Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs¹⁾.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Veränderliche und

$$S(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

eine beliebige formale Potenzreihe, von der nur vorausgesetzt werde, daß die aus ihren Koeffizienten c_v gebildeten Hankelschen Determinanten

$$C_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-2} \end{vmatrix}$$

für alle m von Null verschieden sind. Über die Konvergenzeigenschaften von $S(z)$ werden hier keine weiteren Annahmen gemacht, so daß also auch solche Reihen $S(z)$ in den Kreis unserer Betrachtungen einbezogen werden, die für jeden noch so großen Wert des absoluten Betrages von z divergent sind.

Nach bekannten Sätzen läßt sich dann durch einen formalen Divisionsprozeß die Reihe $S(z)$ in einen Kettenbruch

$$(1) \quad K(z) = \frac{\alpha_1}{z + \beta_1} + \frac{\alpha_2}{z + \beta_2} + \frac{\alpha_3}{z + \beta_3} + \dots$$

¹⁾ Den in dieser Arbeit veröffentlichten Satz habe ich im Frühjahr 1916 gefunden. Durch militärische Verpflichtungen gehindert, konnte ich das Manuskript erst im März 1917 fertigstellen und sandte es dann bald darauf an die Redaktion des Journals für reine und angewandte Mathematik, die die Arbeit annahm. Im Februar 1919 habe ich das Manuskript zurückerbeten, da ich erkannt hatte, daß sich mein ursprünglicher Beweis wesentlich vereinfachen ließ.

entwickeln²⁾, den wir mit Herrn Perron mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziiert nennen wollen. Seine Koeffizienten α_n sind reelle von Null verschiedene Zahlen, seine Koeffizienten β_n beliebige reelle Zahlen.

Der n -te Näherungsbruch $K_n(z)$ des Kettenbruchs $K(z)$ ist, wie sich aus den Rekursionsformeln für Kettenbrüche unmittelbar ergibt, gleich dem Quotienten zweier Polynome

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)},$$

wobei $U_n(z)$ vom Grade $n-1$, $V_n(z)$ vom Grade n ist; außerdem ist in $V_n(z)$ der Koeffizient des Gliedes z^n gleich 1.

Offenbar läßt sich $K_n(z)$ für hinreichend große Werte von z in eine konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$K_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}^{(n)}}{z^{\nu+1}}.$$

Nunmehr zeigt sich der Zusammenhang zwischen der Potenzreihe und dem mit ihr assoziierten Kettenbruch darin, daß die $2n$ ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $K_n(z)$ mit den entsprechenden Koeffizienten von $S(z)$ übereinstimmen, daß also die Beziehungen bestehen³⁾

$$(2) \quad c_{\nu}^{(n)} = c_{\nu} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Durch den Grad der Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ und durch die Beziehungen (2) ist die rationale Funktion $K_n(z)$ eindeutig bestimmt.

Die Bedingung $C_m \neq 0$ für $m = 0, 1, \dots, n-1$ erweist sich ferner nicht nur als hinreichend, sondern auch als notwendig dafür, daß eine Funktion $K_n(z)$ von den verlangten Eigenschaften existiert. Dieses Resultat läßt sich auch in dem Satze formulieren: Damit der mit einer Potenzreihe $S(z)$ assoziierte unendliche Kettenbruch $K(z)$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß die aus den Koeffizienten c_{ν} der Potenzreihe gebildeten Determinanten C_m für alle Werte von m von Null verschieden sind⁴⁾.

Umgekehrt läßt sich zu jedem Kettenbruch $K(z)$ der Form (1) eine mit ihm assoziierte Potenzreihe $S(z)$ finden, deren Koeffizienten zu den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $K_n(z)$ in den durch Formel (2) angegebenen Beziehungen stehen⁵⁾.

²⁾ O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, im folgenden kurz mit Perron, Lehrbuch zitiert. Leipzig 1913. S. 322–326 und S. 376. Siehe auch J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Dissertation Göttingen 1914, abgedruckt im Journal für reine und angewandte Math. 144 (1914), S. 114–165, im folgenden kurz mit Grommer, Dissertation zitiert. Vgl. insbesondere S. 118–123.

³⁾ l. c. Anm. 2).

2. Besonderes Interesse verdienen diejenigen Kettenbrüche, deren Koeffizienten α_ν sämtlich negative Zahlen sind mit Ausnahme von α_1 , das größer als Null ist. Sie sind mit solchen Potenzreihen $S(z)$ assoziiert, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind. Aus der Bedingung $C_m > 0$ für alle m folgt leicht $c_{2\nu} > 0$, während die Koeffizienten $c_{3\nu+1}$ positiv oder negativ oder auch gleich Null sein können.

Die Bedingung $C_m > 0$ für alle m ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\alpha_1 > 0$, $\alpha_\nu < 0$ für $\nu \geq 2$ wird. Im folgenden sollen nur Kettenbrüche $K(z)$ mit dieser Koeffizienteneigenschaft betrachtet werden.

Ihre wichtigste Eigenschaft zeigt sich bei der Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche $K_n(z)$ ⁴⁾. Es ergibt sich nämlich

$$K_n(z) = \sum_{\kappa=1}^n \frac{M_\kappa^{(n)}}{z - \lambda_\kappa^{(n)}}.$$

Hierbei sind die $\lambda_\kappa^{(n)}$, die Nullstellen des Polynoms $V_n(z)$, sämtlich reell und voneinander verschieden, die Residuen von $K_n(z)$

$$M_\kappa^{(n)} = \frac{U_n(\lambda_\kappa^{(n)})}{V_n'(\lambda_\kappa^{(n)})}$$

sämtlich positiv.

3. In seiner Arbeit über ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen untersucht Herr Grommer Kettenbrüche der eben beschriebenen Art, die mit für $|z| > \varrho$ konvergenten Potenzreihen assoziiert sind, und beweist dort den Satz⁵⁾:

Ist der Kettenbruch $K(z)$ mit einer Potenzreihe $S(z)$ assoziiert, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind und die für $|z| > \varrho$ konvergiert, so konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, dem kein Punkt der reellen Achse, der zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$ gelegen ist, angehört, und stellt dort dieselbe analytische Funktion $f(z)$ wie, für $|z| > \varrho$, die Potenzreihe $S(z)$ dar.

4. In der vorliegenden Arbeit soll ein etwas allgemeinerer Satz derselben Art bewiesen werden, indem die Voraussetzung, daß die Potenzreihe $S(z)$ einen Konvergenzkreis besitzt, abgeändert wird. Der zu beweisende Satz lautet:

Es sei eine formale Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind. Außerdem mögen zwei Konstanten

⁴⁾ Vgl. etwa Grommer, Diss. S. 123–125.

⁵⁾ Diss. Kap. I, S. 129–134.

q und k von der Beschaffenheit existieren, daß die Koeffizienten c_ν der Potenzreihe $S(z)$ sich durch die Beziehung

$$(3) \quad |c_\nu| \leq \frac{k}{q^\nu} \nu!$$

abschätzen lassen.

Dann konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält.

Durch den Kettenbruch $K(z)$ wird also in der Halbebene mit positivem Imaginärteil eine analytische Funktion $f(z)$, in der Halbebene mit negativem Imaginärteil eine analytische Funktion $f^*(z)$ definiert, und zwar ist

$$f^*(x - iy) = \bar{f}(x + iy),$$

wenn $\bar{f}$ den zu f konjugiert komplexen Wert bezeichnet. Die Funktion $f^*(z)$ wird aber im allgemeinsten Falle nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$ sein, da z. B. die Funktion $f(z)$ die Achse der reellen Zahlen als natürliche Grenze haben kann.

Für die Funktion $f(z)$ wird außerdem die Integraldarstellung

$$(4) \quad f(z) = \int_0^{-i\infty} v(t) e^{-tz} dt = -i \int_0^\infty v(-i\tau) e^{i\tau z} d\tau$$

gefunden, wobei $v(t)$ sich in die wegen (3) für $|t| < q$ konvergente Potenzreihe

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} t^\nu$$

entwickeln läßt. Das heißt aber nichts anderes, als daß sich die Funktion $f(z)$ auch durch Borelsche Summation aus der Potenzreihe $S(z)$ ergibt; da außerdem das Integral rechter Hand von (4) sich für $y \geq \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, als absolut und gleichmäßig konvergent erweist, so ist die im allgemeinen divergente Potenzreihe $S(z)$ im Borelschen Sinne sogar absolut summierbar.

Aus der Integraldarstellung (4) folgt ferner nach bekannten Sätzen von Poincaré⁶⁾ und Herrn Borel, daß die Funktion $f(z)$ im Winkelraum $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ durch die Potenzreihe $S(z)$ im Poincaréschen Sinne asymptotisch dargestellt wird.

5. Der Beweis des Konvergenzsatzes beruht im wesentlichen auf einem funktionentheoretischen Hilfssatze, der auch für sich selbst von Interesse erscheint:

⁶⁾ H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, *Ann. Math.* 8 (1886), S. 295–344. Vgl. insbesondere S. 295–296 und S. 307–312.

Ist $t = \sigma + i\tau$ eine komplexe Veränderliche und ist

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}$$

eine für $|t| < \varrho$ konvergente Potenzreihe, sind endlich die Koeffizientendeterminanten

$$(5) \quad \begin{vmatrix} b_0 & , & 1! b_1 & , & \dots & , & (m-1)! b_{m-1} \\ 1! b_1 & , & 2! b_2 & , & \dots & , & m! b_m \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ (m-1)! b_{m-1} & , & m! b_m & , & \dots & , & (2m-2)! b_{2m-2} \end{vmatrix} = C_m$$

sämtlich positiv, so läßt sich die Funktion $v(t)$ im ganzen Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ fortsetzen und bleibt dort unterhalb einer festen, von t unabhängigen Schranke.

Der Beweis dieses Satzes wird in § 2 geführt und enthält den wesentlichen mathematischen Gedanken der Arbeit.

Im § 3 wird der Beweis der Konvergenz des Kettenbruchs zu Ende geführt, der nun keine Schwierigkeiten mehr macht.

Im § 4 endlich werden für die Funktion $f(z)$ noch Darstellungen durch Stieltjessche Integrale und durch Fakultätenreihen kurz angegeben.

6. Die in den ersten drei Paragraphen ausgeführten Beweise tragen elementaren Charakter und benutzen vor allen Dingen nicht die Darstellung der Koeffizienten c_{ν} durch Stieltjessche Integrale:

$$(6) \quad c_{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{\nu} d\Phi(u).$$

Die Existenz einer solchen Darstellung ist unter Benutzung des Grommerschen Auswahltheorems⁷⁾, das das Differential $d\Phi(u)$ liefert, in dem allgemeinen Falle, der hier in Frage kommt, vom Verfasser zum ersten Male nachgewiesen worden, welcher unter Benutzung dieser Darstellung die Konvergenz des Kettenbruchs $K(z)$ auch an anderer Stelle bewiesen hat⁸⁾. Ebenda sind die Resultate anderer Arbeiten⁹⁾ über denselben Gegenstand angeführt, die auch von der Integraldarstellung (6) der Koeffizienten c_{ν} Gebrauch machen.

⁷⁾ Diss. Kap. III, S. 134–145.

⁸⁾ H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 186–222; vgl. insbesondere § 6, S. 212–218.

⁹⁾ O. Perron, Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 74 (1913), S. 545–554. — O. Szász, Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 76 (1913), S. 301–314.

Der funktionentheoretische Satz über die Fortsetzbarkeit der analytischen Funktion $v(t)$ ist unter Benutzung der Integraldarstellung (6) vom Verfasser gleichfalls an anderer Stelle¹⁰⁾ bewiesen und als eine Art von Umkehrung mit einem Satze von Herrn Pólya¹¹⁾ über die Funktionen $\frac{1}{g(z)}$, wo $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion mit nur reellen Nullstellen vom Geschlechte 0 oder 1 bezeichnet, in Zusammenhang gebracht worden. Doch glaube ich, daß trotzdem die hier ausgeführten elementaren Betrachtungen einiges Interesse verdienen.

§ 1.

Es sei eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind und deren Koeffizienten c_ν der Ungleichheitsbeziehung (3) genügen.

Wie in der Einleitung auseinandergesetzt wurde, existiert dann der mit $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$, und zwar wird $\alpha_1 > 0$, $\alpha_\nu < 0$ für $\nu \geq 2$.

Für seinen Näherungsbruch n -ter Ordnung $K_n(z)$ erhält man die Darstellungen

$$(7) \quad K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \sum_{\kappa=1}^n \frac{M_\kappa^{(n)}}{z - \lambda_\kappa^{(n)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu^{(n)}}{z^{\nu+1}},$$

wobei für die Koeffizienten $c_\nu^{(n)}$ die fundamentalen Beziehungen (2) gelten.

Die Partialbruchzerlegung für $K_n(z)$ wollen wir jetzt in anderer Form schreiben, indem wir $\frac{1}{z - \lambda_\kappa^{(n)}}$ durch das für $y \geq \delta$ absolut und gleichmäßig

konvergente Integral $\int_0^{-i\infty} e^{-t(z - \lambda_\kappa^{(n)})} dt$ ersetzen. Es ergibt sich so

$$(8) \quad K_n(z) = \sum_{\kappa=1}^n M_\kappa^{(n)} \int_0^{-i\infty} e^{-t(z - \lambda_\kappa^{(n)})} dt = \int_0^{-i\infty} v_n(t) e^{-tz} dt,$$

wenn

$$(9) \quad v_n(t) = \sum_{\kappa=1}^n M_\kappa^{(n)} e^{\lambda_\kappa^{(n)} t}$$

gesetzt wird.

¹⁰⁾ H. Hamburger, Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya; wird in der Math. Zeitschr. erscheinen.

¹¹⁾ G. Pólya, Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte 0 und 1, Journal für reine und angew. Math. 145 (1915), S. 224–249, vgl. insbes. S. 235–237.

Da $v_n(t)$ eine ganze transzendente Funktion ist, läßt sich $v(t)$ an der Stelle $t=0$ in eine Potenzreihe

$$v_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}^{(n)} t^{\nu}$$

entwickeln, und zwar erhält man wegen (9)

$$b_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{\nu!} \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{\nu}.$$

Aus (7) folgt aber andererseits

$$(10) \quad \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{\nu} = c_{\nu}^{(n)},$$

also

$$b_{\nu}^{(n)} = \frac{c_{\nu}^{(n)}}{\nu!}.$$

Wir beweisen zunächst, daß für $|t| \leq \varrho - \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, die Funktionen $v_n(t)$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen die Funktion

$$(11) \quad v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}$$

konvergieren. Daß die Potenzreihe (11) für $|t| < \varrho$ konvergiert, folgt unmittelbar aus der Abschätzung (3) für $|c_{\nu}|$.

Gelegentlich des Beweises seines in der Einleitung zitierten Konvergenzsatzes zeigt Herr Grommer, daß

$$c_{2\nu}^{(n)} \leq c_{2\nu}$$

ist für alle n und alle ν . Der Nachweis dieser Ungleichheitsbeziehung, den wir der Vollständigkeit halber hier kurz skizzieren wollen, stützt sich auf einen Hilfssatz, der in größerer Allgemeinheit von Laguerre¹²⁾ formuliert worden ist, und für den in der hier erforderlichen speziellen Fassung Herr Grommer einen einfachen algebraischen Beweis angibt. Der Satz lautet:

Es sei $P(z)$ ein Polynom m -ten Grades mit nur reellen Nullstellen. Außerdem sei der Koeffizient des Gliedes z^m gleich 1. Entwickelt man $\frac{1}{P(z)}$ in die Potenzreihe

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m+1}} + \frac{a_2}{z^{m+2}} + \dots$$

so sind alle Koeffizienten $a_{2\nu} > 0$.

¹²⁾ Laguerre, Œuvres, Bd. I, S. 169; Grommer, Diss., S. 180–182.

Aus diesem Hilfssatz folgt Herr Grommer die Beziehung $c_{2\nu}^{(n)} \leq c_{2\nu}$, indem er von der Fundamentalformel für Kettenbrüche¹³⁾

$$(12) \quad \frac{U_{n+1}(z)}{V_{n+1}(z)} - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{V_{n+1}(z) V_n(z)}$$

Gebrauch macht. Entwickelt man nämlich $\frac{1}{V_{n+1}(z) V_n(z)}$ in eine Potenzreihe $\frac{1}{z^{2n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$, so ist $a_{2\nu} > 0$, da das Polynom $V_{n+1}(z) V_n(z)$ allen Voraussetzungen des Laguerreschen Hilfssatzes genügt. Andererseits folgt aber aus (12), indem man die Potenzreihenentwicklung (7) der Näherungsbrüche $K_n(z)$ berücksichtigt,

$$c_{2\nu}^{(n+1)} - c_{2\nu}^{(n)} = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1} a_{2\nu-2n}$$

für $\nu \geq n$; also, da außerdem $\alpha_1 > 0$, $-\alpha_2 > 0$, ..., $-\alpha_{n+1} > 0$ ist,

$$c_{2\nu}^{(n+1)} - c_{2\nu}^{(n)} > 0 \quad \text{für } \nu \geq n.$$

Nun ist aber nach Formel (2) der Einleitung

$$c_{2\nu}^{(n+m)} = c_{2\nu} \quad \text{für } n+m \geq \nu+1,$$

also, mit Rücksicht auf die Abschätzung (3)

$$(13) \quad c_{2\nu}^{(n)} \leq c_{2\nu}^{(n+1)} \leq \dots \leq c_{2\nu}^{(n+m)} \leq c_{2\nu} \leq \frac{k}{\varrho^{2\nu}} (2\nu)!,$$

wie behauptet wurde.

Aus der Summendarstellung (10) für die Koeffizienten $c_\nu^{(n)}$ folgt ferner, daß die quadratische Form

$$c_{2\nu}^{(n)} x_0^2 + 2c_{2\nu+1}^{(n)} x_0 x_1 + c_{2\nu+2}^{(n)} x_1^2 = \sum_{\kappa=1}^n M_\kappa^{(n)} \left(x_0 (\lambda_\kappa^{(n)})^\nu + x_1 (\lambda_\kappa^{(n)})^{\nu+1} \right)^2$$

positiv definit, und damit ihre Determinante

$$c_{2\nu}^{(n)} c_{2\nu+2}^{(n)} - (c_{2\nu+1}^{(n)})^2 > 0$$

ist. Dies ergibt aber für $c_{2\nu+1}^{(n)}$ die Abschätzung

$$(14) \quad |c_{2\nu+1}^{(n)}| \leq \sqrt{c_{2\nu}^{(n)} c_{2\nu+2}^{(n)}} \leq \sqrt{c_{2\nu} c_{2\nu+2}} \\ \leq k \sqrt{1 + \frac{1}{2\nu+1}} \left(\frac{1}{\varrho} \right)^{2\nu+1} (2\nu+1)! \leq k\sqrt{2} \left(\frac{1}{\varrho} \right)^{2\nu+1} (2\nu+1)!,$$

wenn man die Abschätzung (13) für die $c_{2\nu}^{(n)}$ berücksichtigt.

Wegen (2) wird nun aber

$$v(t) - v_n(t) = \sum_{\nu=2n}^{\infty} \frac{c_\nu - c_\nu^{(n)}}{\nu!} t^\nu,$$

¹³⁾ Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 16 u. 378.

also erhält man für $|t| \leq \varrho - \delta$, indem man die Abschätzungen (3), (13) und (14) benutzt,

$$|v(t) - v_n(t)| \leq \sum_{\nu=2n}^{\infty} \frac{|c_\nu| + |c_\nu^{(n)}|}{\nu!} (\varrho - \delta)^\nu \\ \leq k(1 + \sqrt{2}) \sum_{\nu=2n}^{\infty} \left(\frac{\varrho - \delta}{\varrho}\right)^\nu = k(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{\varrho - \delta}{\varrho}\right)^{2n} \frac{\varrho}{\delta}.$$

Diese Differenz kann aber, indem man n nur groß genug wählt, unabhängig von t beliebig klein gemacht werden, und damit ist gezeigt, daß die Folge der Funktionen $v_n(t)$ mit wachsendem n für $|t| \leq \varrho - \delta$ gleichmäßig gegen $v(t)$ konvergiert.

§ 2.

Wir kommen jetzt zu dem Beweise des in der Einleitung erwähnten funktionentheoretischen Hilfssatzes; das heißt, wir wollen zeigen, daß eine beliebige für $|t| < \varrho$ konvergente Potenzreihe

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} t^\nu \quad (t = \sigma + i\tau),$$

deren Koeffizientendeterminanten C_m [vgl. Formel (5)] sämtlich positiv sind, sich in dem ganzen Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ fortsetzen läßt.

Beweis: Da nach Voraussetzung die Potenzreihe $v(t)$ den Kreis $|t| = \varrho$ zum Konvergenzkreis besitzt, so ist nach bekannten Sätzen

$$(3') \quad |b_\nu| \leq \frac{k}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^\nu}, \quad |c_\nu| \leq \frac{k \nu!}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^\nu},$$

wo k eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Die Funktion $v(t)$ erfüllt daher die gleichen Voraussetzungen wie die Funktion (11) des § 1, nur daß die Abschätzung (3') an Stelle von (3) tritt. Es folgt daher aus den Ausführungen des vorigen Paragraphen, daß eine Folge von Funktionen

$$v_n(t) = \sum_{\kappa=1}^n M_\kappa^{(n)} e^{\lambda_\kappa^{(n)} t}$$

existiert, die für $|z| \leq \varrho - \delta$ gleichmäßig gegen $v(t)$ konvergiert. Die $\lambda_\kappa^{(n)}$ ergeben sich als die wegen $C_m > 0$ reellen einfachen Pole der Näherungsbrüche $K_n(z)$ des mit $S(z)$ assoziierten Kettenbruches $K(z)$, die $M_\kappa^{(n)}$ als die wegen $C_m > 0$ positiven Residuen von $K_n(z)$ an den Polen $z = \lambda_\kappa^{(n)}$.

Der Beweis unseres Hilfssatzes stützt sich auf einen oft angewandten Satz von Stieltjes über konvergente Folgen analytischer Funktionen¹⁴⁾:

¹⁴⁾ T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. de la fac. des sciences de Toulouse 8 (1894), S. 50–61.

Es sei eine unendliche Folge analytischer Funktionen $v_n(t)$ vorgelegt, die im Innern eines Bereiches Ω dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen gemeinsamen Schranke bleiben. Außerdem konvergiere in einem Teilbereiche Ω' von Ω die Folge der Funktionen $v_n(t)$ gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $v(t)$. Dann ist die analytische Funktion $v(t)$ in jedem ganz im Innern von Ω gelegenen Bereich Ω^* regulär, und die Funktionen $v_n(t)$ konvergieren in Ω^* gleichmäßig gegen die Funktion $v(t)$.

Um diesen Satz zum Beweise unseres Hilfssatzes anwenden zu können, ist nur noch nachzuweisen, daß die Funktionen $v_n(t)$ unseres Hilfssatzes in dem Bereiche $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gemeinsamen festen Schranke G bleiben. Dann folgt unser Hilfssatz unmittelbar aus dem Stieltjesschen Satze.

Wir zeigen zunächst, daß die Funktionen $v_n(t)$ samt ihren Ableitungen $v_n^{(\nu)}(t)$ für rein imaginäre Werte $t = i\tau$, unterhalb einer festen Schranke bleiben, die nur von ν , aber nicht von n und τ abhängt. Wegen (9), (10), (13) und (3') erhält man

$$v_n^{(2\nu)}(i\tau) = \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{2\nu} e^{\lambda_{\kappa}^{(n)} i\tau}$$

$$(15) \quad |v_n^{(2\nu)}(i\tau)| \leq \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{2\nu} = c_{2\nu}^{(n)} \leq k \frac{(2\nu)!}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^{2\nu}},$$

da $M_{\kappa}^{(n)} > 0$ ist. Ebenso findet man

$$|v_n^{(2\nu+1)}(i\tau)| \leq \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} |\lambda_{\kappa}^{(n)}|^{2\nu+1};$$

aus der Schwarzschen Ungleichheitsbeziehung und der Abschätzung (14) in Verbindung mit (3') ergibt sich endlich

$$(16) \quad |v_n^{(2\nu+1)}(i\tau)| \leq \sqrt{\sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{2\nu+2} \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} (\lambda_{\kappa}^{(n)})^{2\nu}}$$

$$\leq \sqrt{c_{2\nu+2}^{(n)} c_{2\nu}^{(n)}} \leq k \sqrt{2} \frac{(2\nu+1)!}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^{2\nu+1}}.$$

Es sei jetzt $t = \sigma + i\tau$ ein beliebiger Punkt des Bereiches $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$, dann erhält man, wenn man $v_n(\sigma + i\tau)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt, auf Grund der Abschätzungen (15) und (16)

$$\begin{aligned}
 |v_n(t)| &= \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^r}{r!} v_n^{(r)}(i\tau) \right| \leq \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho - \frac{\delta}{2}}{r!} \right)^r |v_n^{(r)}(i\tau)| \\
 &\leq k\sqrt{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho - \frac{\delta}{2}}{\varrho - \frac{\delta}{4}} \right)^r = k\sqrt{2} \frac{\varrho - \delta}{\delta}.
 \end{aligned}$$

Somit bleiben also die Funktionen $v_n(t)$ im Streifen $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen von n und t unabhängigen Schranke $G = k\sqrt{2} \frac{\varrho - \delta}{\delta}$, konvergieren also nach dem Satze von Stieltjes gleichmäßig in dem Bereiche $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$, $|\tau| \leq R$ für jedes noch so große positive R gegen die dort analytische Funktion $v(t)$.

Aus der Abschätzung

$$(17) \quad |v_n(t)| \leq G$$

folgt endlich für denselben Bereich auch

$$(18) \quad |v(t)| \leq G.$$

Damit sind alle Behauptungen des Hilfssatzes bewiesen.

Zusatz: Sind außer den aus den Koeffizienten $c_r = v^{(r)}b_r$ gebildeten Determinanten C_m auch sämtliche Determinanten

$$B_m = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix} > 0,$$

so existiert, wenn wieder mit ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe (11) bezeichnet wird, die durch diese Reihe dargestellte Funktion $v(t)$ in der ganzen Halbebene $\sigma \leq \varrho - \delta$ und bleibt dort kleiner als eine feste von t unabhängige Größe.

Obgleich im folgenden von diesem Satze kein Gebrauch gemacht wird, soll hier sein Beweis kurz angegeben werden, da er an sich von Interesse erscheint.

Beweis: Wie beim vorigen Beweise gezeigt wurde, läßt sich wegen der Voraussetzung $C_m > 0$ für alle m in dem Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ die Funktion $v(t)$ als Grenzwert der konvergenten Folge von Funktionen

$$v_n(t) = \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} e^{\lambda_{\kappa}^{(n)} t}$$

darstellen. Nun folgt aber nach bekannten Sätzen¹⁴⁾ aus der Voraussetzung $B_m > 0$ für alle m , daß die Näherungsbrüche $K_n(z)$ des mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziierten Kettenbruches nur für positive Werte von z Pole haben können. Da ferner, wie oben gezeigt wurde, die Stellen $z = \lambda_n^{(n)}$ gerade die Pole von $K_n(z)$ sind, so ist $\lambda_n^{(n)} > 0$ für alle n und alle n .

Man erhält also für $\sigma \leq 0$ wegen $M_n^{(n)} > 0$

$$|v_n(t)| \leq \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} e^{\sigma \lambda_{\kappa}^{(n)}} \leq \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} = c_0.$$

Die $v_n(t)$ bleiben also in der ganzen Halbebene $\sigma \leq 0$ unterhalb einer festen von n und t unabhängigen Schranke, und daraus folgt die Behauptung des Zusatzes unmittelbar unter Benutzung des Stieltjesschen Satzes.

§ 3.

Der Nachweis, daß der mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ für $y \geq \delta$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$(19) \quad f(z) = \int_0^{-i\infty} v(t) e^{-tz} dt.$$

konvergiert, bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr.

Zunächst folgt aus der Abschätzung (18) für $v(t)$, die längs des gesamten Integrationsweges des Integrals (19) gilt, daß das Integral (19) für $y \geq \delta$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Andererseits war nach Formel (8)

$$K_n(z) = \int_0^{-i\infty} v_n(t) e^{-tz} dt.$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß zu den beiden vorgegebenen beliebig kleinen Zahlen ε und δ eine Zahl N von der Beschaffenheit bestimmt werden kann, daß für $y \geq \delta$ und alle $n \geq N$

$$(20) \quad |f(z) - K_n(z)| \leq \varepsilon$$

wird. Es ist

$$|f(z) - K_n(z)| \leq \int_0^{-R} |v(i\tau) - v_n(i\tau)| e^{\tau\delta} d\tau + \int_{-R}^{-\infty} (|v(i\tau)| + |v_n(i\tau)|) e^{\tau\delta} d\tau.$$

Zunächst werde R so groß gewählt, daß

$$\int_{-R}^{-\infty} e^{\tau\delta} d\tau = \frac{e^{-R\delta}}{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{3\delta}$$

¹⁵⁾ Vgl. z. B. Stieltjes, l. c. Anm. ¹⁴⁾ S. 10–12, oder Perron, Lehrbuch, S. 393–396.

wird, wobei R nur von ε und δ abhängt. Dann wird auf Grund der Abschätzungen (17) und (18)

$$(21) \quad \int_{-R}^{-\infty} (|v(i\tau)| + |v_n(i\tau)|) e^{\tau\delta} d\tau \leq \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Jetzt wähle man eine hinreichend große Zahl $N = N(\varepsilon, \delta)$, die nur von ε und δ abhängt von der Beschaffenheit, daß für $0 \leq \tau \leq -R$

$$|v(i\tau) - v_n(i\tau)| \leq \frac{\varepsilon\delta}{3}$$

ist; dann erhält man

$$(22) \quad \int_0^{-R} |v(i\tau) - v_n(i\tau)| e^{\tau\delta} d\tau \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nunmehr folgt (20) für $n \geq N = N(\varepsilon, \delta)$ aus (21) und (22).

Entsprechend zeigt man, daß für $y \leq -\delta$ die Näherungsbrüche $K_n(z)$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$f^*(z) = \int_0^{i\infty} v(t) e^{-tz} dt$$

konvergieren.

Es ist für $y \geq \delta$, wie aus der Partialbruchzerlegung (7) für $K_n(z)$ unmittelbar hervorgeht,

$$(23) \quad K_n(x - iy) = \bar{K}_n(x + iy),$$

wenn mit $\bar{K}_n(x + iy)$ der zu $K_n(x + iy)$ konjugiert komplexe Wert bezeichnet wird. Aus (23) folgt aber

$$f^*(x - iy) = \bar{f}(x + iy).$$

Damit ist der in der Einleitung angegebene Konvergenzsatz für Kettenbrüche vollständig bewiesen.

§ 4.

Aus den Sätzen des Kap. III der Grommerschen Dissertation¹⁶⁾ folgt, daß sich $f(z)$ für $y \geq \delta$ durch ein Stieltjessches Integral

$$(24) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u}$$

darstellen läßt, wobei mit $\Phi(u)$ eine reelle, nirgends abnehmende Funktion von u bezeichnet ist.

¹⁶⁾ Dissertation S. 134–143.

Für $y < 0$ findet man wegen $f^*(x + iy) = \bar{f}(x - iy)$ gleichfalls

$$(25) \quad f^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u}.$$

Die Darstellungen (24) und (25) lassen erkennen, wann $f^*(z)$ die analytische Fortsetzung von $f(z)$ ist: nämlich dann und nur dann, wenn ein Intervall $a \leq u \leq b$ existiert, in dem $d\Phi(u)$ identisch verschwindet.

Denn in diesem Falle lassen sich die Integrale (24) bzw. (25) in der Form schreiben

$$(26) \quad \begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^a \frac{d\Phi(u)}{z-u} + \int_b^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u} && \text{für } y > 0, \\ f^*(z) &= \int_{-\infty}^a \frac{d\Phi(u)}{z-u} + \int_b^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u} && \text{für } y < 0. \end{aligned}$$

Da ferner die Integrale (26) in den Vertikalstreifen $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ gleichmäßig konvergieren und in diesem Gebiete reguläre analytische Funktionen darstellen, so erweist sich $f^*(z)$ als diejenige Funktion, die man erhält, wenn man $f(z)$ längs des Intervalles $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ über die Ebene der Zahlen mit positivem Imaginärteil hinaus fortsetzt.

Die angegebene Bedingung ist aber auch notwendig dafür, daß $f(z)$ und $f^*(z)$ dieselbe analytische Funktion darstellen; denn nach einem Satz des Herrn Grommer¹⁷⁾ folgt aus

$$\lim_{y=0} [f(x + iy) - f^*(x - iy)] = \varphi(x) \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

daß $\Phi(u)$ in dem Intervall $a \leq u \leq b$ differentiierbar, und zwar daß

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{\varphi(x)}{2\pi i}.$$

ist.

Ist nun $f^*(x - iy)$ für $y > 0$ die analytische Fortsetzung von $f(x + iy)$ längs des Intervalles $a \leq x \leq b$, so ist in diesem Intervall $\varphi(x) = 0$, also auch $d\Phi(x) = 0$. W. z. b. w.

Zum Schlusse noch eine kurze Bemerkung über eine letzte, vierte Darstellung der Funktion $f(z)$.

Da $f(z)$ die durch Borelsche Summation der Reihe $S(z)$ gebildete

¹⁷⁾ Dissertation, S. 148–150.

Funktion ist, so läßt sie sich nach Sätzen der Herren Pincherle¹⁸⁾, Horn¹⁹⁾ und Nörlund²⁰⁾ in eine Fakultätenreihe entwickeln von der Form

$$(27) \quad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(i\omega)^{\nu} a_{\nu} \nu!}{z(z+i\omega)(z+2i\omega)\dots(z+(\nu-1)i\omega)}.$$

Hierbei ist ω eine positive Konstante, die sich nach einem Satze von Herrn Nörlund²¹⁾ so bestimmen läßt, daß die Reihe (27) in der Halbebene $y \geq \delta$ gleichmäßig konvergiert.

Die a_{ν} sind in einfacher Weise durch die c_{ν} bestimmt; es ist nämlich

$$a_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \gamma_{\nu\kappa} c_{\kappa},$$

$$c_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Gamma_{\nu\kappa} a_{\kappa}.$$

Hierbei sind die $\gamma_{\nu\kappa}$ bzw. $\Gamma_{\nu\kappa}$ Konstanten, die nur von ω , aber nicht von der speziellen Wahl der c_{ν} bzw. a_{ν} abhängen und für die sich leicht explizite Formeln angeben lassen.

Hiermit sind für die Funktion $f(z)$ vier für $y \geq \delta$ gleichmäßig konvergente Darstellungen gefunden: erstens durch den Kettenbruch $K(z)$ der Formel (1), zweitens durch das Borelsche Integral (4), drittens durch das Stieltjessche Integral (24), viertens durch die Fakultätenreihe (27). Endlich läßt sich $f(z)$ noch durch die Potenzreihe $S(z)$ im Winkelraum $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ asymptotisch darstellen.

¹⁸⁾ Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. scient. de l'éc. norm. sup. 22 (1905), S. 1–68, vgl. insbes. S. 50–57.

¹⁹⁾ J. Horn, Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 71 (1912), S. 510–532.

²⁰⁾ Nörlund, Sur les séries de facultés, Acta math. 37 (1914), S. 327–387.

²¹⁾ l. c. Anm. ¹⁹⁾ S. 371.