondent par des séries de transformations de symétrie. La vitesse initiale aura au point P' une image ayant pour cosinus directeurs $\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma$ (il y a le même signe à placer devant a et α, b et β ,

³⁾ Là, nous avons trois espèces de chocs à distinguer. Le choc peut avoir lieu en un point intérieur à une face F du cube, en un point d'une arête A , intersection de deux faces F et F' ou en un sommet S , point d'intersection de trois faces F, F' et F'' . Il faut appliquer à la vitesse du mobile *une* transformation de symétrie (par rapport à F) dans le premier cas, *deux* dans le deuxième (une par rapport à F et une par rapport à F') et *trois* dans le troisième (par rapport à F, F', F''), l'ordre dans lequel ces transformations se suivent étant toujours sans importance. On peut dire aussi que, dans le deuxième cas, on applique une transformation de symétrie par rapport à l'arête A et, dans le troisième, une transformation de symétrie par rapport au sommet S . Des considérations de continuité font admettre ces lois de « chocs singuliers ».

c et γ). Les images P' de première espèce seront celles qui auront pour coordonnées

$$a + m, \quad b + n, \quad c + p,$$

m, n, p étant des entiers quelconques.

Le point mobile commence par suivre la droite (e) représentée par les équations

$$(e) \quad x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t, \quad z = c + \gamma t.$$

1. En reprenant un raisonnement déjà employé, il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement du point mobile soit périodique, est que la droite (e) passe par une image de première espèce, c'est-à-dire qu'il existe une valeur t telle que l'on ait

$$a + \alpha t = a + m, \quad b + \beta t = b + n, \quad c + \gamma t = c + p,$$

m, n et p étant des entiers. La condition s'écrit encore

$$\alpha : \beta : \gamma = m : n : p.$$

Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire du point mobile soit une ligne fermée est que les rapports de deux quelconques des cosinus directeurs de la vitesse initiale soient rationnels ⁴⁾.

Il est clair d'après ce qui précède que si le mouvement est périodique, il existe entre les cosinus directeurs α, β, γ deux relations linéaires, homogènes, à coefficients entiers et indépendantes

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

$$A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0,$$

et inversement. Il paraît naturel de diviser les mouvements non-périodiques en deux catégories suivant qu'il existe entre les cosinus directeurs α, β, γ de la vitesse initiale une relation linéaire et homogène, à coefficients entiers non tous nuls ou s'il n'en existe aucune.

2. Dans le premier cas, on peut trouver trois entiers A, B, C (dont un au moins différent de zéro) vérifiant la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Un point, partant dans une certaine direction [notamment dans la direction (A, B, C)], perpendiculaire à la droite (e) , prendrait donc un mouvement périodique. Le plan

$$(S) \quad A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

passant par la droite (e) , et normal à la direction (A, B, C) va jouer un rôle important.

En appliquant à ce plan infini (S) les transformations de symétrie par rapport aux faces coupées par (S) du cube, puis, à chaque plan (S') ainsi obtenu, les transformations de symétrie par rapport aux faces coupées par (S') et ainsi de suite, les portions de tous ces plans (S') renfermées à l'intérieur du cube donné formeront un polyèdre fermé Π à un nombre fini de faces (ayant toutes ses arêtes sur la frontière du cube).

⁴⁾ Cela revient à dire que les mouvements des projections du mobile sur toutes les faces du cube sont périodiques.

En effet, chacun des plans (S') passera par une image $P'(\pm a + m, \pm b + n, \pm c + p)$ du point P , puisque le plan (S) passe par le point $P(a, b, c)$, et aura pour normale une direction $(\pm A, \pm B, \pm C)$, les signes dont il faut affecter a et A , b et B , c et C étant les mêmes. L'équation d'un plan (S') sera donc de la forme

$$\pm A[x - (\pm a + m)] \pm B[y - (\pm b + n)] \pm C[z - (\pm c + p)] = 0$$

ou, en désignant la constante $Aa + Bb + Cc$ par D ,

$$(\Sigma) \quad \pm Ax \pm By \pm Cz - (D \pm Am \pm Bn \pm Cp) = 0.$$

Si le plan (S') a une portion à l'intérieur du cube, sa distance à l'origine est certainement inférieure à la longueur $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ de la diagonale :

$$(f) \quad \left| \frac{D \pm Am \pm Bn \pm Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| < \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Le numérateur du premier membre ne peut avoir d'autres valeurs que

$$D, D \pm 1, D \pm 2, D \pm 3, \dots$$

et, parmi ces valeurs, il n'y a qu'un nombre fini qui sont inférieures, en valeur absolue, à $\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Donc il n'y a qu'un nombre fini d'équations (Σ) pour lesquelles la condition (f) est vérifiée. *A fortiori*, les plans (S') s'obtenant par des transformations de symétrie successives et ayant une portion à l'intérieur du cube, sont en nombre fini. Ces portions sont des polygones dont tous les côtés sont communs à deux polygones (si un polygone est perpendiculaire à une des faces du cube, il doit être considéré comme double). Ces polygones forment donc un polyèdre fermé Π , inscrit au cube, dont les faces se coupent en général.

Les images de la droite (e) étant des droites dans les plans (S'), les segments de la droite (e), contenus dans les divers cubes, ont pour images, à l'intérieur du cube donné, des segments sur le polyèdre Π . Donc *le point mobile reste toujours sur la surface du polyèdre Π* et, par conséquent, l'ensemble des points de sa trajectoire n'est pas partout dense dans le cube.

Nous allons démontrer que *le point mobile s'approche indéfiniment, pourvu que son mouvement ne soit pas périodique, de n'importe quel point de la surface du polyèdre*.

Comme un point quelconque de la surface du polyèdre a une image dans le plan (S), la proposition sera établie, si nous faisons voir que (ξ, η, ζ) étant un point quelconque du plan (S), la droite (e) passe à une distance arbitrairement petite d'une image de première espèce $(\xi + m, \eta + n, \zeta + p)$ de ce point ⁵⁾. En supposant donc que les

⁵⁾ Nous verrons qu'il est possible de déterminer les entiers m, n, p de manière qu'ils satisfassent à l'égalité

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Cela signifie que la droite (e) s'approche indéfiniment des images de première espèce situées dans le plan (S).

coordonnées ξ, η, ζ vérifient l'équation

$$A(\xi - a) + B(\eta - b) + C(\zeta - c) = 0,$$

il s'agit de déterminer t, m, n, p (dont m, n, p doivent être des entiers) de telle façon que l'on ait

$$|a + \alpha t - (\xi + m)| < \varepsilon,$$

$$|b + \beta t - (\eta + n)| < \varepsilon,$$

$$|c + \gamma t - (\zeta + p)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné d'avance. Comme le mouvement n'est pas périodique, un des rapports $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}$ est irrationnel; supposons que ce soit $\frac{\alpha}{\beta}$; on aura alors $C \neq 0$ (de l'égalité $C = 0$, il résulterait $A\alpha + B\beta = 0$, d'où $\frac{\alpha}{\beta} =$ valeur rationnelle). D'après ce que nous avons vu dans l'étude du mouvement plan, il existe des entiers μ, ν et une valeur τ tels que

$$\alpha\tau = \frac{\xi - a}{C} + \mu + \varepsilon_1,$$

$$\beta\tau = \frac{\eta - b}{C} + \nu + \varepsilon_2,$$

la limite supérieure de $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$ pouvant être fixée arbitrairement.

Posons

$$m = C\mu, \quad n = C\nu, \quad t = C\tau;$$

nous aurons alors

$$(I) \quad \begin{cases} a + \alpha t = \xi + m + C\varepsilon_1, \\ b + \beta t = \eta + n + C\varepsilon_2; \end{cases}$$

donc deux des trois inégalités seront vérifiées, si l'on a pris soin de choisir les valeurs absolues de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petites pour avoir

$$|C\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |C\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Si, de plus

$$|A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2| < \varepsilon,$$

et qu'on pose

$$p = -(A\mu + B\nu),$$

la troisième inégalité aussi se trouvera vérifiée. Ajoutons, en effet, membre à membre, les équations (I) après les avoir multipliées par A et B ; on trouve

$$aA + bB + (A\alpha + B\beta)t = A\xi + B\eta + C(A\mu + B\nu) + C(A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2).$$

En utilisant maintenant les relations

$$aA + bB + cC = A\xi + B\eta + C\zeta, \quad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

on tire de là

$$-cC - C\gamma t = -C\zeta + C(A\mu + B\nu) + C(A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2),$$

$$c + \gamma t = \zeta + p - (A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2),$$

$$|c + \gamma t - (\zeta + p)| < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Indiquons quelques exemples. Supposons qu'un des rapports $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}$, par

exemple $\frac{\alpha}{\beta}$, soit rationnel $\left(= -\frac{B}{A}\right)$. Nous avons alors entre α , β , γ la relation linéaire et homogène (à coefficients entiers)

$$A\alpha + B\beta + 0.\gamma = 0.$$

Le plan (S)

$$A(x - a) + B(y - b) = 0$$

et toutes les faces du polyèdre Π sont perpendiculaires au plan des xy . Les faces du polyèdre coupent ce plan suivant un polygone fermé, trajectoire de la projection du point mobile; cette projection décrit en effet une trajectoire fermée, puisque, par hypothèse, $\frac{\alpha}{\beta}$ a une valeur rationnelle. L'ensemble des faces polyédrales est fermé, si l'on

(Fig. 5).

considère chaque face comme double. Dans le cas où B et C sont nuls à la fois, on a nécessairement

$$\alpha = 0$$

et le polyèdre Π se compose d'une seule face double ayant la forme d'un carré et parallèle au plan des yz . La trajectoire sera une ligne dense dans ce carré, si le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ est irrationnel.

En dehors des cas précédents—éclaircis au fond par l'étude du mouvement plan—le cas où $A = B = C = 1$ (c'est-à-dire $\alpha + \beta + \gamma = 0$) nous montrera les exemples les plus simples où un point mobile ne quitte pas la surface d'un polyèdre. La condition

$$A = B = C = 1$$

a pour conséquence que chaque face du polyèdre est perpendiculaire à l'une des quatre diagonales $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ du cube. Un tel polyèdre est par exemple l'un quelconque des deux tétraèdres réguliers ayant pour sommets 4 sommets du cube.

(Fig. 6).

Un autre polyèdre de la même catégorie s'obtient de la façon suivante. Joignons les milieux de trois arêtes concourantes et cela de toutes les manières possibles; nous aurons ainsi 8 triangles réguliers correspondant aux 8 sommets. Les 24 côtés de ces triangles déterminent aussi 4 hexagones réguliers. Les 8 triangles et 4 hexagones ainsi obtenus forment un polyèdre *fermé*, inscrit au cube, chaque arête du polyèdre étant commune à un triangle et à un hexagone ⁶⁾.

(Fig. 7).

Si, en un instant, un point mobile et le vecteur (α, β, γ) , attaché au point qui représente la vitesse, se trouvent sur un de ces polyèdres, le point décrira une trajectoire dense sur la surface du polyèdre, pourvu que son mouvement ne soit pas périodique ou, ce qui revient au même, pourvu qu'un des rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ soit irrationnel.

⁶⁾ En appliquant la « loi des arêtes » (Kantengesetz) de MÖBIUS, on peut s'assurer que ce polyèdre est bilatère. On a donc d'après le théorème d'EULER

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2 - 2p,$$

où α_0 désigne le nombre des sommets, α_1 celui des arêtes, α_2 celui des faces et p le genre de la surface polyédrale. Nous avons pour le polyèdre considéré

$$\alpha_0 = 12, \quad \alpha_1 = 24, \quad \alpha_2 = 12,$$

d'où

$$p = 1;$$

donc le polyèdre est homéomorphe au *tore*. C'est ce qu'on voit aussi sur la figure où nous avons re-

(Fig. 8).

présenté les 4 hexagones et les 8 triangles. Si on convient de réunir les arêtes désignées par les mêmes numéros, on trouve un tore divisé en 4 hexagones et 8 triangles *assemblés de la même façon que les faces de notre polyèdre*.

3. Il nous reste à étudier le mouvement du point mobile, lorsqu'il n'existe entre α , β , γ aucune relation de la forme

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

à coefficients entiers. Dans ce cas, le point mobile s'approche indéfiniment de n'importe quel point du volume du cube.

Soit en effet (ξ, η, ζ) un point quelconque à l'intérieur ou sur la frontière du cube et donnons-nous un nombre positif arbitraire ε . Nous allons voir qu'il est possible de trouver une valeur t et trois entiers m, n, p tels que l'on ait

$$|a + \alpha t - (\xi + m)| < \varepsilon,$$

$$|b + \beta t - (\eta + n)| < \varepsilon,$$

$$|c + \gamma t - (\zeta + p)| < \varepsilon.$$

Posons

$$t = \frac{\zeta - c}{\gamma} + \frac{p}{\gamma},$$

où p désigne un entier indéterminé ⁷⁾. La troisième inégalité sera vérifiée d'elle-même; les deux premières s'écrivent sous la forme

$$\left| p \frac{\alpha}{\gamma} + \left[a - \xi + \frac{\alpha}{\gamma} (\zeta - c) \right] - m \right| < \varepsilon,$$

$$\left| p \frac{\beta}{\gamma} + \left[b - \eta + \frac{\beta}{\gamma} (\zeta - c) \right] - n \right| < \varepsilon,$$

il faut déterminer les entiers m, n, p de manière à vérifier ces inégalités. De tels entiers existent toujours en vertu d'un théorème de KRONECKER ⁸⁾ qui s'énonce ainsi:

« Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$$

« v valeurs réelles ne vérifiant aucune relation linéaire à coefficients entiers et

$$x_1, x_2, \dots, x_v$$

« des valeurs réelles quelconques. Il est possible de trouver des entiers

$$n, n_1, n_2, \dots, n_v$$

« tels que l'on ait

$$|n\alpha_1 - x_1 - n_1| < \varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|n\alpha_v - x_v - n_v| < \varepsilon,$$

« quel que soit le nombre positif ε donné d'avance ».

⁷⁾ On a $\gamma \neq 0$, autrement on aurait une relation de l'espèce exclue: $\gamma = 0$.

⁸⁾ L. KRONECKER, *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen* [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1884, pp. 1179-1193; *Werke* (Leipzig, Teubner), Bd. III, Halbband I (1899), pp. 49-109], où l'auteur démontre le théorème sous une forme plus générale. — Une autre démonstration a été donnée par M. F. RIESZ: *Sur la résolution approchée de certaines congruences* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIX (2^e semestre 1904), pp. 459-462].

Dans le cas qui nous occupe ($\nu = 2$)

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta}{\gamma}$$

et une relation de la forme indiquée

$$A \frac{\alpha}{\gamma} + B \frac{\beta}{\gamma} + C = 0$$

entraînerait une relation linéaire et *homogène* (à coefficients entiers) entre les cosinus directeurs α , β , γ contrairement à notre hypothèse.

En appelant *direction périodique* la direction de la vitesse initiale d'un mouvement périodique, nos résultats peuvent se résumer ainsi.

Une direction est périodique si les cosinus directeurs sont entre eux, comme trois entiers.

Si la vitesse initiale n'est perpendiculaire à aucune direction périodique, la trajectoire est dense dans le cube. Si la vitesse initiale est perpendiculaire à une direction périodique, la trajectoire est dense sur un polyèdre. Si la vitesse initiale est perpendiculaire à deux directions périodiques, le mouvement est lui-même périodique ⁹⁾.

Bref, la trajectoire est dense dans un domaine à trois, deux ou une dimension, suivant le cas. Cette forme du résultat fait prévoir comment nos propositions se généralisent pour le cas où le nombre des dimensions est supérieur à trois.

Budapest, le 6 mars 1913.

DÉNES KÖNIG.
ADOLPHE SZÜCS.

⁹⁾ Il ne serait pas difficile à établir que tous les résultats subsistent si l'on considère seulement la trajectoire que le mobile parcourt *après* avoir occupé une position arbitraire. On peut, en effet, satisfaire aux inégalités énoncées dans le théorème de KRONECKER par un entier n positif.