ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 57.

1. *Zur Theorie des Opaleszenzlichtes;* *von Ragnar Lundblad.*

Die Frage, wie die Extinktion des Lichtes in Gasen zustande kommt, ist bereits öfters von verschiedenen Standpunkten aus behandelt worden, ohne daß sich eine allgemein angenommene Anschauung ergeben hätte. Die experimentellen Beiträge zur Diskussion sind sehr spärlich geblieben, wie es ganz natürlich ist in einem Falle, wo eigentliche Laboratoriumsversuche ausgeschlossen sind wegen der Geringfügigkeit des zu beobachtenden Effektes in experimentell herstellbaren Gasschichten. Die Forschung ist bis jetzt hauptsächlich auf die Extinktion in den langen Schichten der irdischen Atmosphäre beschränkt gewesen. Die Zusammensetzung der atmosphärischen Schichten ist aber unserer Beeinflussung entzogen, und die Bemühungen der Wissenschaft sind darum kaum weiter gedungen als bis zur ziemlich rohen Bestätigung der bekannten Rayleighschen Gesetze der Extinktion und des Polarisationszustandes des zerstreuten Lichtes. Was sich aber *hinter* der Rayleighschen Formel

$$h = \frac{32 \pi^3 (n - 1)^2}{3 N \lambda^4}$$

verbirgt, ist stets eine theoretische Frage geblieben, und die Theorie hat während der letzten zwei Jahrzehnte schon mehrere verschiedene Antworten versucht.

Als diese Formel zum ersten Male in ihrer obigen Gestalt abgeleitet wurde¹⁾, erfolgte dies unter der Voraussetzung, daß die Extinktion durch die Anwesenheit kleiner dielektrischer Kugeln im Medium verursacht würde. N wäre dann die Anzahl der Kugeln in der Volumeinheit und n der Brechungs-exponent des durch die eingebetteten Teilchen modifizierten Mediums. Die Ableitung schloss sich also nahe an diejenigen Vorstellungen an, welche die früheren Theorien desselben

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 375. 1899.

Verfassers begründeten und welche die Extinktion in der Atmosphäre *durch deren Staubgehalt* erklären wollten.

Schon in der angeführten Abhandlung sprach indessen Lord Rayleigh einen neuen Gedanken aus, der bald die älteren Vorstellungen in der allgemeinen Auffassung ablöste. Er fragte sich, ob nicht schon die Gasmoleküle selber eine Inhomogenität des Mediums involvieren müßten, die sich in einer Extinktion kundgäbe. Das Resultat konnte er folgendermaßen zusammenfassen: „We may conclude that the light scattered from the molecules would suffice to give us a blue sky, not so very greatly darker than that actually enjoyed.“ Die Extinktion durch den Staub wurde also mit einer Extinktion *durch die einzelnen Moleküle* ersetzt.

Für die drei Jahre jüngere Theorie von Planck¹⁾ wurde diese Auffassung vom Ursprung der Extinktion maßgebend. Auch Planck sucht die Ursache der Extinktion in der Wirkung der einzelnen Moleküle und schließt dabei ausdrücklich jegliche Inhomogenität in Gebieten, die groß sind gegen die molekularen Entfernungen, aus. Was er in erster Linie beabsichtigt, ist, den inneren Mechanismus ausfindig zu machen, und er zieht zu diesem Zwecke seine frühere Theorie über die Strahlungsdämpfung von Resonatoren heran. Die Gleichung des schwingenden Dipols ist nach Planck²⁾

$$Kf + Lf'' - \frac{2}{3c^3} f''' = Z_0',$$

wo f das elektrische Moment des Dipols, Z_0' die erregende Feldstärke und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet und K und L Konstanten sind. Das dritte Glied dieser Gleichung ergibt gerade die Dämpfung durch Strahlung, und demnach ist immer dieses Glied als das Charakteristische der Planckschen Theorie angesehen worden.

Diese Theorie ist jedoch nicht Einwänden seitens einiger Forscher entgangen. Zuerst wandte sich Mandelstam³⁾ in einer Reihe von Aufsätzen, dann auch Oseen⁴⁾ dagegen. Was ihnen bedenklich erschien, war gerade das Glied $-\frac{2}{3c^3} f'''$.

1) M. Planck, Berl. Ber. 1902. p. 470; 1904. p. 740.

2) M. Planck, Wied. Ann. 60. p. 591. 1897.

3) L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 23. p. 626. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 608. 1907; 9. p. 308 u. 641. 1908.

4) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. p. 341. 1916.

Sie wollten zeigen, daß die genauere Durchrechnung an der rechten Seite ein ebenso großes Glied erscheinen ließe und daß infolgedessen die Extinktion im Falle optisch homogener Substanzen in Fortfall käme. Gans und Happel¹⁾ sowie Lorentz²⁾ glaubten dagegen, an dem angefochtenen Gliede noch festhalten zu müssen, wenn es sich um ein Gas handelte. Die von Mandélsam angeführten Gründe seien nur für die Kristalle überzeugend, wo die Moleküle geordnet sind; aber für die Gase, wo jedes Molekül sich nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen bewegt und die Moleküle folglich völlig unregelmäßig verteilt sind, sei der Beweis nicht stichhaltig. Hier treten uns also *die statistischen Eigenschaften der Gase* als entscheidender Grund entgegen. Aber nur *dadurch*, daß sie dem Strahlungsgliede den Eintritt in die Schwingungsgleichung ermöglichen.

Daß die statistischen Eigenschaften beobachtbaren Einfluß auf die Opaleszenzstrahlung ausüben müssen, war bereits ein paar Jahre vorher von Smoluchowski³⁾ ausgesprochen. Die Vorstellungen über den Mechanismus aber waren bei ihm gänzlich andersartig. Denn er untersuchte die statistischen *Dichteschwankungen*, die sich *in endlichen Volumelementen* eines Gases abspielen, am auffallendsten in der Nähe des kritischen Punktes, und folgerte, daß sie eine „Körnigkeit“ der Struktur bildeten, welche Opaleszenz erregen müßte, und zwar aus denselben Gründen, wie sie Lord Rayleigh für seine erste nichtmolekulare Theorie entwickelt hatte.

Daß auch die Dichteschwankungen gerade zur Rayleighschen Formel führen, wurde etwas später von Einstein⁴⁾ an der Hand der Maxwellschen Mediumdynamik streng bewiesen. Ein etwas einfacherer, aber nicht völlig strenger Beweis ist auf denselben Grundlagen von Lorentz⁵⁾ geliefert.

Diese beiden Quellen der Opaleszenzstrahlung, die molekulare Dämpfungsstrahlung und die Opaleszenzstrahlung der groben Dichteschwankungen, sind sie nun im Grunde eine und

1) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**, p. 291. 1900.

2) H. A. Lorentz, Proc. Amsterd. **12**, p. 92. 1910.

3) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, p. 205. 1908.

4) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, p. 1275. 1910.

5) H. A. Lorentz, Les Théories statistiques en Thermodynamique, p. 86. Leipzig, B. G. Teubner. 1916.

dieselbe, oder stellen sie zwei verschiedene Erscheinungen dar? Smoluchowski scheint geneigt zu sein, die Frage in letzterem Sinne zu beantworten. Nachdem er für Luft im Normalzustande einen Extinktionskoeffizienten vom Betrage $h = 3 \cdot 10^{-8}$ aus den Dichteschwankungen berechnet hat, schreibt er¹⁾: „Nach Lord Rayleigh ist die Luft ein trübes Medium, dessen Teilchen T die Luftmoleküle selbst sind, und daraus erklärt sich die blaue Farbe des Himmels und die Lichtabsorption in der Erdatmosphäre. Rayleighs Berechnung ergibt für h (unter Annahme $N = 4 \cdot 10^{19}$) den Wert $7 \cdot 10^{-8}$. Obige Rechnung würde also beweisen, daß auch die lokalen Dichteunterschiede dabei in merklicher Weise mitspielen.“

Das Verdienst, diese Frage zu einem aktuellen Probleme gemacht zu haben, gebührt jedoch Oseen²⁾, indem er die Extinktion in einen Rayleigh-Planckschen und einen Keesom-Einsteinschen Teil zerlegte, welche beide jeder für sich eine Extinktion vom Rayleighschen Betrage bewirken sollten, im ganzen also

$$h = 2 \cdot \frac{32 \pi^3 (n - 1)^2}{3 N \lambda^4}.$$

Da dieses Ergebnis gewiß mit den Erfahrungen unverträglich ist, folgert er ganz richtig, daß in den Theorien irgendwo ein Fehler stecken müsse, sei es, daß schon die Maxwell'schen Gleichungen fehlerhaft seien oder daß die Strahlungsdämpfung der Planckschen Dipole weggelassen solle.

Um diesen Problemen gerecht zu werden, scheint es mir unumgänglich zu sein, die beiden Ursachen der Extinktion von molekularen Gesichtspunkten aus zu untersuchen. Unsere Kenntnisse über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Medien sind in den letzten Jahren durch Arbeiten von Sommerfeld³⁾, Esmarch⁴⁾, Nathanson⁵⁾ u. a. erheblich vertieft worden. Die Ergebnisse der neuen Betrachtungsweise hinsichtlich der Extinktion zu ermitteln, ist

1) M. v. Smoluchowski, l. c. p. 217.

2) C. W. Oseen, *Physik. Zeitschr.* 17. p. 233. 1916.

3) A. Sommerfeld, *Physik. Zeitschr.* 8. p. 841. 1907.

4) W. Esmarch, *Ann. d. Phys.* 42. p. 1257. 1913.

5) L. Nathanson, *S.-A. Krak. Anz. (Bull. intern.) A.* 1914. p. 335 und 29 *S. Beibl.* 88. p. 1083. 1914.

das Ziel dieses Aufsatzes. Möglicherweise sind einige diesbezügliche Resultate zuvor von Nathanson erkannt; seine Arbeit war mir jedoch des Krieges halber noch nicht zugänglich.

§ 1. Definition des Dichtezustandes.

Wir wollen uns im folgenden auf Gase beschränken, schließen also von vornherein aus unseren Überlegungen die Trübungen in Flüssigkeiten nahe am kritischen Punkte und in Lösungen am Entmischungspunkte aus. Das Gas wollen wir ein beliebiges Volumen ausfüllend denken, schneiden aber durch die auf irgendein Koordinatensystem bezüglichen Bedingungen

$$0 < x < L,$$

$$0 < y < L,$$

$$0 < z < L$$

einen Würfel aus, wo wir die physikalischen Verhältnisse ins Auge fassen wollen.

Die mittlere Dichte ϱ_0 soll im Würfel überall dieselbe sein. Wegen den Molekularbewegungen schwankt jedoch die Dichte in jedem Raumelemente um jenen Wert, so daß sie in einem bestimmten Augenblicke nicht ϱ_0 , sondern $\varrho = \varrho_0(1 + \delta)$ beträgt, wo δ eine kleine bald positive, bald negative Zahl ist.

Um unsere Aufgabe mathematisch formulieren zu können, müssen wir noch von der Dichte in einem Punkte (x, y, z) sprechen. Damit soll einfach die mittlere Dichte gemeint werden in einem Raumelemente, z. B. einer Kugel, die um den Punkt gelegt wird, und die möglichst klein gewählt werden soll, aber dennoch so groß, daß sie eine große Anzahl Moleküle umfaßt.

Die Dichteverteilung wird natürlich eine sehr verwickelte Funktion der Koordinaten sein, ist aber immer durch eine dreidimensionale Fourierreihe darstellbar. Wir setzen demgemäß

$$(1) \quad \varrho = \varrho_0(1 + \delta) = \varrho_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L}(mx + ny + pz)} \right),$$

wo m , n und p jedes für sich die Reihe der negativen und positiven ganzen Zahlen durchlaufen sollen und die Koeffizienten B nur vom absoluten Betrage der Parameter m , n und p , nicht von ihrem Zeichen abhängig sind.

Damit die Dichteverteilung im phänomenologischen Sinne völlig bestimmt sein mag, müssen noch die statistischen Gesetze ermittelt werden, welche die Größenverteilung der Koeffizienten B regeln. Diese Gesetze können, wie es Einstein¹⁾ gezeigt hat, aus den thermodynamischen Eigenschaften des Gases mittels des Boltzmannschen Prinzips gefunden werden. S sei die Entropie eines Zustandes von der statistischen Wahrscheinlichkeit W , R die Gaskonstante und N' die Zahl der Moleküle in einem Grammmolekül. (Wir reservieren die Bezeichnung N für die Molekülzahl in einem Kubikzentimeter.) Dann schreibt sich dieses Prinzip:

$$S = \frac{R}{N'} \lg W + \text{konst.}$$

Die Konstante legen wir durch die Bedingung fest, daß W für das Entropiemaximum von der Größenordnung Eins sein muß, setzen mithin

$$(2) \quad W = e^{\frac{N'}{R} (S - S_0)},$$

wo S_0 die größtmögliche Entropie des Systems ist. Streng genommen wäre hier noch ein Faktor von der Größenordnung Eins beizugeben, weil W auch für das Entropiemaximum natürlich doch nicht genau Eins beträgt. Da wir jedoch nur die verhältnismäßige Wahrscheinlichkeit verschiedener Zustände brauchen, können wir ihn ohne Gefahr unterdrücken.

Die Entropie unseres Systems beruht auf den jedesmaligen Werten der Parameter B , und wir nehmen an, daß jene Abhängigkeit ermittelt ist, so daß S als Funktion der B bekannt ist. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, ordnen wir ferner einstweilen die B in einer beliebigen Reihe $B_1, B_2, \dots B_n$. Dann ist nach (2) die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Gebiete zwischen B_1 und $B_1 + dB_1, B_2$ und $B_2 + dB_2$ usw. befindet:

$$dW = e^{\frac{N'}{R} (S - S_0)} dB_1 dB_2 \dots dB_n.$$

Halten wir alle B bis auf eines, z. B. B_i , innerhalb der angegebenen Grenzen fest und fragen nach der relativen Wahrscheinlichkeit der Werte von B_i , so wird demgemäß die Antwort offenbar in einer analogen Gleichung

1) A. Einstein, l. c.

$$(3) \quad dW = e^{\frac{N'}{R}(S(B_i) - S(0))} dB_i$$

enthalten sein, wo wieder ein konstanter Faktor unterdrückt ist.

Wir wollen zunächst die Funktion $S(B_i)$ bestimmen. Eine jede Entropieänderung dS ist mit der begleitenden Energieänderung dU des Systems und der Arbeit dA , die man von außen beizubringen hat, um die elementare Veränderung durch äußere Einwirkung zu bewirken, durch die bekannte Gleichung

$$dS = \frac{dU - dA}{T}$$

verbunden. Der Energiegehalt unseres Systems ist aber vom Schwankungsprozesse unabhängig, somit $dU = 0$. Desgleichen sind die Temperaturschwankungen von den Dichteschwankungen unabhängig, so daß man für T die Temperatur des thermodynamischen Gleichgewichtes einsetzen darf. Die gesamte Entropieänderung, während B_i von Null bis auf seinen zufälligen Wert wächst, kann mithin durch einfache Integration gefunden werden:

$$S(B_i) - S(0) = -\frac{A}{T},$$

wo A die dem ganzen Systeme während des ganzen Vorganges zuzuführende Arbeit ist.

Die von der Masseneinheit eines Gases bei einer Dichteänderung $d\rho$ geleistete Arbeit ist

$$-\frac{p d\rho}{\rho^2} = -\frac{RT}{M} \cdot \frac{d\rho}{\rho}$$

und folglich, wenn ρ' die Dichte in einem Punkte für $B_i = 0$ bedeutet,

$$(4) \quad S(B_i) - S(0) = \frac{R}{M} \int \frac{d\rho}{\rho} \cdot \rho' dx dy dz,$$

wo das Integral in bezug auf ρ von ρ' bis zu der durch B_i bestimmten Dichte, in bezug auf die Koordinaten über den ganzen Würfel zu erstrecken ist.

Die Größe ρ' geht aus (1) hervor, falls man die mit B_i multiplizierten Glieder aus der Summation ausschließt. Wenn man diese Glieder in ein trigonometrisches Produkt zusammenfaßt und die Bezeichnung mit drei Indizes wieder einführt, läßt sich (1) schreiben

$$\varrho = \varrho' + 8 \varrho_0 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L},$$

wo m' , n' und p' diejenigen Indizes sind, die B_i charakterisieren. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (4) wird erhalten

$$S(B_i) - S(0) = \frac{R}{M} \int \frac{8 \varrho_0 d B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L}}{\varrho' + 8 \varrho_0 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L}} \cdot \varrho' dx dy dz.$$

Im Nenner ist das zweite Glied gegen das erste sehr klein. Wenn wir uns mit den zweiten Potenzen in B begnügen, können wir deshalb setzen

$$\begin{aligned} S(B_i) - S(0) &= \frac{R}{M} \cdot 8 \varrho_0 \int d B_{m' n' p'} dx dy dz \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \\ &\quad \cos \frac{\pi p' z}{L} \left[1 - 8 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cdot \cos \frac{\pi n' y}{L} \cdot \cos \frac{\pi p' z}{L} \right] \\ &= - \frac{R}{M} \cdot 8 \varrho_0 \cdot \frac{L^3 B_{m' n' p'}^2}{2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3) bekommen wir endlich das Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = e^{-\frac{4 N' \varrho_0 L^3}{M} \cdot B_{m' n' p'}^2} d B_{m' n' p'},$$

oder wenn wir noch anstatt N' die Anzahl N der Moleküle in 1 cm^3 des Gases einführen

$$(5) \quad dW = e^{-\frac{4 N L^3}{M} B_{m' n' p'}^2} d B_{m' n' p'}.$$

Dieses Verteilungsgesetz, das die statistische Definition des Dichtezustandes abgibt, ist dem Gauss'schen Fehlergesetze analog. Positive und negative Abweichungen sind ebenso wahrscheinlich, d. h. wenn wir mitteln

$$\overline{B_{m n p}} = 0,$$

während das mittlere Quadrat gegeben ist durch die Gleichung

$$(6) \quad \overline{B_{m n p}^2} = \frac{1}{8 N L^3},$$

und die mittlere vierte Potenz durch die Gleichung

$$(6a) \quad \overline{B_{m n p}^4} = \frac{3}{64 N^2 L^6}$$

§ 2. Über die Eigenschaften der molekularen Resonatoren.

Die historische Einleitung, welche diesem Aufsätze vorausgeschickt wurde, mag wohl gezeigt haben, wie wenig wir zurzeit von einer abgeschlossenen Extinktionstheorie sprechen dürfen, wie weit die Theorie noch von ihrer endgültigen Vollendung entfernt ist. Diese Sachlage kann nicht ohne Einfluß auf unsere Darstellung bleiben. Sie bewirkt, daß die Aufgabe, eine möglichst umfassende Theorie zu schaffen, gegenüber derjenigen, eine einfachere, aber durchsichtigere zu gestalten, zurücktreten muß.

Deswegen nehmen wir an, daß die Gasmoleküle alle *derselben Art* sind und daß sie in optischer Hinsicht durch die Schwingungen *eines einzigen, isotrop gebundenen Elektrons* erschöpfend gekennzeichnet sind. Als Molekularresonatoren betrachtet, seien sie durch ihre Frequenz ω_0 im ungedämpften Zustande und durch ihre Dämpfung bestimmt. Außer der Strahlung nehmen wir dabei noch eine dissipative Kraft an. Die Schwingungsgleichung des Resonators wird demnach

$$(7) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + g \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p - \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d^3 p}{dt^3} = \frac{e^2}{m} \mathfrak{E},$$

wo p das elektrische Moment des Dipols, m die Masse und e die Ladung des Elektrons bedeutet, g eine Konstante ist und endlich $\mathfrak{E}$ für die erregende elektrische Kraft steht.

§ 3. Über die erregende Kraft.

Die erregende elektrische Kraft fassen wir als die Summe von der einfallenden Welle und den Zustrahlungen aller übrigen Resonatoren des Systems auf. Das heißt, wir setzen

$$(8) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \sum_M \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

Hier bezeichnet der Index M' , daß die rot am Orte des soeben betrachteten Moleküls M' zu vollführen sind. Die Summation ist über sämtliche Moleküle M , nur M' ausgenommen, auszuführen. Der Abstand zwischen den Molekülen M' und M ist mit r bezeichnet. Endlich bedeutet $\mathfrak{E}_0$ die Außenwelle und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Der obige Ansatz (8) schließt noch eine wichtige Voraussetzung ein, und zwar, daß die *Maxwellschen Gleichungen in*

den intermolekularen Zwischenräumen gültig seien. Um dessen gewiß zu sein, macht Planck¹⁾ die Einschränkung, daß der Abstand zweier benachbarter Moleküle groß sei gegen die Lineardimensionen eines Moleküls. Ich glaube, daß es besser ist, die Voraussetzung in ihrer obigen Gestalt beizubehalten. Denn selbst die Plancksche Annahme wird uns gegenwärtig nicht mehr unbedingt von den theoretischen Bedenken gegenüber den Maxwellschen Gleichungen befreien. Hat doch Oseen²⁾ gezeigt, daß insofern das Atom nach dem Bohrschen Modelle konstruiert ist, die Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen innerhalb einer umschließenden Kugel vom Radius 10^{-4} cm suspendiert ist, und daß also jene vielfach benutzte Annahme über die innere Bauart mit einer Verwendung der Maxwellschen Gleichungen in Gasen bei gewöhnlichem Drucke nicht zu vereinigen sei. Vom theoretischen Standpunkte aus wird man mithin zunächst die Hinlänglichkeit der Einschränkung von Planck bezweifeln. Vom experimentellen Standpunkte aus muß man andererseits ihre Notwendigkeit anzweifeln. Denn die Erfahrung hat die Lorentzsche Elektronentheorie als sehr geeignet erwiesen, die wirklich beobachteten optischen Erscheinungen auch bei sehr großen Dichten darzustellen. Indem wir uns in bezug auf die Benutzung der klassischen Elektrodynamik sowie betreffs der Eigenschaften der molekularen Resonatoren bzw. deren Schwingungsgleichung auf die Basis der Lorentzschen Theorie stellen, mögen wir darum von vornherein einen Gültigkeitsbereich unserer Theorie erwarten, welcher, insofern wir die Rechnungen genau durchzuführen vermögen, betreffs der erlaubten Lagerungsdichte der Teilchen wahrscheinlich mit der Lorentzschen zusammenfallen wird.

Das erste Glied im Ausdrucke für die erregende Kraft ist die einfallende Welle. Nach diesem Ansätze würde also diese Welle nach den im Vakuum herrschenden Gesetzen auch in den ponderablen Körper eindringen. Aber von einer solchen Welle spüren wir in der Tat nichts. Statt deren breitet sich vom Rande des Mediums eine andere Welle aus, deren Phasengeschwindigkeit im allgemeinen von der Geschwindigkeit im

1) M. Planck, l. c. p. 476.

2) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 16. p. 395. 1915.

Vakuum verschieden ist. Das ist nur so zu erklären, daß die Strahlung der molekularen Resonatoren einen Bestandteil enthält, der die einfallende Welle auslöscht, und dazu noch einen, der als eine im Medium mit der Phasengeschwindigkeit fortschreitende Welle zum Vorschein kommt.

Diese Betrachtungsart hat sich in den letzten Jahren immer bewußter durchgearbeitet. Einige hierher gehörige Vorstellungen verspürt man bereits in einer im Jahre 1905 erschienenen Arbeit von v. Laue.¹⁾ Genauer werden sie von Esmarch²⁾ in seiner wichtigen Abhandlung über die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in ponderablen Körpern entwickelt. Er untersucht die Veränderungen der Primärwelle beim Durchgang durch die nächste Resonatorenschicht wegen der dort erregten Strahlung und zeigt, daß sie sich in einer von der Signalgeschwindigkeit abweichenden Phasengeschwindigkeit äußern. Beim Integrieren findet er sodann für die durchgehende Welle eine Formel, die ein Glied enthält, das gerade die einfallende Welle aufhebt.

Das wichtige Ergebnis, welches in dieser Entdeckung steckt, ist wohl am klarsten von Oseen³⁾ ausgesprochen. Er hat auch eine sehr glückliche mathematische Methode zur Trennung der beiden Bestandteile der Resonatorstrahlungen ausgearbeitet, deren wir uns im folgenden bedienen wollen.

Diese Methode⁴⁾ sowie die ursprüngliche Esmarchsche setzt jedoch voraus, daß die Resonatoren so dicht gelagert sind, daß man das Summieren über alle Resonatoren durch ein Integrieren über alle Volumenelemente ersetzen darf, und dies konstituiert eine neue Annahme, die auch für uns unvermeidlich ist, daß *die Moleküllagerung eine so dichte ist, daß die molekulare Diskontinuität dabei ohne Einfluß ist, oder doch die augenblicklichen Abweichungen beim Mitteln über die kleinsten für Beobachtungen ausreichenden Zeitintervalle sich aufheben.* Freilich werden wir nachträglich die praktische Bedeutung dieser Einschränkung, die sich in die meisten Theorien während des Ganges der Untersuchung einschleicht, weit geringfügiger finden, als man anfänglich zu vermuten geneigt wäre.

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 18. p. 550. 1905.

2) W. Esmarch, l. c.

3) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 16. p. 404. 1915.

4) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. p. 1. 1915.

Unsere Voraussetzungen über die Lagerungsdichte lassen offenbar ein sehr weites Verwendungsgebiet für die Theorie zu. Wenn wir dieses Verhältnis ganz ausnutzen wollen, müssen wir aber unumgänglich die Unregelmäßigkeiten, welche in den Wechselwirkungen der Resonatoren auftreten, berücksichtigen. In der Regel ist dieses Problem nur durch eine ausweichende Voraussetzung behandelt worden, und auch wenn es, wie in einer neuerdings erschienenen Theorie von Buchwald¹⁾, im ersten Ansatz vollauf berücksichtigt ist, ließen sich jedoch die Rechnungen nicht bis zu verwertbaren Formeln durchführen. Das Problem in seiner größten Weite würde auch gewiß schwierig sein. Wir wollen es nur in der ersten Näherung behandeln, und zwar in der Weise, daß wir bei der Ermittlung des zerstreuten Lichtes die Abweichungen der Resonatoren-schwingungen vom Schwingungszustande im homogenen Körper mit in die Berechnung ziehen, bei der Berechnung dieser Abweichungen gleichwohl so rechnen, als ob die Resonatoren-schwingungen ganz regelmäßig verliefen.

§ 4. Berechnung der erregenden Kraft und des Resonator-momentes.

Unter dem Ausdrucke „die äußere Welle“ wollen wir im folgenden die Resultierende aller Erregungen verstehen, die von schwingenden Elektronen außerhalb des in Betracht stehenden kubischen Gebietes herrühren, mithin in erster Linie die von den Elektronen der Lichtquelle stammenden Erregungen, aber sodann auch die von den äußeren Molekülen des Gases ausgehenden.

Zu der Erregung durch die äußere Welle sind nach (8) noch die Einzelerregungen der Moleküle des Würfels hinzuzufügen, und, wie bereits erwähnt, wäre das durch eine Integration auszuführen. Durchaus unbedenklich ist ein solcher Übergang von Summation zu Integration jedoch nicht. Nahe an dem Molekül, dessen erregende Kraft wir berechnen wollen, müssen wir ja stets unregelmäßig angeordnete Nachbarmoleküle annehmen, die mitunter sehr große Wirkungen ausüben. Diesen Umstand würde die Integration gänzlich verwischen, was wenigstens vor einer diesbezüglichen Untersuchung nicht er-

1) E. Buchwald, Ann. d. Phys. 52. p. 775. 1917.

wünscht wäre. Wir wollen darum den Würfel in drei Teile zerlegen, indem wir um das Molekül rings zwei Kugelflächen mit den Radien r_0 und r_1 legen. Der Radius r_0 sei so klein abgemessen, daß die zugehörige Kugelfläche nie von dem Mittelpunkte eines Fremdmoleküls geschnitten wird. Er wird somit mit der Länge, die in der kinetischen Gastheorie als „Moleküldurchmesser“ figuriert, zusammenfallen. Auch der Radius r_1 sei klein gegen die Wellenlänge, doch so, daß der Kugelraum immer noch möglichst viele Moleküle enthält. Da die erregende elektrische Kraft offenbar unter Ausschluß der vom betrachteten Molekül selber erzeugten elektrischen Kräfte zu berechnen ist, gibt die innere Kugel r_0 zu ihr keinen Beitrag. Von den Molekülen in der Kugelschicht $r_0 < r < r_1$ kommen, wie erwähnt, unregelmäßige, aber zum Teil starke Felder. Hier wollen wir die Summation beibehalten. Endlich liefern die Moleküle im dritten Raumgebiete $r > r_1$ einen Anteil, der im großen und ganzen als regelmäßig angesehen werden darf. Zu seiner Berechnung wollen wir Integration benutzen. Wir schreiben folglich:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E}_0 + \sum_{r_0 < r < r_1}^{(M)} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \\ &+ \int_{r > r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N(x, y, z) d\omega, \end{aligned} \right.$$

wo $N(x, y, z)$ die auf die Volumeinheit bezogene Molekülzahl an einem Punkte (x, y, z) im Volumelement $d\omega$ ist.

Die Gleichung (9) legt $\mathfrak{E}'$ als Funktion des Schwingungszustandes im ganzen Körper fest; andererseits ist jedes einzelne p durch die lokale $\mathfrak{E}'$ wegen (7) bestimmt. Wir vermögen mithin $\mathfrak{E}'$ sowohl wie p nur durch sukzessive Näherungen zu ermitteln. Laut der Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen wollen wir zuerst $\mathfrak{E}'$ aus (9) berechnen unter der Annahme, daß p überall genau so ist, wie wenn keine Dichteschwankungen stattfänden. Wir bekommen dadurch $\mathfrak{E}'$ in der ersten Annäherung, die ersten Potenzen der Parameter B_{mnp} allein enthaltend, und aus (7) auch p in derselben Annäherung. Wenn wir sodann den neuen Wert von p der Berechnung der Feldstärke in oder außer dem Würfel zugrunde

legen, erhalten wir diese in der zweiten Annäherung, B_{mn} , in der zweiten Potenz enthaltend. Mit diesem bleiben wir stehen. Wenn wir die Näherungen noch weiter fortsetzen sollten, so würden wir allerdings neue Glieder auch in B und B^2 auffinden; sie sind indes gegen die vorherigen zu vernachlässigen.

Bevor wir uns an die erstmalige Integration von (9) machen, wollen wir einen Vektor $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung

$$(10) \quad N_0 \mathfrak{p} = \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)}$$

eingeführen, wo N_0 die mittlere Molekühlzahl und n_0 der normale Brechungsindex des Gaswürfels ist. Natürlich dürfte n_0 etwaigenfalls komplex sein. Der Ansatz (10) besagt offenbar, daß wir eine ebene, in der Richtung der x -Achse fortlaufende Welle allein betrachten. Weil wir in diesem Teile der Analyse $\mathfrak{p}$ von den Dichteschwankungen unabhängig voraussetzen, wird auch $\mathfrak{P}$ von ihnen unabhängig sein. Im folgenden betrachten wir demgemäß $\mathfrak{P}$ als einen im ganzen Würfel konstanten Vektor.

Das Integral in (9) läßt sich unter Benutzung des Ausdruckes (10) schreiben

$$(11) \quad I = \int_{r > r_1} \frac{N(x, y, z)}{N_0} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega;$$

aber nach (1)

$$\frac{N(x, y, z)}{N_0} = \frac{\varrho(x, y, z)}{\varrho_0} = 1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)},$$

mithin

$$I = \int_{r > r_1} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \int_{r > r_1} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega.$$

Die rot sind am Orte des Moleküls M' , also in bezug auf die Koordinaten (x', y', z') , nicht auf (x, y, z) , auszuführen. Wir können sie daher vor das Integralzeichen rücken und bekommen somit:

$$(12) \quad I = \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} J_1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} J_2,$$

wo

$$(13) \quad J_1 = \oint_{r > r_1} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\omega$$

und

$$(14) \quad J_2 = \oint_{r > r_1} e^{i\left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega n_0}{c}\right)x + i\frac{\pi}{L}(ny + pz)} \cdot \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\omega.$$

Das Integral J_2 schreibt sich einfacher, wenn wir bereits an diesem Orte einen nachher auftretenden Vektor

$$(15) \quad \mathfrak{U} = i \frac{c}{\omega} \left(\frac{\omega n_0}{c} - \frac{\pi m}{L} \right) - j \frac{c}{\omega} \frac{\pi n}{L} - k \frac{c}{\omega} \frac{\pi p}{L}$$

eingeführen und außerdem die Koordinaten x, y, z als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{R}$ auffassen. Wir bekommen alsdann

$$(14a) \quad J_2 = \oint_{r > r_1} e^{-i\frac{\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\omega.$$

Die Volumintegrale (13) und (14a) lassen sich leicht in Flächenintegrale umformen. Wir haben zunächst

$$\begin{aligned} \Delta_M \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}; \\ \Delta_M e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} &= -\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}}; \\ \Delta_M e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} &= -\frac{\omega^2 A^2}{c^2} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}; \end{aligned}$$

wo

$$A^2 = \mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{U}_y^2 + \mathfrak{U}_z^2.$$

Aus diesen Ausdrücken folgern wir

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{c^2} J_1 &= \oint_{r > r_1} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\omega; \\ -\frac{\omega^2}{c^2} J_2 &= \oint_{r > r_1} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} J_1 &= \Re \int_{r > r_1} \Delta_M e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\omega; \\
 -\frac{\omega^2 A^2}{c^2} J_2 &= \Re \int_{r > r_1} \Delta_M e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\omega.
 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der dritten dieser Gleichungen von der ersten und der vierten von der zweiten gehen zwei Gleichungen hervor

$$\begin{aligned}
 &\frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 - 1) J_1 \\
 &= \Re \int_{r > r_1} \left[e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} - \Delta_M e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] d\omega,
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &\frac{\omega^2}{c^2} (A^2 - 1) J_2 \\
 &= \Re \int_{r > r_1} \left[e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} - \Delta_M e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] d\omega,
 \end{aligned}$$

die mittels des Greenschen Satzes unmittelbar auf Flächenintegrale transformierbar sind:

$$(16) \quad \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 - 1) J_1 = \Re \int \left[e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

$$(17) \quad \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 - 1) J_2 = \Re \int \left[e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

wo das Flächenelement durch $d\sigma$ und die Normale nach außen mit ν bezeichnet ist. In beiden Fällen ist die Integration sowohl über die äußere Begrenzung F des Würfels wie über die Kugeloberfläche $r = r_1$ zu vollstrecken.

Unsere Aufmerksamkeit richten wir jetzt in erster Reihe auf die Anteile des Integrals I , die von der Kugeloberfläche herühren. Wir haben Differentialausdrücke zu untersuchen von den beiden Typen

$$(18) \quad K_1 = \text{rot}_M' \text{rot}_M' \int_{r=r_1} \mathfrak{F}(M) \cdot \frac{d}{d\nu} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma$$

und

$$(19) \quad K_2 = \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \int_{r=r_1} \frac{d\mathfrak{F}(M)}{d\nu} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

wo $\mathfrak{F}$ ein beliebiger Vektor sei. Wir gehen von der Formel aus

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) &= \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{c r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \mathfrak{F}(M) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{r^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{3i\omega}{c r^2} - \frac{3}{r^3} \right) (r \times \mathfrak{F}(M)) \right] e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}. \end{aligned} \right.$$

Der Vektor r weist dabei von M' nach M . Es folgt

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{r=r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \frac{d}{d\nu} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) d\sigma &= \int_{r=r_1} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r^2} - \frac{2i\omega}{c r^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{r^4} \right) \mathfrak{F}(M) - \frac{r}{r^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r^2} - \frac{6i\omega}{c r^3} - \frac{9}{r^4} \right) (r \times \mathfrak{F}(M)) \right] \\ &\quad \left. e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} d\sigma + \frac{i\omega}{c} \int_{r=r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Die Verwertung der Integrale (18) und (19) soll so gelenkt werden, daß das Endergebnis durch den Wert der Funktion $\mathfrak{F}$ und ihrer Ableitungen im Punkte M' bestimmt und in einer Potenzreihe von r_1 geordnet erscheinen wird. Dies kann erreicht werden durch die Entwicklungen

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F}(M) &= \mathfrak{F}(M') + (r \times \text{grad}) \mathfrak{F}(M') + \frac{1}{2!} (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') \\ &\quad + \frac{1}{3!} (r \times \text{grad})^{(3)} \mathfrak{F}(M') + \frac{1}{4!} (r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M') + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} &= e^{i\omega t} - \frac{i\omega r}{c} e^{i\omega t} - \frac{1}{2!} \frac{\omega^2 r^2}{c^2} e^{i\omega t} \\ &\quad + i \cdot \frac{1}{3!} \frac{\omega^3 r^3}{c^3} e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Es ist einleuchtend, daß diejenigen Glieder der Entwicklung (22), die in bezug auf den Vektor r von ungeradem Grade sind, keinen Beitrag zu den Integralen liefern können. Die geraden Glieder veranlassen dagegen die Entstehung einiger Integrale, die gefunden werden müssen, um die erwünschte

Verwertung des Integrals (21) zu erzielen. Es sind die nachstehenden

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{r=r_1} \left[\mathfrak{F}(M') - \frac{r}{r^2} [r \times \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma = \frac{8\pi}{3} r_1^3 \mathfrak{F}(M'); \\
 S_2 &= \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') - \frac{r}{r^2} [r \times (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\
 &= \frac{16\pi}{15} r_1^4 \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{8\pi}{15} r_1^4 \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M'); \\
 T_1 &= \int_{r=r_1} \left[\mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^3} [r \times \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma = 0; \\
 T_2 &= \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^3} [r \times (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\
 &= \frac{8\pi}{15} r_1^4 \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{8\pi}{5} r_1^4 \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M'); \\
 T_3 &= \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^2} [r \times (r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\
 &= \frac{16\pi}{35} r_1^6 \Delta_{M'} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{48\pi}{35} r_1^6 \Delta_{M'} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M').
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck für K_1 wäre jetzt nach (21) zu finden. Anstatt die langen Vektorformeln im Ergebnis hinzuschreiben, benutzen wir die obigen Verkürzungen; nur setzen wir sogleich $T_1 = 0$. Dann ergibt sich:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{\omega^2}{c^2 r_1^3} S_1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r_1^4} T_2 \right) e^{i\omega t} + \left(\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{c^4} S_1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2 r_1^3} S_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2 r_1^3} T_2 - \frac{1}{8 r_1^4} T_3 \right) e^{i\omega t} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega^6}{c^6} r_1 S_1 \right) i e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied ist bezüglich r_1 von der Dimension Null, das zweite von der Dimension r_1^2 und das dritte von der Dimension r_1^3 . Die Reihe weiter zu verfolgen ist nicht nötig.

In derselben Weise können wir den Differentialausdruck K_2 erledigen. Wir gehen von (20) aus, die wir an der Funktion

$$\frac{d\mathfrak{F}(M)}{d\nu} = - \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr}$$

verwenden;

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \int_{r=r_1} \left[- \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{c r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{r^3} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{3i\omega}{c r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \left(r \times \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr} \right) \right] e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Aber nach (22)

$$\frac{d \mathfrak{F}(M)}{d r} = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \text{grad}) \mathfrak{F}(M) + \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M) \\ + \frac{1}{2! r} (\mathbf{r} \times \text{grad})^{(3)} \mathfrak{F}(M) + \frac{1}{3! r} (\mathbf{r} \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M) + \dots$$

folglich mit denselben Verkürzungen wie in (24):

$$(25) \left\{ \begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{r_1^4} T_2 e^{i\omega t} - \left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1^3} S_2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^3}{c^3 r_1^3} T_2 - \frac{1}{6 r_1^4} T_3 \right) e^{i\omega t} \\ &+ \left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1} S_2 - \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{c^3 r_1} T_2 \right) i e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (24) und (25) ergeben endlich

$$(26) \left\{ \begin{aligned} K_1 - K_2 &= \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \int_{r=r_1} \left[\mathfrak{F}(M) \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{F}(M) \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma \\ &= e^{i\omega t} \left[\left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1^3} S_1 - \frac{5}{2 r_1^4} T_2 \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{c^4} S_1 + \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{c^3 r_1^3} S_2 \right. \right. \\ &- \frac{3}{4} \frac{\omega^3}{c^3 r_1^3} T_2 - \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{r_1^4} T_3 \left. \right) + i \cdot \left(- \frac{\omega^5 r_1}{3 c^5} S_1 - \frac{\omega^3}{c^3 r_1} S_2 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{c^3 r_1} T_2 \right) \right] = e^{i\omega t} \left[\left(\frac{8\pi}{3} \frac{\omega^3}{c^3} \mathfrak{F}(M') - \frac{4\pi}{3} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') \right. \right. \\ &+ 4\pi \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \left. \right) + r_1^2 \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} \mathfrak{F}(M') \right. \\ &+ \frac{6\pi}{5} \frac{\omega^3}{c^3} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^3}{c^3} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \\ &- \frac{2\pi}{15} \Delta_{M'} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') + \frac{2\pi}{5} \Delta_{M'} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \left. \right) \\ &- i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \left(\frac{\omega^3}{c^3} \mathfrak{F}(M') + \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') \right) \left. \right]. \end{aligned} \right.$$

Um die Abhängigkeit der Funktion (26) von der noch nicht festgelegten vektoriellen Funktion $\mathfrak{F}$ zu betonen, bezeichnen wir sie mit $K(\mathfrak{F})$. Als dann läßt sich (12) vermöge (16) und (17) folgendermaßen schreiben

$$(27) \quad I = I_0 + I_F,$$

wo

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0 &= \frac{c^2}{\omega^2(n_0^2-1)} K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega n_0 z}{c}} \right) \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \frac{c^2}{\omega^2(A^2-1)} K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega n \times \mathfrak{R}}{c}} \right) \end{aligned} \right.$$

und I_F anstatt der über die Oberfläche F des Würfels erstreckten Flächenintegrale steht. Wie ersichtlich, müssen also die Funktionen

$$K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right) \quad \text{und} \quad K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right)$$

ermittelt werden.

Infolge der Transversalität des Lichtes ist $\mathfrak{P}_x = 0$, folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} = 0$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -i \frac{\omega}{c} \mathfrak{U} \times \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}$$

Zudem hatten wir bereits

$$\Delta \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega}{c} n_0 x} = -\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}}$$

und

$$\Delta \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Delta^2 \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}.$$

Es folgt

$$\Delta \Delta \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} = \frac{\omega^4 n_0^4}{c^4} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}}$$

und

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} \times \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}};$$

$$\Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = \frac{\omega^4}{c^4} \Delta^2 \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} \times \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}};$$

$$\Delta \Delta \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = \frac{\omega^4}{c^4} \Delta^4 \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}.$$

Diese Ausdrücke ergeben zusammen mit (26):

$$\begin{aligned} K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right) &= \left[\frac{4\pi}{3} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 2) - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^4}{c^4} (n_0^2 - 1)(n_0^2 + 10) r_1^2 \right. \\ &\quad \left. + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^5}{c^5} (n_0^2 - 1) r_1^3 \right] \mathfrak{P} e^{i \omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)}; \end{aligned}$$

und

$$K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega \mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c}} \right) = \left[\frac{4 \pi}{3} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 2) - \frac{2 \pi}{15} \frac{\omega^4}{c^4} (A^2 - 1) (A^2 + 10) r_1^2 \right. \\ \left. + i \cdot \frac{8 \pi}{9} \frac{\omega^5}{c^5} (A^2 - 1) r_1^3 \right] \mathfrak{P} e^{i \omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \\ + \left[-4 \pi \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2 \pi}{5} \frac{\omega^4}{c^4} (A^2 - 1) r_1^2 \right] \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \times \mathfrak{P} e^{i \omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)}$$

Wenn wir die letzten zwei Resultate in (28) einführen, bekommen wir

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0 = \mathfrak{P} \left\{ \left[\frac{4 \pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^3 + 1} - \frac{2 \pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 10) r_1^2 + i \cdot \frac{8 \pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \right] \right. \\ e^{i \omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{4 \pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} - \frac{2 \pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_1^2 \right. \\ \left. \left. + i \cdot \frac{8 \pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \right] e^{i \omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \right\} + \mathbf{u} \left\{ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \right. \\ \left. \left[\frac{-4 \pi}{A^2 - 1} + \frac{2 \pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_1^2 \right] \mathbf{u} \times \mathfrak{P} e^{i \omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Die erregende Kraft in einem Gase läßt sich somit in eine unendliche Reihe von Wellenzügen zergliedern. Außer Gliedern, die dem Hauptgliede ganz analog gebaut sind, und die es nur betrifft des Betrages vergrößern oder verkleinern, treten noch Vektoren hinzu, deren Richtung mit $\mathfrak{P}$ nicht zusammenfällt.

Wir haben jetzt die erregende Kraft folgendermaßen in Komponenten zerlegt:

1. die einfallende äußere Welle $\mathfrak{E}_0$;
2. ein Oberflächenintegral I_F über die ganze Würfeloberfläche;
3. ein Oberflächenintegral I_0 über eine sphärische Fläche um den Aufpunkt;
4. eine Gliedersumme, die von den Molekülen innerhalb dieser Kugelfläche herkommt.

Das Glied I_F setzt sich zusammen aus einem Hauptgliede, dem geordneten Vorgange entsprechend,

$$(30) \quad \left\{ \frac{c^2}{\omega^2 (n_0^2 - 1)} \text{rot}_M, \text{rot}_M, \mathfrak{P} \int_F \left[e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] \right. \\ \left. \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\sigma \right.$$

und einer dreifach unendlichen Reihe von Gliedern, die auf den ungeordneten Dichteschwankungen beruhen:

$$(31) \left\{ \frac{c^2}{\omega^2 (A^2 - 1)} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \operatorname{rot}_M' \operatorname{rot}_M' \Re \int_{\mathcal{V}} \left[e^{-\frac{i \omega \mathbf{u} \times \Re}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i \omega \mathbf{u} \times \Re}{c}} \right] e^{\frac{i \omega}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)} d\sigma \right.$$

Nach Oseen¹⁾ wird der Ausdruck (30) die einfallende Welle genau kompensieren.

Die Glieder (31) werden überall im Würfel Felder erzeugen, die sich zwar im räumlichen Mittel aufheben, die aber dennoch stets die Felder, die auf den Schwankungsparametern B_{mnp} beruhen, an jedem Punkte in ganz gesetzmäßiger Weise beeinflussen. Man kann indessen darlegen, daß sie für die optischen Erscheinungen gänzlich belanglos sind.

Einmal erscheint nämlich das Oberflächenintegral in (31) mit dem Faktor

$$\frac{1}{A^2 - 1}$$

multipliziert, die von B_{mnp} abhängigen Glieder in (29) dagegen mit den Faktoren

$$\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u} \times \Re}{A^2 - 1}.$$

Sobald eine der Größen

$$\frac{c \pi}{\omega L} m, \quad \frac{c \pi}{\omega L} n, \quad \text{oder} \quad \frac{c \pi}{\omega L} p$$

groß ist — und wie wir sehen werden, wird nur dieser Fall von praktisch beobachtbarer Bedeutung sein —, geht jener gegen Null, diese aber gegen endliche Grenzwerte.

Auch wenn die Glieder (31) nicht verschwänden, würden sie indessen schwerlich merkbar mitspielen. Um diesen Punkt klarer zu gestalten, schreiben wir zuerst der Einfachheit halber

$$\mathcal{I}_0 = \mathfrak{E}_1 e^{i \omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} + \sum_{m_1 n_1 p_1} \mathfrak{E}_2 e^{i \omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \Re}{c} \right)},$$

und haben sodann nach (31) ein gewisses Zusatzglied hinzuzufügen, so daß die lokale erregende Kraft

1) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. p. 18. 1915.

$$\mathfrak{E}_1 e^{i\omega\left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)} + \sum_{m, n, p_1} \mathfrak{E}_2 e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}\right)} + \sum_{m, n, p_1} \mathfrak{E}_3 e^{i\omega(t - \delta)}$$

zu schreiben wäre. Die $\mathfrak{E}$ sind hier gewisse Vektorfunktionen und δ eine verwickelte Funktion der Koordinaten. $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ und δ sind auch von m , n und p abhängig. Nur wenn δ_{mnp} mit der Koordinatenfunktion

$$\frac{1}{c} \mathfrak{U}_{mnp} \times \mathfrak{R}$$

im Argumente des entsprechenden Gliedes in der ersten Summe zusammenfiel oder wenigstens mit ihr in einer physikalisch einfachen Beziehung stünde, wäre in einem beliebigen Punkte des Opaleszenzfeldes ein möglicher Einfluß zu erwarten. Es muß aber gewiß auch ohne eingehende Erörterung als sehr unwahrscheinlich empfunden werden, daß δ derart mit dem Argumente

$$\frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}$$

verknüpft wäre.

Die Summe

$$(32) \quad \sum_{r_0 < r < r_1} \langle \mathbf{M} \rangle \text{rot}_{\mathbf{M}'} \cdot \text{rot}_{\mathbf{M}''} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

beruht auf der jedesmaligen Lage der betreffenden Moleküle, und zwar im allgemeinen nicht nur weil r davon abhängig ist, sondern auch, weil p gemäß den örtlichen, stark inhomogenen Feldern von Molekül zu Molekül variiert und hier nicht länger mit dem Mittelwerte ersetzt werden darf. Die Summe (32) in ihren statistischen Gesetzen zu ermitteln, erscheint darum zurzeit aussichtslos. Zum Glück sind die Schwankungen von (32) für unseren Zweck innerhalb weiter Grenzen ohne Einfluß. Denn wir können niemals das Opaleszenzfeld eines Einzelresonators beobachten, sondern messen die vereinigte Wirkung einer großen Anzahl Moleküle und brauchen für unsere Beobachtungen eine so geraume Zeit, daß jedes Molekül inzwischen eine ganze Reihe verschiedener Schwingungszustände zurückgelegt hat. Möge also jedes einzelne Molekül nach den statistischen Gesetzen beliebigen Schwankungen unterliegen, wir beobachten doch immer nur einen Mittelwert, und wir werden sogleich nachweisen, daß wir gerade diesen Mittel-

wert bekommen, wenn wir statt der Summation auch betreffend (32) Integration benutzen.

Zu dem Ende teilen wir den Bereich $r_0 < r < r_1$ in n Volumenelemente, die wir uns nach Null hinstrebend vorstellen. Außer dem Kugelzentrum seien die m Elemente $d\omega_{i_1}, d\omega_{i_2} \dots d\omega_{i_m}$ von je einem Molekülmittelpunkte besetzt. Die Wahrscheinlichkeit dieser Molekülkonfiguration bezeichnen wir mit $W(i_1 \dots i_m)$. Wenn sie statthat, sei das Feld im Kugelmittelpunkte $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$. Es setzt sich zusammen aus dem im größeren Sinne geordneten Felde (29) und dem ungeordneten, aber durch die i bestimmten Feld (32). Im Felde $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$ schwinde das Molekül mit dem Momente $p(i_1 \dots i_m)$. Dadurch wird am fernen Beobachtungsorte eine Feldstärke bewirkt, deren Amplitude $e(i_1 \dots i_m)$ sei. Ihre Phase zu einer beliebig festgelegten Zeit t_0 sei $\delta(i_1 \dots i_m)$.

Wenn wir das Gedankenexperiment machen, daß es möglich wäre, die Wirkung der Moleküle in der Kugel r_1 für sich zu beobachten, so würden wir in einem bestimmten Augenblicke das Feld

$$e^{i\omega t} \sum e e^{-i(\omega t_0 - \delta)}$$

wahrnehmen. Wir haben dabei implizite die zulässige Annahme gemacht, daß eine Verschiebung eines Resonators um einen kleinen Bruchteil einer Wellenlänge bei unverändertem Momente ohne merklichen Einfluß auf das Strahlungsfeld am fernen Beobachtungsorte sei. Wir nehmen zuerst an, daß die Moleküle in der Kugel sehr zahlreich sind. Für jedes dieser Moleküle sind die umgebenden Moleküle, die um dasselbe in einem Abstände $< r_1$ gelegen sind, anderswie angeordnet, so daß man unter hinreichend vielen Molekülen immer einen Bruchteil $W(i_1 \dots i_m)$ finden wird, deren Lage relativ zu den Nachbarmolekülen durch die Indizes $(i_1 \dots i_m)$ gekennzeichnet sind. In diesem Falle werden wir also das Feld

$$(33) \quad e^{i\omega t} \sum W(i_1 \dots i_m) e(i_1 \dots i_m) e^{-i(\omega t_0 - \delta(i_1 \dots i_m))}$$

messen, wo die Summation jetzt nicht wie in der vorigen Formel über alle Moleküle, sondern über alle Molekülanordnungen, d. h. alle Veränderlichen i , zu erstrecken ist.

Da es uns gleichgültig ist, wie sich die Einzelmomente in der Kugel verteilen, wenn nur ihre Resultierende die gleiche

bleibt, so können wir diese Momente in ihrem bunten Wechsel durch ein durchschnittliches Moment

$$\Sigma W(i_1 \dots i_m) p(i_1 \dots i_m)$$

am Orte jedes Moleküls ersetzen. Nach (7) ist indessen $p(i_1 \dots i_m)$ mit $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$ linear verknüpft. Wir müssen also unverändert die gleiche Feldstärke im Opaleszenzfelde wahrnehmen, wenn wir anstatt des inhomogenen Erregungsfeldes $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$ überall in der Kugel ein homogenes Feld

$$(34) \quad \Sigma W(i_1 \dots i_m) \mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$$

annehmen.

Die einzelnen Moleküle bewegen sich bekanntlich, von den größten Dichten des Gases abgesehen, sehr nahe unabhängig voneinander. Dies besagt, daß alle Volumelemente der Kugelschicht $r_0 < r < r_1$ gleichwertig sind und ebenso häufig von Molekülen besetzt werden können. W ist somit von der Variation der Veränderlichen i unabhängig. Diesem Umstande tragen wir gerade Rechnung, wenn wir die Summe (34) mit einem Integral ersetzen.

Wir haben vorher das Feld, das auf ein willkürlich herausgegriffenes Molekül wirkt, auf die Form

$$I_0 + \sum_{r_0 < r < r_1}^{(M)} \text{rot}_M \cdot \text{rot}_M' \cdot \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

reduziert. Aus (34) folgt, daß es zulässig ist, dafür überall im physikalisch kleinen Bereiche zu schreiben

$$I_0 + \Sigma W(i_1 \dots i_m) \sum_{i_1}^{i_m} \text{rot}_M \cdot \text{rot}_M' \cdot \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Damit sind die schwankenden augenblicklichen Werte mit einem Mittelwerte ersetzt worden. Das zweite Summationszeichen gilt für die Moleküle, ihre Konfiguration festgehalten, das erste gilt für die verschiedenen möglichen Konfigurationen. Das soeben genannte, besonders einfache Wahrscheinlichkeitsgesetz endlich ermöglicht es uns auch, diesen Ausdruck zu vereinfachen:

$$(35) \quad I_0 + \int_{r_0 < r < r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N d\omega,$$

wo die Bezeichnungen jetzt wieder dieselben sind wie in (9), p mithin das durchschnittliche Resonatorenmoment in der Kugel bedeutet.

Wir ersehen jetzt auch die reale Bedeutung unserer Voraussetzung über die Lagerungsdichte der Moleküle. Sie bedeutet nicht, daß in jedem Augenblicke in der Kugel r_1 eine große Anzahl Moleküle dort zu sein brauchen. Sie sagt nur aus, daß die Moleküle so zahlreich sein müssen, daß unser System schon in einem Bruchteile einer Sekunde so viele verschiedene Zustände durchläuft, daß das mittlere Feld dem Werte (34) genügend nahe kommt. So groß wie die Molekülgeschwindigkeiten in der Tat sind, wird dieser Bedingung offenbar auch bei sehr kleinen Drucken genügt.

Streng genommen mißt man allerdings nicht die Amplitude des Opaleszenzfeldes, sondern die Intensität. Wenn das mittlere Feld kurzweg e_m bezeichnet wird, und die zufällige Abweichung von dem Mittelwerte Δe ist, so beobachtet man somit nicht $e_m + \Delta e$, sondern $(e_m + \Delta e)^2$. Die Δe heben sich freilich bereits während der kürzesten Beobachtungsdauer auf. So nicht die Δe^2 . Wünscht man auch die zweiten Potenzen zu berücksichtigen, würde man folglich ein kleines Zusatzglied bekommen. Dieses muß aber sehr klein sein bei großen Dichten, weil stets viele Molekülkonfigurationen zugleich unter Beobachtung sind, und bei kleinen Drucken, weil die Wechselwirkungen für kleine Abstände r der Moleküle proportional $1/r^3$ sind und also bei sinkenden Drucken für immer weniger Moleküle beträchtlich werden im Vergleiche zur hauptsächlichsten Erregungskraft (29).

Aus (9) erfolgt, wenn wir die Erwägungen beachten, die uns zu (35) führten

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_0 + \int_{r > r_0} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N d\omega = I_0(r_0).$$

I_0 bedeutet natürlich hier das gleiche wie in (29), nur mit dem dortigen r_1 , hier mit r_0 ersetzt, mithin

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = \mathfrak{P} & \left\{ \left[\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 10) r_0^2 \right. \right. \\ & + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_0^3 \left. \right] e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \right. \\ & - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_0^2 + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_0^3 \left. \right] e^{i\omega \left(t - \frac{u \times R}{c} \right)} \left. \right\} \\ & + u \left\{ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{-4\pi}{A^2 - 1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_0^2 \right] u x \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{u \times R}{c} \right)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Wir können jetzt eine Abschätzung der verschiedenen Glieder versuchen. Die Größe r_0 können wir nämlich der kinetischen Gastheorie entnehmen. Sie ist von der Größenordnung 10^{-8} cm, beträgt z. B. für die atmosphärische Luft im Mittel $3 \cdot 10^{-8}$ cm. Dies bedeutet, daß die Glieder mit r_0^2 und r_0^3 einen sehr kleinen Faktor enthalten. Allerdings sind sie auch mit den sehr großen Faktoren

$$\frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\omega^3}{c^3}$$

multipliziert. Es ist aber

$$\frac{\omega r_0}{c} = \frac{2\pi r_0}{\lambda},$$

und dieser Quotient ist klein, sobald r_0 gegen λ klein ist, eine Größenbeziehung, die in der Praxis immer erfüllt ist. Für Na-Licht in atmosphärischer Luft finden wir z. B.

$$\frac{2\pi r_0}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Der Schritt von r_1 als Integrationsgrenze auf r_0 , den wir soeben haben tun können, bedeutet offenbar in dieser Hinsicht einen Gewinn. Denn wenn man, wie bisher, eine untere Integrationsgrenze so definiert wie r_1 benutzen muß, erscheint es einigermaßen zweifelhaft, ob der Limesübergang nach Null wirklich unbedenklich ist, namentlich bei ultravioletterm Lichte.

Mehrere der Glieder in (36) können wir jetzt ohne weiteres fortlassen. Nur sind die Ungleichheiten

$$\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \gg \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_0^2,$$

$$\frac{4\pi}{A^2 - 1} \gg \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_0^2$$

noch nicht unanfechtbar. Wir haben nämlich den Größen m , n und p , die mit A durch Gleichung (15) verbunden sind, keine obere Grenze vorgeschrieben, und wir ersehen, daß unsere Ungleichheiten trügerisch zu werden beginnen, falls einer dieser Parameter, z. B. m , hinreichend groß wird, um

$$\frac{\pi m}{L} \quad \text{gegen] } \frac{1}{r_0}$$

bemerkbar zu machen. So große Werte von m schließen wir von jetzt ab aus, und diese Annahme kann nicht gewagt oder bedenklich erscheinen, wenn wir erwägen, daß wir damit nur solche physikalisch bedeutungslose Dichtewellen absondern, deren Wellenlängen von der Größenordnung des Moleküldurchmessers sind.

Wir bekommen somit

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} \right. \\ &\quad \left. - 4\pi \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathbf{u} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \end{aligned} \right.$$

In die Schwingungsgleichung

$$(7) \quad \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} + g \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \omega_0^2 \mathfrak{p} - \frac{2e^2}{3m c^3} \frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} = \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}$$

ist folglich rechts der Ausdruck (37) zu substituieren. Das Glied mit

$$\frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3}$$

bleibt ersichtlich noch in der Gleichung von der rechten Seite unbeeinflusst. Es liegt aber auf der Hand, daß unsere Ableitung nur für ein Gas gültig ist. Auf homogene Körper mit unveränderlicher Dichte, wie etwa die Kristalle, sind unsere Auseinanderlegungen nicht zu übertragen. Soweit ich sehe, ist gerade die Inhomogenität in physikalisch kleinen Be-

Bereichen die notwendige Bedingung für das Zustandekommen des Strahlungsgliedes.

Das mittlere Moment eines Moleküls ergibt sich jetzt aus (7) und (37) in der neuen Näherung

$$(38) \left\{ \begin{aligned} p_1 = & \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \left[\frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} \right. \\ & \left. + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - 4\pi \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \right]. \end{aligned} \right.$$

p_1 schwingt mithin harmonisch, aber mit einer Amplitude, die infolge der Abhängigkeit von B_{mnp} unablässigen Schwankungen unterworfen ist. Wenn wir jedoch die Amplitude über eine hinreichend lange Zeit mitteln, so wird erhalten

$$\overline{p_1} = \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)}$$

oder gemäß (10)

$$\overline{p_1} = \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} N_0 p.$$

Wenn wir $\overline{p_1} = p$ setzen, erfolgt aus dieser Gleichung, daß es zwischen den Resonatorenkonstanten e , m , g und ω_0 und dem Brechungsindex n_0 die Beziehung

$$(39) \quad \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} = \frac{3}{4\pi N_0} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$$

bestehen muß. Es ist dies eine der bekannten Gleichungen in der Theorie von Lorentz.

Wenn man sie zur Vereinfachung der Gleichung (38) benutzt, so wird sich p_1 in der klareren Form

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 = & p + \frac{1}{N_0} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \\ & \left(\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - 3 \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \end{aligned} \right.$$

herstellen, die den Charakter des p_1 als Produkt eines Näherungsverfahrens unmittelbar zum Vorschein bringt.

§ 5. Untersuchung des Feldes außerhalb des Würfels.
Homogener Körper.

Homogen nennen wir einen Körper, dessen Ungleichartigkeiten sich erst dann zeigen, wenn man zu Dimensionen von der Größenordnung der Moleküldistanzen herabsteigt. Homogen im Sinne dieser Definition sind also etwa die Kristalle, nicht aber die Gase und überhaupt strukturlose Körper, wo die Moleküle nach den Gesetzen des Zufalles verteilt sind, denn hier können lokale Verdichtungen vorhanden sein, deren Ausdehnung groß gegen die Moleküldistanzen sind, obgleich vielleicht klein gegen die Wellenlänge. Unsere Definition ist enger als diejenige von Planck, welche nur optische Gleichwertigkeit von Elementen erfordert, die von der Größenordnung der optischen Wellenlängen sind, und welche darum auch die trüben Medien von Rayleigh miteinschließt. Für uns bilden diese eine besondere Klasse, die eine besondere Behandlung erfordert.

In der Extinktionstheorie von Planck werden nicht die beiden Klassen von Körpern unterschieden. Alle beide sollen in seinen Ergebnissen über die Opaleszenz eingeschlossen sein. Diese Unklarheit ist die Ursache der Streitigkeiten, die sich um seine Resultate entsponnen haben. Es möchte deshalb angebracht sein, das Studium des Außenfeldes unseres Würfels mit einigen Auseinandersetzungen über *homogene* Körper zu beginnen.

Die Aufgabe gilt natürlich dem Felde um den Würfel, so wie es sein würde, wenn sich keine absorbierende Materie zwischen dem Würfel und dem Beobachter befände. In der Wirklichkeit, wo der Würfel bloß ein Teil eines ausgedehnten Mediums ist, müssen die Erregungen aus dem Würfel selbstverständlich teilweise durch die Felder der äußeren Resonatoren kompensiert erscheinen.

Ähnlich wie oben, Gleichung (9), erhalten wir für das zu untersuchende Feld

$$(41) \quad \mathfrak{E} = \int_{\Omega} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} N_0 d\omega.$$

Das Integral ist natürlich über den ganzen Würfel Ω zu vollführen, die Rotationen am Beobachtungsorte M' zu berechnen. M' , dessen Abstand von dem jeweiligen Integrationselemente

r ist, sei hinsichtlich seiner Lage durch einen Vektor $\mathbf{r}_0$ mit dem Koordinatenanfangspunkte als Angriffspunkt bestimmt.

Da wir die Dichteschwankungen aus der Rechnung weglassen, wird nach (40) p_1 überall gleich p , mithin gemäß (10)

$$\mathfrak{E} = \int_{\Omega} \text{rot}_M' \text{rot}_M' \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}} d\omega,$$

wo $\mathfrak{P}$ im ganzen Integrationsraume konstant ist.

Das gleiche Verfahren, das nach (16) führte, gibt hier $\mathfrak{E}$ als ein Flächenintegral über die Würfeloberfläche

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{c^2}{\omega^2 (n_0^2 - 1)} \int_F \text{rot}_M' \text{rot}_M' \\ &\quad \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}} d\sigma. \end{aligned}$$

Mit Gleichung (20) als Ausgangspunkt können die Rotationen leicht bewerkstelligt werden, und man erhält $\mathfrak{E}$ als eine Summe von Gliedern, die r im Nenner in verschiedenen Potenzen enthalten. Da r sehr groß ist, können wir nach Gutachten der Glieder, die mit r^{-2} oder noch schneller abnehmen, fortlassen oder mitnehmen. Wir erhalten demgemäß angenähert

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{n_0^2 - 1} \int_F \frac{(\mathbf{r} \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathbf{r}}{r^2} \left[e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}.$$

Der erste Faktor hinter dem Integralzeichen besagt, daß $\mathfrak{E}$ sich um das schwingende Moment $\mathfrak{P}$ nach den nämlichen Gesetzen verteilt, welche die elektrische Kraft um einen schwingenden Dipol regeln. Wenn wir auf die Richtung von $\mathfrak{E}$ verzichten und ferner für den Winkel zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathbf{r}$ den Winkel ϑ zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathbf{r}_0$ als Näherungswert einführen, können wir etwas einfacher schreiben

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} |\mathfrak{E}| &= \frac{\sin \vartheta}{n_0^2 - 1} \int_F \left[|\mathfrak{P}| e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} |\mathfrak{P}| e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}. \end{aligned} \right.$$

Wie ich in einem früheren Aufsatz¹⁾ nachgewiesen habe, genügt die Feldstärke im Würfel der Beziehung

$$(43) \quad \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{n_0^2 - 1} \Re e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)}$$

Das ergibt, in (42) eingeführt; wenn wir überall u anstatt $|\mathfrak{E}|$ schreiben

$$(44) \quad u = \frac{\sin \theta}{4\pi} \int_V \left[u \frac{d}{d\nu} - \frac{du}{d\nu} \right] e^{-\frac{i\omega r}{c}} \frac{1}{r} \cdot$$

Dies ist nichts anderes als *das Kirchhoffsche Beugungsintegral* über die Würfelfläche. Bei den entsprechenden Beugungserscheinungen wollen wir nicht verweilen. Teils sind sie bereits von Buchwald²⁾ ausführlich besprochen, teils besitzen sie an und für sich für uns kein Interesse. Der Würfel ist ja nur etwas Gedachtes. Wir haben nie angenommen, daß er von der umgebenden Gasmasse wirklich abgetrennt wäre. In der Tat wird (44) immer von einem genau kompensierenden Integral aus dem umgebenden Gase begleitet.

Was wir aber desto kräftiger hervorheben wollen, ist, daß dies *nicht* das Plancksche Opaleszenzfeld ist. *Ein homogener Körper gibt keine Opaleszenz.* Und diese Tatsache ist von jeder Annahme über das Dämpfungsglied unabhängig.

Es ist leicht zu erkennen, wie es kommt, daß wir zu anderen Resultaten als Planck gelangen. Denn was Planck berechnet hat, und *richtig* berechnet hat, ist die Zerstreuung des Lichtes in einem Medium, wo die Schwingungen der Differentialgleichung mit dem dreigepunkteten Dämpfungsgliede genügen. Er hat aber nicht untersucht, ob diese Gleichung allgemein gültig ist. Hier treten die Arbeiten von Mandelstam, Lorentz und Oseen ergänzend hinzu, nach welchen das Dämpfungsglied in homogenen Medien fortfällt. Die Anwendung der Theorie von Planck auf solche Körper ist demnach verboten.

Die Antwort auf die Frage, die wir anfangs streiften, ob wir neben einer Keesom-Einsteinschen Extinktion auch

1) R. Lundblad, Ann. d. Phys. 57. p. 183. 1918.

2) E. Buchwald, l. c.

eine Rayleigh-Plancksche annehmen müssen, ob der Extinktion durch die Dichteschwankungen noch eine besondere Dämpfungsstrahlung beizugeben ist, tritt jetzt klarer hervor. Indem wir das Ergebnis des folgenden Paragraphen vorwegnehmen, können wir dieselbe folgendermaßen beantworten:

In homogenen Körpern, wo die Dichte auch im physikalisch kleinen Gebiete unveränderlich ist, fällt sowohl das Dämpfungs-glied wie die Extinktion fort.

In Gasen, die Dichteschwankungen geben, gibt es sowohl Strahlungsdämpfung wie Extinktion.

Ob man alsdann das Dämpfungsglied oder die Dichteschwankungen als die wahre Ursache der Extinktion anzusehen wünscht, ist ja hier ganz gleichgültig. Wahrscheinlich ist es am korrektesten, das Dämpfungsglied, das nur ein Durchschnitt ist und in der Tat von Molekül zu Molekül variiert, als die Folge der regellosen Verteilung der Moleküle und damit, falls man so will, als eine Folge der Dichteschwankungen zu betrachten.

§ 6. Das Opaleszenzfeld. Erste Näherung.

Die folgende, erste angenäherte Ermittlung des Opaleszenzfeldes berücksichtigt die Verdichtungen und Verdünnungen in der Resonatorenlagerung, wohingegen die einzelnen Resonatorenamplituden nur infolge einer etwaigen Absorption veränderlich seien, d. h. in (40) wird wieder $B_{mnp} = 0$ gesetzt, in (41) jedoch anstatt N_0

$$N = N_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right).$$

Das Außenfeld wird folglich

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \int_{\Omega} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} N_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}} d\omega + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \\ &\quad \int_{\Omega} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}} d\omega. \end{aligned}$$

Das erste Integral rechts bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_b$; es bedeutet nach § 5 die Beugungserscheinungen am Würfel. Das zweite, neu hinzugekommene Glied wird das zerstreute Licht ergeben. Dieses Glied besteht aus einer Reihe von Integralen, die von m , n und p abhängig sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir dieselben mit $\mathfrak{E}_z(m, n, p)$ und erhalten somit

$$(45) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_b + \sum'_m \sum''_n \sum'_p B_{mnp} \mathfrak{E}_z(m, n, p).$$

Die Integrale $\mathfrak{E}_z$ wandeln wir vermöge (17) in ein Flächenintegral über die ganze Würfelfläche um:

$$\mathfrak{E}_z(m, n, p) = \frac{c^2}{\omega^2(A^2 - 1)} \int_F \text{rot}_{M'} \text{rot}_M \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right] e^{\frac{i\omega}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)} d\sigma.$$

Bedenken wir, daß M' sehr entfernt ist, können wir ebenso wie in § 5 hinlänglich genau schreiben

$$\mathfrak{E}_z(m, n, p) = \frac{1}{A^2 - 1} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^2} \int_F \left[e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right] \frac{e^{\frac{i\omega}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\sigma,$$

oder, noch, wiederum unter Weglassen eines verschwindenden Gliedes

$$\mathfrak{E}_z(m, n, p) = - \frac{i\omega}{c(A^2 - 1)} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^2} \int_F \left[\frac{dr}{d\nu} - \mathfrak{U} \times \frac{d\mathfrak{R}}{d\nu} \right] e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{e^{\frac{i\omega}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\sigma.$$

Dieser Ausdruck ergibt nach Integration

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z(m, n, p) \\ = \frac{\omega^2}{c^2} L^3 e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^2} \frac{e^{\frac{i\omega}{r_0} \left(t - \frac{r_0}{c} \right)}}{r_0} \end{array} \right.$$

Hier haben wir der Kürze halber gesetzt

$$(47) \quad \xi_m = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_x - \alpha); \quad \eta_n = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_y - \beta); \quad \zeta_p = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_z - \gamma),$$

wo α, β, γ die Richtungskosinusse des Vektors $\mathbf{r}_0$ sind. η_n und ζ_p sind immer reell, ξ_m wird dagegen mit dem Brechungsindex komplex.

Wenn wir (46) in (45) substituieren, ergibt sich offenbar die zu ermittelnde zufällige Feldstärke im Außenfelde:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_b + \frac{\omega^2}{c^2} L^3 \frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^2} e^{i\omega \left(t - \frac{r_0}{c}\right)} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p}.$$

Unser Ziel ist indessen die mittlere Intensität, nicht die zufällige Amplitude. Diese Aufgabe macht zwei Mittelungen notwendig, über die Zeit und über die unablässig schwankenden Parameter B_{mnp} . Wir setzen zuerst

$$\mathfrak{E}_Z = \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \mathfrak{E}_Z(m, n, p);$$

mithin

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_b^2 + 2 \mathfrak{E}_b \mathfrak{E}_Z + \mathfrak{E}_Z^2.$$

Das Zwischenglied verschwindet bei der Mittelung über die B infolge der Gleichung $\overline{B_{mnp}} = 0$. Die Intensitäten des Beugungs- und des Opaleszenzfeldes addieren sich also schlechtweg, wie dies zu erwarten ist.

Es erübrigt somit nur $\mathfrak{E}_Z^2$, zweimal gemittelt, zu berechnen. Wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\mathfrak{G} = \frac{\omega^2 L^3}{c^2 r_0} \frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^2},$$

$$\delta_{mnp} = \frac{\omega r_0}{c} + (\xi_m + \eta_n + \zeta_p),$$

$$P_{mnp} = \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p},$$

so erhalten wir zunächst

$$\mathfrak{E}_Z = \mathfrak{G} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} e^{i(\omega t - \delta_{mnp})}.$$

Um die Mittelung *über die Zeit* zu erzielen, soll nun $\mathfrak{E}_Z$ mit der zu ihm konjugierten komplexen Größe multipliziert werden und, weil es sich um harmonische Schwingungen handelt, noch mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert werden.

Wenn der Brechungsindex reell ist, sind sowohl P_{mnp} wie auch δ_{mnp} reelle Größen. Wenn aber der Brechungsindex komplex ist $n_0 = \nu - i\kappa$, wird ξ_m

$$(48) \quad \xi_m = \xi_m' - i\xi_m'',$$

wo

$$(49) \quad \xi_m' = \frac{L\omega}{2c} (\nu - \epsilon) - m \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$(50) \quad \xi_m'' = \frac{L\omega\kappa}{2c}.$$

Dann wird offenbar P_{mnp} komplex, und auch δ_{mnp} bekommt einen imaginären Teil, der mit demjenigen der Größe ξ_m identisch ist. Wenn wir unter P^* die konjugierte Größe von P verstehen, erhalten wir also

$$\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{\mathfrak{E}^2}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_{p'} B_{mnp} B_{m'n'p'} P_{mnp} P_{m'n'p'}^* e^{-\frac{L\omega\kappa}{c}},$$

wo m, n, p, m', n' und p' voneinander unabhängig die ganze Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen darstellen.

Bei der Mittelung über die B fallen hier sehr viele Glieder fort. Denn im allgemeinen variieren die B voneinander unabhängig, so daß

$$\overline{B_{mnp} B_{m'n'p'}} = 0.$$

Allemaal aber, wo die Elemente m und m', n und n', p und p' zum absoluten Betrage paarweise gleich sind, erhalten wir gemäß (6)

$$\overline{B_{mnp} B_{m'n'p'}} = \frac{1}{8NL^3}.$$

Wir bekommen sonach

$$(51) \quad \overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{\mathfrak{E}^2}{16NL^3} e^{-\frac{L\omega\kappa}{c}} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_{p'} P_{mnp} P_{m'n'p'}^*,$$

wo die Indizes die Bedingungen

$$|m| = |m'|, \quad |n| = |n'| \quad \text{und} \quad |p| = |p'|$$

erfüllen sollen.

P_{mnp} ist ein Produkt aus drei Faktoren, jeder nur von einem der Indizes m, n und p abhängig. Wenn wir anfänglich etwa n, p, n' und p' festhalten, brauchen wir darum, um

die beiden Summationen über m und m' zu erledigen, nur die Summe

$$S_m = \sum_m \left(\frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_m^*}{\xi_m^*} + \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_{-m}^*}{\xi_{-m}^*} \right),$$

zu berechnen.

Nach (48), (49), (50) ist

$$\xi_m = \frac{L \omega}{2c} (\nu - \alpha) - m \cdot \frac{\pi}{2} - i \frac{L \omega \kappa}{2c}.$$

Da ω/c sehr groß ist, muß $\frac{\sin \xi_m}{\xi_m}$ im allgemeinen sehr klein sein, sofern L nicht besonders klein gewählt wird, was wir keine Ursache zu tun haben. Nur für einen gewissen großen positiven Wert von m wird jener Quotient beträchtlich, und in derselben Weise $\frac{\sin \xi_{-m}}{\xi_{-m}}$ nur für einen gewissen großen negativen. Das zweite Glied in S kommt deshalb gegen das erste nicht in Betracht, und man erhält hinlänglich genau

$$S_m = \sum_m \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_m^*}{\xi_m^*}.$$

Dieser Ausdruck schreibt sich, wenn wir die Zerlegung (48) explizite einführen

$$S_m = \sum_m \frac{\cos \text{hyp } 2 \xi_m'' - \cos 2 \xi_m'}{2 (\xi_m'^2 + \xi_m''^2)}.$$

Gemäß (50) ist ξ'' von m unabhängig, kann sonach vor das Summationszeichen gesetzt werden, und ξ_m' kann kürzer

$$- \frac{\pi}{2} (m - \varphi)$$

geschrieben werden, wo

$$\varphi = \frac{L \omega}{\pi c} (\nu - \alpha).$$

Indem wir dies einführen, ergibt sich

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} S_m &= \frac{2}{\pi^2} \cos \text{hyp } 2 \xi'' \sum_m \frac{1}{(m - \varphi)^2 + \frac{4}{\pi^2} \xi''^2} \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi \varphi \sum_m \frac{(-1)^m}{(m - \varphi)^2 + \frac{4}{\pi^2}} \end{aligned} \right.$$

wo jetzt lauter reelle Funktionen stehen.

Um die erste Summe aufzufinden, betrachten wir, eine bekannte Summationsmethode¹⁾ verwendend, die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{(z - a)^2 + b^2},$$

wo a und b reelle Konstanten seien. Für diese Funktion ist jede ganze Zahl m ein einfacher Pol mit dem Residuum

$$\frac{1}{(m - a)^2 + b^2}.$$

Überdies sind noch die beiden Pole $a \pm ib$ vorhanden, die aus den Nullstellen des Nenners hervorgegangen sind, und deren Residuen sind

$$\frac{\pi \cot \pi(a + ib)}{2ib} \quad \text{bzw.} \quad - \frac{\pi \cot \pi(a - ib)}{2ib}.$$

Das Integral

$$\int_C f(z) dz$$

werde nun über einen Vollkreis C vollzogen, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt und dessen Radius $m - \frac{1}{2}$ ist. An dieser Kreislinie ist der Modul $|\cot \pi z|$ endlich, und der rationale Teil der Funktion $f(z)$ hat für $|z| = \infty$ eine Nullstelle zweiter Ordnung. Vorausgesetzt, daß wir m groß genug wählen, wird somit der Modul des Integrals unterhalb jeder endlichen Grenze hinabsinken. Das integrale Residuum ist demgemäß auch gleich Null, wenn m ins Unendliche rückt. Wir erhalten mithin

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{(m)}{m} \frac{1}{(m - a)^2 + b^2} + \frac{\pi}{2ib} (\cot \pi(a + ib) - \cot \pi(a - ib)) = 0.$$

Nach Vereinfachung dieses Ausdruckes wird endlich erhalten

$$(53) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{(m)}{m} \frac{1}{(m - a)^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} \frac{\sin \text{hyp } 2\pi b}{\cos \text{hyp } 2\pi b - \cos 2\pi a}.$$

Die Summe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{(m)}{m} \frac{(-1)^m}{(m - a)^2 + b^2},$$

läßt sich ebenso aus der Funktion

1) E. Lindelöf, *Le calcul des résidus*, p. 52. Paris 1906.

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} \cdot \frac{1}{(z-a)^2 + b^2}$$

ermitteln. Man erhält

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m}{m-a)^2 + b^2} &= -\frac{\pi}{2ib} \left(\frac{1}{\sin \pi(a+ib)} - \frac{1}{\sin \pi(a-ib)} \right) \\ &= \frac{2\pi}{b} \frac{\sin \text{hyp } \pi b \cos \pi a}{\cos \text{hyp } 2\pi b - \cos 2\pi a}. \end{aligned} \right.$$

Führt man (53) und (54) in (52) ein, so kommt

$$S_m = \frac{\cos \text{hyp } 2\xi'' \sin \text{hyp } 4\xi'' - 2\cos^2 \pi \varphi \sin \text{hyp } 2\xi''}{\xi'' (\cos \text{hyp } 4\xi'' - \cos 2\pi \varphi)} = \frac{\sin \text{hyp } 2\xi''}{\xi''},$$

wo wieder φ für a und $2\xi''/\pi$ für b substituiert worden sind. Wenn wir noch den Ausdruck (50) für ξ'' einsetzen, bekommt S_m schließlich die Form

$$(55) \quad S_m = \frac{2c}{L\omega\kappa} \sin \text{hyp } \frac{L\omega\kappa}{c}.$$

In ganz derselben Weise lassen sich die Summen über n und p ermitteln. Man findet sie am einfachsten, wenn man in (55) κ gegen Null gehen läßt. Alsdann ergibt sich

$$(55a) \quad S_n = S_p = 2.$$

Hiermit ist die Mittelung über die B ausgeführt. Durch Substituieren der Summationsergebnisse in (51) ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{\mathfrak{E}^2}{16NL^3} \cdot \frac{4c}{L\omega\kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L\omega\kappa}{c}} \right),$$

oder wenn wir wiederum ϑ in der gleichen Bedeutung wie im vorigen Paragraphen einführen

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_x^2} &= \frac{\omega^4}{2c^4 N} \cdot \frac{cL^2}{2\omega\kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L\omega\kappa}{c}} \right) \frac{\mathfrak{P}^2}{r_0^2} \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{8\pi^4}{N\lambda^4} \cdot \frac{cL^2}{2\omega\kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L\omega\kappa}{c}} \right) \frac{\mathfrak{P}^2}{r_0^2} \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \right.$$

Die Intensität im Opaleszenzfelde ist demnach der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional. Sie verteilt sich um die Schwingungsrichtung der Elementarresonatoren wie die strahlende Energie um einen Hertzschen Resonator.

Der Faktor

$$(57) \quad \frac{c L^2}{2 \omega \kappa} \left(1 - e^{-\frac{2 L \omega \kappa}{c}} \right) \mathfrak{P}^2$$

allein beruht auf den optischen Eigenschaften und der Größe des Würfels. Es ist wichtig, zu bemerken, daß dieser Faktor gerade dem über das ganze Körpervolumen Ω erstreckten Integral

$$(58) \quad \int_{\Omega} \mathfrak{P}^2 e^{-\frac{2 \omega \kappa x}{c}} dx = \frac{c L^2}{2 \omega \kappa} \left(1 - e^{-\frac{2 L \omega \kappa}{c}} \right) \mathfrak{P}^2$$

gleich ist. Da

$$\mathfrak{P} e^{-\frac{\omega \kappa x}{c}}$$

die auf die Volumeinheit bezogene Resonatorenamplitude ist, bedeutet dies, daß die Intensität des Opaleszenzlichtes durch die lokale Amplitude der Molekularresonatoren völlig bestimmt ist, so daß bei gleicher Amplitude die Natur des Gases einflußlos ist.

Die gesamte, während einer Sekunde zerstreute elektrische und magnetische Energie beträgt

$$\frac{c}{4 \pi} \cdot 2 \pi \int_0^{\pi} \mathfrak{E}_{\Sigma}^2 \sin \vartheta d \vartheta$$

oder nach (56) und (58)

$$\frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \int_{\Omega} \mathfrak{P}^2 e^{-\frac{2 \omega \kappa x}{c}} dx.$$

Aus einem Volumelemente $d\omega$, wo die Amplitude $\mathfrak{P}$ ist, wird sonach die Energiemenge

$$(59) \quad \frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \mathfrak{P}^2 d\omega$$

sekundlich zerstreut.

Der Extinktionskoeffizient h ist durch die Gleichung

$$dW = - W h dx$$

definiert, wo W die auf die Volumeinheit entfallende Energie der Primärwelle ist. Um ihn zu finden, müssen wir also außer der zerstreuten Energie noch W kennen. Wenn der Brechungs-

index n_0 reell ist, beträgt die augenblickliche elektromagnetische Energie¹⁾

$$\frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8 \pi} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8 \pi} = \frac{4 \pi n_0^2}{(n_0^2 - 1)^2} \mathfrak{P}^2 \cos^2 \omega t,$$

oder in bezug auf die Zeit gemittelt

$$(60) \quad \overline{H} = \frac{2 \pi n_0^2}{(n_0^2 - 1)^2} \mathfrak{P}^2.$$

Wir betrachten nun ein Volumelement $d\omega$ des Lichtbündels, das sich mit dem Lichte mit der Geschwindigkeit c/n_0 bewegt. Seine Energie zu einem gewissen Zeitpunkte ist $W d\omega$. Wenn es die Strecke Δx zurückgelegt hat, ist die Energie um $h W d\omega \Delta x$ verringert. Um diese Strecke zurückzulegen, geht die Zeit

$$\frac{n_0 \Delta x}{c}$$

drauf. Während jenes Zeitintervalles hat das Element gemäß (59) die Energie

$$\frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \mathfrak{P}^2 d\omega \cdot \frac{n_0 \Delta x}{c}$$

ausgestrahlt, und es wird folglich

$$h W d\omega \Delta x = \frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \mathfrak{P}^2 d\omega \cdot \frac{n_0 \Delta x}{c},$$

somit infolge (60)

$$(61) \quad h = \frac{8 \pi^3}{3 N \lambda^4} \frac{(n_0^2 - 1)^2}{n_0}.$$

Genau die gleiche Formel findet auch Planck²⁾, während Lord Rayleigh³⁾ zum Ausdrucke

$$h = \frac{32 \pi^3 (n_0 - 1)^2}{3 N \lambda^4}$$

gelangt, und endlich Einstein⁴⁾ den Wert

$$h = \frac{8 \pi^3}{3 N \lambda^4} \cdot \frac{(n_0^2 + 2)^2}{9} (n_0^2 - 1)^2$$

berechnet. Die Bezeichnungen der genannten Verfasser sind behufs leichteren Vergleiches zweckmäßig abgeändert worden.

1) R. Lundblad, Ann. d. Phys. 57. p. 198. 1918.

2) M. Planck, l. c. p. 749.

3) Lord Rayleigh, l. c. p. 379.

4) A. Einstein, l. c. p. 1293.

Wenn n_0 nahe gleich Eins ist, werden alle drei Ausdrücke identisch.

Der Fall n_0 komplex unterscheidet sich von dem vorherigen teils dadurch, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes c/ν statt c/n_0 ist, teils dadurch, daß die obige Energieformel (60) mit der Formel

$$(62) \quad W = \frac{2\pi\nu^2}{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2} \mathfrak{B}^2; \quad n_0 = \nu - i\kappa$$

ersetzt werden soll.¹⁾ Wie man leicht nachprüfen kann, fällt dieser Ausdruck mit dem reellen Teil von (60) nicht zusammen.

Der Extinktionskoeffizient h wird jetzt

$$(63) \quad h = \frac{8\pi^3}{3N\lambda^4} \frac{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2}{\nu}$$

Dieser Extinktionskoeffizient betrifft natürlich nur die Zerstreuung. Für diese Art der Extinktion ist er aber innerhalb der weitesten Grenzen gültig. Es liegt nämlich auf der Hand, daß unsere formelle Beschränkung der Rechnungen auf eine monoelektronische Substanz uns nirgends auf eine wirkliche Verengerung des Gültigkeitsbereiches unserer Rechnungen gedrängt hat. In dem nächsten Paragraphen wollen wir ferner zeigen, daß die Berücksichtigung der Wechselwirkungen der Moleküle höchstens ganz unwesentliche Modifikationen des Ergebnisses mit sich bringen kann. Endlich schließt das κ in Gleichung (62) die gesamte Absorption, wie auch ihre Ursache sein mag, mit ein. Gleichung (63) muß also im gesamten Spektrum, einschließlich der Absorptionsbanden, für die Extinktion infolge der Zerstreuung zutreffen, und dies ganz unabhängig davon, ob dort noch eine Absorption irgend welcher Art vorkommt.

Als eine Kontrolle mögen wir (63) auf den idealen Fall beziehen, wo das Licht im Gase nur zerstreut, nicht konsumptiv absorbiert wird. Dann sollen wir haben

$$h = \frac{2\omega\kappa}{c}$$

und folglich nach (63)

$$12\pi c^3 N \nu \kappa = \omega^3 [(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2].$$

Diese Gleichung folgt bereits aus (39), wenn man daselbst die imaginären Teile beider Seiten gleichsetzt.

1) R. Lundblad, l. c. p. 201.

§ 7. Das Opaleszenzfeld. Zweite Näherung.

Zweck des vorliegenden Paragraphen ist, wie soeben angedeutet, die Vervollständigung der obigen Analyse im Sinne einer Berücksichtigung der Wechselwirkungen der Moleküle. Da die mathematischen Entwicklungen nichts prinzipiell Neues bieten, wollen wir sie möglichst kurz anführen. Wir erhalten infolge (40)

$$\mathfrak{E} = \int_{\Omega} \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right) \text{rot}_{\mathbf{M}} \text{rot}_{\mathbf{M}}' \\ \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} x \mathfrak{R}}{c}} \right] e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \frac{1}{r} d\Omega,$$

oder analog (45) kürzer

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_b + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} (\mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_{z'}) \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m_1'} \sum_{n_1'} \sum_{p_1'} B_{mnp} B_{m_1' n_1' p_1'} \mathfrak{E}_{z_1'} \end{aligned} \right.$$

wo $\mathfrak{E}_b$ und $\mathfrak{E}_z$ das gleiche wie bisher bedeuten und auch die Bedeutung von $\mathfrak{E}_{z_1'}$ und $\mathfrak{E}_{z_2'}$ leicht zu ersehen ist.

Wenn wir zur Abkürzung einen Vektor

$$(65) \quad \mathfrak{P}_{mnp} = \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - \frac{3 \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U}$$

einführen und außerdem wie im vorigen Paragraphen setzen

$$P_{mnp} = \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p},$$

so ergibt sich ähnlich wie (46)

$$\mathfrak{E}_z = \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^3} P_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right)}}{r_0}; \\ \mathfrak{E}_{z_1} = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^3} P_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right)}}{r_0}; \\ \mathfrak{E}_{z_2} = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^3} P_{m+m_1', n+n_1', p+p_1'} \\ \cdot e^{-i(\xi_m + m_1' + \eta_n + n_1' + \zeta_p + p_1')} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right)}}{r_0}.$$

Wie oben p. 615 ist auch hier die Intensität zu berechnen und sodann über die Zeit und über die B zu mitteln. Wir machen jedoch zuvor folgende zwei vereinfachenden Annahmen:

1. Der Brechungsindex sei reell. Dies bewirkt, daß die Exponentialfunktionen der letztgeschriebenen Ausdrücke bei der zeitlichen Mittelung wegfallen und daß die Argumente der trigonometrischen Funktionen in P reell werden.

2. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{U}$ sei so groß, daß Eins gegen A^2 zu vernachlässigen ist. Die physikalische Bedeutung dieser Beschränkung ist die, daß wir nur diejenigen „Dichtewellen“ der Zerlegung (1) berücksichtigen, deren Wellenlängen gegen die Wellenlängen des Lichtes hinreichend klein sind. Die Annahme ist schon deswegen unausweichlich, weil die Formel (40) nur in diesem Falle eine genügend weit gediehene Annäherung ist.

Da das erste Glied in (64) nur die Beugungserscheinungen ergibt, unterdrücken wir es im folgenden. Wir bemerken ferner bereits zum voraus, daß das Produkt der zwei letzten Termkomplexe in (64) lauter ungerade Potenzen von den B enthält und darum bei der zweiten Mittelung verschwinden müssen. Wenn wir endlich dazu noch setzen

$$\frac{(r_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge r_0}{r_0^2} = \mathfrak{B}' \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge r_0}{r_0^2} = \mathfrak{B}' \sin \varphi,$$

wo ϑ und φ die Winkel zwischen r_0 und $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bedeuten, so wird erhalten

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}^2 &= \frac{\omega^4 L^6}{2 c^4 r_0^2} \left[\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} (\mathfrak{B}' \sin \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \mathfrak{B}' \sin \varphi) \right]^2 + \frac{\omega^4 L^6}{2 c^4 r_0^2} \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 \\ &\quad \left[\sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{p_1} B_{mnp} B_{m_1 n_1 p_1} P_{m_1 n_1 p_1} \mathfrak{B}'_{mnp} \sin \varphi \right]^2, \end{aligned} \right.$$

wo $m_1 = m + m_1'$ und die Quadrierungen skalar zu vollführen sind.

Das erste Glied des Vektors $\mathfrak{B}_{mnp}$ in Gleichung (65) verhält sich offenbar betreffs der Polarisation ebenso wie die einfallende Welle; das zweite fügt dagegen immer einen unpolarisierten Anteil hinzu; denn dem Vektor $\mathfrak{U}$ kann durch zweckmäßige Auswahl der m , n und p jede beliebige Richtung erteilt werden. Allerdings werden auch hier die Richtungen um $\mathfrak{B}$ infolge des Faktors $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$ immer hinsichtlich der Intensität bevorzugt.

Der Betrag des Vektors wird nach (65) für große numerische Werte von m , n und p nie die Grenze $2\mathfrak{B}$ überschreiten. Wenn wir uns mit der Ermittlung einer oberen Grenze der Zusatzglieder begnügen, können wir sonach $\mathfrak{B}_{mnp} \sin \varphi = 2\mathfrak{B}$ setzen und bekommen mithin für (66) den Maximalwert

$$\mathfrak{G}^2 = \frac{\omega^4 L^2}{2c^4 r_0^2} \left(\mathfrak{B} \sin \vartheta + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \cdot 2\mathfrak{B} \right)^2 \left(\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} \right)^2 \\ + \frac{\omega^4 L^2}{2c^4 r_0^2} \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 4\mathfrak{B}^2 \left(\sum_m \dots \sum_{p_1} B_{mnp} B_{m_1 - m, n_1 - n, p_1 - p} P_{m_1 n_1 p_1} \right)^2.$$

Die erste Summe ist bereits berechnet. Nach (6) und (55a) ergibt sich

$$\left(\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} \right)^2 = \frac{1}{N L^3}$$

und man ersieht unschwer, daß die zweite Summe, die N^2 im Nenner enthält, demgegenüber verschwindend klein ist. Sonach wird endlich erhalten

$$(67) \quad \overline{\mathfrak{G}^2} = \frac{\omega^4 L^2}{2c^4 N} \frac{\mathfrak{B}^2}{r_0^2} \left[\sin^2 \vartheta + 4 \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} + 4 \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 \right].$$

Das erste Glied stellt die Rayleighsche Strahlung dar. Die zwei dahinterstehenden sind die neuen Glieder, die infolge der Dichteschwankungen beizugeben sind. Diese Glieder sind, wie aus dem obigen erhellt, nur als *numerische* Maximiwerte zu betrachten; insbesondere will Gleichung (67) nichts über das Zeichen und den Polarisationszustand aussagen.

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{N} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$$

annähernd konstant; die beiden neuen Glieder sind infolgedessen mit der Dichte bzw. deren Quadrat proportional. Sie sind aber für dasjenige Druckintervall, das den Experimenten bequem zugänglich ist, außerordentlich klein. Erst wenn der Druck eine Höhe von etwa 100 Atmosphären erreicht hat, würden sich Abweichungen vom Rayleighschen Gesetze höchstens von der Größenordnung 10^{-2} einstellen; wahrscheinlich sind sie jedoch nicht einmal von dieser Größenklasse.

Ogbleich eine völlig exakte Durchführung der Berechnung nicht ausgeführt worden ist, werden die gewonnenen Resultate gleichwohl ausreichend sein, um eine Entscheidung über die Frage zu liefern, ob eine dichtere Lagerung der Moleküle die durch Opaleszenz zerstreute Energiemenge beeinflussen. Die Folgerung, die aus ihnen hervorgeht, kann wohl nur die sein, daß die Rayleighsche Formel auch im Falle dichter Lagerung innerhalb sehr weiter Grenzen die Forderungen der optischen Elektronentheorie erfüllt.

Wollte man dagegen das Opaleszenzlicht, dessen Intensität und Polarisationsverhältnisse dazu benutzen, um Auskunft über solche subtileren Fragen zu erringen, wie z. B. die Frage von der Isotropie oder Anisotropie der Resonatorenschwingungen, so kann die obige Behandlung des Gegenstandes nicht als genügend angesehen werden, und ich halte übrigens die im vorstehenden benutzte Methode für solche Zwecke als wenig geeignet.

Zusammenfassung.

Die Theorie der Opaleszenzstrahlung ist auf molekulartheoretischen Grundlagen entwickelt worden. Dabei ist auch der Einfluß der Dichteschwankungen auf die Schwingungen der Elementarresonatoren berücksichtigt worden. Das Feld um den betrachteten Körper setzt sich aus den Beugungserscheinungen und dem eigentlichen Opaleszenzfelde zusammen. Letzteres erscheint nur, wenn Dichteschwankungen vorhanden sind, in welchem Falle auch das Strahlungsglied in der Schwingungsgleichung auftritt. Wenn es keine Dichteschwankungen gibt, fallen sowohl das Opaleszenzfeld wie das Strahlungsglied fort. Ferner:

1. Die Rayleighsche Formel für die diffuse Zerstreuung ist durch eine neue ersetzt worden, die auch den Absorptionsindex für das einfallende Licht enthält, und die bei beliebig starker Absorption gültig bleibt. Die Rayleighsche Formel erscheint als ein spezieller Fall jenes allgemeineren Ausdruckes.

2. Es bleibt diese Formel auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Dichteschwankungen auf die Molekülschwingungen innerhalb eines sehr weiten Druckintervalles bestehen.

Uppsala, Fysiska Institutionen, 15. Juni 1918.

(Eingegangen 4. August 1918.)