COSTANTI MAGNETICHE DI LEGHE DEBOLMENTE MAGNETICHE.

Prof. TULLIO GNESOTTO, Dott. MARIA BINGHINOTTO.

All'infuori delle misure ottenute dal Laws ¹⁾ sulla suscettività magnetica di quattro leghe di stagno e bismuto, nessun'altra ricerca fu fatta intorno al magnetismo delle leghe debolmente magnetiche (paramagnetiche o diamagnetiche).

I risultati del Laws mostrano soltanto come, entro i ristretti limiti delle sue misure, le leghe assai ricche di bismuto abbiano una suscettività notevolmente inferiore, in valore assoluto, a quella del bismuto.

Noi ci proponemmo di completare lo studio del Laws sulle leghe Sn — Bi, di estenderlo ad altre leghe contenenti bismuto ed a leghe dalle quali esso fosse escluso, tenendo conto dell'eccezionale suo comportamento di fronte a tutti gli altri corpi diamagnetici.

Ricordiamo in fatto che il coefficiente di magnetizzazione, cioè il rapporto fra il momento magnetico dell'unità di massa e l'intensità del campo magnetizzante, è indipendente dall'intensità del campo per tutti i corpi diamagnetici e paramagnetici, indistintamente. Ma, mentre il calore ed in particolare i cambiamenti di stato fisico e chimico non hanno che un'azione insignificante sulle proprietà diamagnetiche, il coefficiente di magnetizzazione del bismuto solido varia linearmente con la temperatura, diminuendo di circa un millesimo del suo valore per l'aumento di un grado, e nel passaggio da solido a liquido diviene bruscamente venticinque volte minore.

Il peculiare comportamento del bismuto, che si scosta dalle leggi del Curie ²⁾, sarebbe in disaccordo con la teoria elettronica del paramagnetismo e diamagnetismo del Langevin ³⁾, la quale fa del diamagnetismo una proprietà atomica e quindi indipendente dallo stato fisico e chimico della materia.

Senonchè nel bismuto solido i corpuscoli catodici si muovono, secondo J. J. Thomson ⁴⁾, in gran parte liberamente, cioè non tutti in orbite chiuse come negli altri corpi ⁵⁾, ed in numero e modo variabili a seconda delle condizioni fisiche. Questa particolare costituzione fisica del bismuto, in tenue grado forse comune all'antimonio, dà maniera al Langevin ⁶⁾ di giustificare la variazione della costante magnetica allo stato solido per effetto della temperatura, ammettendo che una variazione di questa alteri la velocità degli elettroni liberi, il loro libero percorso ed il loro numero.

Per queste ragioni è utile qualunque ricerca fatta sulle proprietà magnetiche del bismuto nei suoi composti, nelle sue leghe, in particolare poi nelle sue amalgame solide e liquide, per studiare come si modifichi la sua costituzione corpuscolare nelle diverse specie molecolari dei suoi composti e nelle speciali condizioni chimicofisiche nelle quali i suoi atomi si trovano nelle leghe.

Nelle nostre misurazioni abbiamo usato un metodo che risulta da un'ingegnosa semplificazione, portata dal Meslin ⁷⁾ al metodo che il Curie ⁸⁾ adottò nelle sue prime ricerche del 1895.

Il metodo, di facile applicazione, può usarsi montando un apparecchio coi comuni mezzi di laboratorio; è scevro da errori sistematici che non di rado presentano altri metodi, e non esige lunghi studi sperimentali sulla natura del campo magnetico non uniforme, all'azione del quale va sottoposto il corpo diamagnetico o paramagnetico.

E poichè di esso metodo il Meslin dà una descrizione assai concisa, accennando solo di sfuggita, senza giustificarle, talune circostanze essenziali, che semplificano di molto le misurazioni, così crediamo opportuno di dimostrare per via teorica la ragione della sua semplicità e additare le condizioni nelle quali occorre porsi per applicarlo con vantaggio.

§ 1. — Il principio del metodo di misura.

Ricordiamo brevemente il principio, del resto notissimo, sul quale si fonda il metodo, che noi chiameremo di Curie-

Meslin e che appartiene alla specie di metodi magnetometrici più opportuna ⁹⁾ per la misura dei piccoli coefficienti di magnetizzazione.

Se indichiamo con $Oxyz$ una terna di assi cartesiani ortogonali e con $H = H(xyz)$ l'intensità di un campo magnetico costante col tempo e variabile da punto a punto, l'energia magnetica E posseduta da un corpo isotropo ed omogeneo, di densità ρ , il quale occupa uno spazio S , qualora il coefficiente di magnetizzazione K del corpo nel mezzo in cui esso si trova, sia abbastanza piccolo per non alterare il campo in causa della sua presenza, è:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_s K H^2 dS.$$

Se, com'è nel caso dei nostri corpi diamagnetici e paramagnetici, K è indipendente dall'intensità del campo, e quindi dalla posizione del corpo nel campo non uniforme, possiamo scrivere:

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} K \rho \int_s H^2 dS.$$

Supponiamo ora che il campo sia prodotto da due magneti rettilinei affacciati cosicchè i loro assi magnetici siano sulla stessa retta, che assumiamo come asse delle x . Indichiamo con A_1 ed A_2 i due poli affacciati sui quali immaginiamo concentrate le due masse magnetiche, alle quali deve il campo.

Per ragione di simmetria sono nulle le componenti del campo normalmente alla retta x nell'intervallo $A_1 A_2$; in questo intervallo il campo è adunque diretto secondo x . Indicheremo con H la sua intensità.

Evidentemente H è funzione regolare di x nell'interno dell'intervallo $A_1 A_2$ (estremi esclusi).

Il valore $F(x)$ della forza, che si esercita nella direzione del campo su di un corpo magnetico, occupante il volume S , è dato da:

$$(2) \quad F(x) = \frac{d \left(\frac{1}{2} K \rho \int_s H^2 dS \right)}{dx},$$

il differenziale che sta al numeratore rappresentando l'incremento che subisce l'energia magnetica del corpo per effetto di una traslazione elementare dx .

Se il corpo è foggiato a sottile cilindretto di sezione σ con l'asse secondo x e se indichiamo con x_1 ed $x_2 > x_1$ le posizioni delle sue faccie terminali su x , potremo scrivere :

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{2} K \rho \sigma (H_{x_2}^2 - H_{x_1}^2) .$$

Di quà i noti metodi per la determinazione della suscettività, fondati sulla misura della forza esercitata su un corpo foggiato come dicemmo e sulla conoscenza dell'intensità del campo nei punti occupati dalle estremità del cilindretto.

Supponiamo in particolare, com'è nel caso nostro, che il corpo abbia dimensioni abbastanza piccole rispetto alla distanza $A_1 A_2$, così che se ne possa individuare la posizione mediante la coordinata lungo l'asse Ox di un solo punto, per esempio quella di uno dei suoi estremi, diciamo x ; posto allora $x_1 = x$ ed $x_2 = x + dx$, sarà, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo :

$$H_{x_2}^2 - H_{x_1}^2 = 2 H \frac{dH}{dx} dx .$$

Sostituendo nella (3), osservando che σdx è il volume S del corpo, $\rho \sigma dx$ la sua massa materiale che indicheremo con M , si può scrivere :

$$(4) \quad F(x) = K M H \frac{dH}{dx} .$$

La (4) permette di determinare il valore del coefficiente di magnetizzazione di un corpo diamagnetico o paramagnetico che si trovi nelle condizioni suesposte, qualora si faccia uno studio preliminare del campo non uniforme nell'intorno del punto x e si determini sperimentalmente il valore della forza che si esercita sul corpo quando esso si trova nel punto considerato.

La praticità del metodo di Curie-Meslin, risulta essenzialmente dalla semplicità della forma che la funzione $H \frac{dH}{dx}$ assume quando siano soddisfatte speciali condizioni che diremo in appresso.

§ 2. — Nostre considerazioni sul metodo di Curie-Meslin.

Supponiamo che nei punti A_1 e A_2 siano concentrate due masse magnetiche differenti in segno ed in valore assoluto. Per fissare le idee indichiamole con $+M$ e $-m$ ed ammettiamo che il valore assoluto M della prima sia maggiore di quello m della seconda.

Per ottenere in pratica due masse magnetiche diverse in valore assoluto, il Meslin ⁷⁾, usando di un comune elettromagnete di Faraday, i cui assi dei nuclei affacciati sono sulla stessa retta, fa circolare una corrente costante in uno solo degli avvolgimenti che circondano i nuclei.

Se la massa maggiore M si può considerare concentrata in A_1 diremo, per brevità, di aver prodotto il campo $(A_1 M, A_2 m)$. Indichiamo con 2δ la distanza $A_1 A_2$. Assumiamo per origine

Fig. 1.

del sistema di riferimento il punto di mezzo 0 del segmento $A_1 A_2$ e per verso positivo dell'asse x quello che va da M ad m ; le attrazioni o repulsioni esercitate da A_1 verso A_2 riescono così negative o positive conforme alle solite convenzioni.

L'intensità del campo magnetico in un punto x di quel segmento è dato da :

$$(5) \quad H(x) = \frac{M}{(\delta + x)^2} + \frac{m}{(\delta - x)^2} .$$

La funzione $H(x)$, finita nell'interno dell'intervallo $-\delta$ e $+\delta$, infinita agli estremi di questo, è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo.

Cerchiamo ora il punto R_1 dell'intervallo $A_1 A_2$ in cui $H(x)$ diventa minima. Eguagliamo a zero la derivata prima di $H(x)$:

$$(6) \quad \frac{dH}{dx} = 2 \left\{ \frac{m}{(\delta - x)^3} - \frac{M}{(\delta + x)^3} \right\};$$

la equazione di terzo grado in x , che così si ottiene, nell'interno dell'intervallo $A_1 A_2$ ammette una sola radice reale finita, positiva, il cui valore indicheremo con a . Potremo per essa scrivere:

$$(7) \quad \frac{m}{M} = \frac{(\delta - a)^3}{(\delta + a)^3},$$

oppure:

$$(7') \quad a = \delta \frac{\sqrt[3]{M} - \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{m}} \quad (M > m).$$

È facile verificare che la funzione $H(x)$ assume per $x = a$ il suo valore assoluto minimo, $H_{\min}$, nell'interno di $A_1 A_2$.

Consideriamo ora il prodotto $H(x) \frac{dH(x)}{dx}$.

Dalle (5) e (6) risulta che questo prodotto è una funzione di x continua e derivabile nei punti interni all'intervallo $A_1 A_2$, che tende a $-\infty$ per $x = -\delta$ ed a $+\infty$ per $x = \delta$, che s'annulla nel punto di ascissa $x = a$ e che assume valori negativi a sinistra di questo punto e valori positivi a destra di esso.

Scriveremo per brevità:

$$(8) \quad y(x) = H(x) \frac{dH(x)}{dx}.$$

Dalle (5) e (6) si ottiene:

$$(9) \quad y(x) = 2 \left\{ \frac{m^3}{(\delta + x)^5} + 2 \frac{M m x}{(\delta - x)^3 (\delta + x)^3} - \frac{M^3}{(\delta - x)^5} \right\}.$$

Per $x = 0$ si ha :

$$(10) \quad y(0) = -2 \frac{M^2 - m^2}{\delta^3},$$

che è il valore del prodotto HH' nel punto di mezzo del campo.

Dalla (10), essendo $M > m$ e per la continuità della y nell'interno di A, A_2 , possiamo concludere :

Pel campo (A, M, A, m) la y è negativa nell'intorno del punto mediano del campo.

Nell'ipotesi che il rapporto dato dalle (7) sia non tanto discosto dall'unità è facile dimostrare che l'andamento della $y(x)$ nell'intervallo $(0, +a)$ è molto prossimamente lineare.

La condizione suesposta trae di conseguenza che il rapporto $\frac{a}{\delta}$ dev'essere abbastanza piccolo senza però esser nullo. Orbene: derivando la (9) e sviluppando in serie, trascurando i termini contenenti i quadrati e le potenze superiori del rapporto $\frac{x}{\delta}$, si ha ;

$$(9') \quad y' = -\frac{1}{\delta^6} \left\{ 10(M^2 + m^2) + 4Mm + 60(M^2 - m^2) \frac{x}{\delta} \right\}.$$

Per la ipotesi ammessa, la differenza $M^2 - m^2$ non può essere molto grande, mentre è grandissima la somma dei due primi termini entro parentesi. Si può dunque in prima approssimazione, considerare il termine in $\frac{x}{\delta}$ come trascurabile rispetto ai termini costanti entro parentesi. È così che la y' , per valori di x abbastanza piccoli rispetto a δ , può considerarsi costante. Da ciò la approssimata linearità di y .

Nel diagramma cartesiano qui riportato (fig. 2) sono disegnate le curve $H(x)$, $H'(x)$ ed $y(x)$ in un intervallo del campo comprendente l'origine 0 ed il punto R, di ascissa $x = a$, nel quale la $H(x)$ diventa minima e le H' ed y si

annullano *). L'ordinata $0 P_0$ rappresenta il valore di $y(0)$ dato dalla (10).

Fig. 2.

Nelle ascisse ogni centimetro rappresenta circa cm. 0,13. Nelle ordinate della curva $H(x)$ ogni centimetro rappresenta 1,8 unità C. G. S. e si ha la intensità del campo aggiungendo alla misura delle ordinate 37 unità.

Per le ordinate della curva $H'(x)$ e di quella $y(x)$ ogni centimetro rappresenta rispettivamente circa 18 e 360 unità.

Possiamo prendere come equazione approssimata della curva $y = y(x)$ (9) quella della retta che passa per due punti

*) Le curve furono tracciate per punti introducendo nelle (5), (6), (9) per δ, m, M dei valori assai prossimi a quelli da noi determinati per un caso pratico (vedi pag. 419).

di essa curva, nel tratto in cui questa può considerarsi rettilinea, e precisamente per i due punti :

$$R_1 (x = a, y = 0) \text{ e } P_0 \left(x = 0, y = y(0) = -2 \frac{M^2 - m^2}{\delta^3} \right).$$

L'equazione della retta, che approssimativamente rappresenta la curva, è dunque :

$$(11) \quad y(x) = y(0) \left(1 - \frac{x}{a} \right) = -2 \frac{M^2 - m^2}{\delta^3} \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

Verificheremo più tardi come in pratica le ordinate di questa retta, per un intervallo di variazione della x abbastanza grande, abbiano valori molto prossimi a quelli dati dalla (9), come si vede del resto dal diagramma stesso.

Ci gioveremo in seguito di quest'altra proprietà della funzione y : anche astrazion fatta dalla sua approssimata linearità, nel qual caso la cosa riesce evidente, la y in un intorno abbastanza ampio dell'origine 0 soddisfa alla condizione :

$$(12) \quad y(x) + y(-x) = 2 y(0).$$

In fatto per la (9) si ha :

$$\begin{aligned} y(x) + y(-x) &= -2(M^2 - m^2) \left\{ \frac{1}{(\delta - x)^5} + \frac{1}{(\delta + x)^5} \right\} \\ &= -2 \frac{M^2 - m^2}{\delta^5} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^{-5} + \left(1 + \frac{x}{\delta} \right)^{-5} \right\}; \end{aligned}$$

se osserviamo che $\left| \frac{x}{\delta} \right| < 1$ e sviluppiamo in serie trascurando i termini contenenti le quarte potenze di $\frac{x}{\delta}$ e quelle di maggior grado, si ha :

$$(12') \quad y(x) + y(-x) = -4 \frac{M^2 - m^2}{\delta^3} \left\{ 1 + 15 \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right\},$$

la quale somma differisce a meno di termini di secondo ordine da $2 y(0)$.

Per incidenza notiamo che per $m = M$ si ha che $a = 0$,

$$H_{\min} = H(0) = -\frac{2M}{\delta^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(x) + y(-x) = 0$$

per qualunque valore di x , e che in 0 la curva $y(x)$ ha un flesso.

Tenendo conto della (11) e della (4), risulta che la forza $F(x)$ esercita dal campo (A, M, A, m) sulla massa M di un corpo di coefficiente di magnetizzazione K (nell'aria), che occupa una posizione x nell'intervallo A, A , è approssimativamente:

$$(4') \quad F(x) = K M y(x) = -2 K M \frac{M^2 - m^2}{\delta^5} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

In particolare nel punto 0 abbiamo:

$$(4'') \quad F(0) = K M y(0) = -2 K M \frac{M^2 - m^2}{\delta^5}.$$

Scriveremo dunque:

$$(*) \quad F(x) = F(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Per quanto fu notato riguardo al segno della $y(x)$ nel centro del campo (A, M, A, m) , si deduce dalla (4) che: posto un corpo magnetico nell'intervallo A, A , a sinistra di R , (per $x < a$), la forza $F(x)$ a cui è sottoposta la massa azionata è positiva o negativa, (cioè ha segno uguale o contrario allo spostamento che tende a produrre) a seconda che il coefficiente K è negativo o positivo e ciò indipendentemente dai segni delle masse m ed M , purchè, ripetiamolo, sia $m < M$.

In realtà un corpo situato nella parte mediana del campo è respinto od attratto dalla massa M a seconda che esso è diamagnetico o paramagnetico.

Se è noto il valore della forza esercitata su un corpo omogeneo di massa M posto nel centro del campo, e si determinano sperimentalmente il valore $H(0)$ del campo nel punto di mezzo e la derivata $H'(0)$ in quello stesso punto, si ha la

misura assoluta del coefficiente di magnetizzazione del corpo nell'aria.

In fatto dalla (4), ricordando che $y = H H'$, si ha, per qualunque punto $x (\neq a)$:

$$K = \frac{F(x)}{M H H'};$$

in particolare per $x = 0$:

$$K = \frac{F(o)}{M H(o) H'(o)}.$$

Dimostriamo ancora che la conoscenza delle costanti a e δ e del valore assoluto della forza $F(o)$, che agisce nel centro del campo $(A, M, A_2 m)$ su un corpo di massa M , di noto coefficiente di magnetizzazione K , basterebbe per il calcolo dei valori del campo e della sua derivata in qualunque punto di A, A_2 .

Indicando con A il rapporto delle masse magnetiche m ed M , per la (7) si ha:

$$(13) \quad A = \frac{m}{M} = \left(\frac{\delta - a}{\delta + a} \right)^3;$$

d'altra parte per la (10), ponendovi, conforme alla (4),

$$y(o) = \frac{F(o)}{M K},$$

ed indicando con B il valore della differenza dei quadrati delle masse, si ha:

$$(14) \quad B = M^2 - m^2 = - \frac{\delta^5 F(o)}{2 K M}.$$

Da queste due si traggono le:

$$(15) \quad M = \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}},$$

$$m = A \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}}.$$

Sostituendo nelle (5), (7), (9) si hanno :

$$(16) \quad H = \left(\frac{1}{(\delta + x)^2} + \frac{A}{(\delta - x)^2} \right) \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}},$$

$$(17) \quad H' = 2 \left\{ \frac{1}{(\delta + x)^3} - \frac{A}{(\delta - x)^3} \right\} \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}},$$

$$(18) \quad y = H H' = 2 \left\{ \frac{1}{(\delta + x)^5} + 2 \frac{A}{(\delta - x)^3 (\delta + x)^3} x - \frac{A^2}{(\delta - x)^5} \right\} \frac{B}{1 - A^2}.$$

Notiamo infine che basterebbe la conoscenza dei tre valori di A , $H(o)$, $H'(o)$, per avere il valore di y per qualunque punto del campo.

Le (16) e (17) per $x = o$ diventano :

$$(16') \quad H(o) = \frac{1}{\delta^2} (1 + A) \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}}.$$

$$(17') \quad H'(o) = \frac{2}{\delta^3} (1 - A) \sqrt{\frac{B}{1 - A^2}};$$

risolvendo queste rispetto a δ e B , si ha :

$$\delta = 2 \frac{H(o)}{H'(o)} \frac{1 - A}{1 + A}$$

$$B = \frac{16 H(o)^6}{H'(o)^4} \left(\frac{1 - A}{1 + A} \right)^4.$$

Sostituendo questi due valori nella (18) si ha la cercata espressione.

Per misure relative il metodo si presenta già a prima vista assai agevole, anche senza tener conto della linearità della forza nel centro del campo.

Basta anzitutto determinare per un corpo di confronto di massa M_1 e di noto coefficiente di magnetizzazione K (nell'aria) i valori delle forze F_1 su di esso esercitate in un intervallo sia pur limitato del campo, tracciando, se si vuole, la

linea rappresentativa della forza $F_1 = F_1(x)$ per quel corpo in quell'intervallo. Se si porta poi nel campo un altro corpo, di ignoto coefficiente di magnetizzazione e di volume uguale a quello del corpo di confronto e di nota massa M , e si determina il valore della forza $F(x_0)$ esercitata su esso in una posizione x_0 della porzione studiata del campo, indicando con $F_1(x_0)$ il valore, ottenibile per interpolazione dai dati precedenti, che corrisponde alla forza alla quale è soggetto il corpo di confronto in quello stesso punto x_0 , dalle (4) si ha che il rapporto r_1 dei coefficienti di magnetizzazione nell'aria è:

$$(19) \quad r_1 = \frac{M_1 F(x_0)}{M F_1(x_0)}.$$

Si comprende poi come lo studio preliminare della $F(x)$ per il corpo di confronto sarebbe superfluo, se si potessero dedurre sperimentalmente i valori di F ed F_1 sempre in uno speciale punto del campo, per esempio nel centro di esso.

Per quanto fu visto nelle pagine precedenti risulta che se più corpi debolmente magnetici, di piccole dimensioni e di egual volume e forma, vengono portati successivamente nella parte mediana del campo (A, M, A, m) essi sono sollecitati da forze (pag. 393) che sono funzioni lineari della x e che si annullano tutte per $x = a$.

Basta determinare dunque le costanti di direzione delle rette, passanti tutte per R_1 , che rappresentano le forze per i diversi corpi per ottenere i rapporti dei valori delle forze relative ad uno stesso punto x_0 del campo. Usando la (19) si possono avere allora i rapporti dei coefficienti di tutti i corpi rispetto ad uno scelto come corpo di confronto.

In particolare possiamo riferirci al centro del campo e scrivere:

$$(20) \quad r_1 = \frac{M_1 F(o)}{M F_1(o)}.$$

La misura della forza $F(o)$ nel centro del campo può ottenersi facilmente col seguente artificio:

Supponiamo di conoscere il valore della forza $F(x)$ che il campo $(A_1 M, A_2 m)$ esercita sulla massa in esame che occupa una certa posizione P. Modifichiamo il campo scambiando di posto le masse m ed M ; creiamo cioè il campo $(A_1 m, A_2 M)$. Disponendo di un comune elettromagnete di Faraday ad espansioni polari eguali, basta far percorrere alla solita corrente l'avvolgimento A_2 invece che l' A_1 .

Se vogliamo mantenere le convenzioni fatte in fine di pag. 388 riguardo al segno del campo bisogna cambiare sulla $A_1 A_2$ sistema di riferimento, lasciando ferma l'origine, ma assumendo come verso positivo quello che va da A_2 ad A_1 . Se ξ è la nuova coordinata del punto P, la forza in esso punto è $F(\xi)$.

Ma :

$$\xi = -x ,$$

quindi

$$(21) \quad F(\xi) = F(-x) .$$

Per le (4), (8), (12) possiamo scrivere :

$$(22) \quad F(x) + F(-x) = 2 F(o)$$

e per la (21) :

$$(22') \quad F(x) + F(\xi) = 2 F(o) .$$

Quest' ultima dice :

La somma delle intensità delle forze che esercitano i due campi $(A_1 M, A_2 m)$, $(A_1 m, A_2 M)$ su una massa situata in un punto qualunque della porzione centrale del campo ($|x| < a$), è uguale al doppio della forza esercitata nel centro del campo *).

*) La dimostrazione di questa proposizione è fatta dal Meslin ¹⁶⁾ nel presupposto della linearità della funzione y di pag. 390. Ma qui è data invece come conseguenza dell'espressione (12) di pag. 392 entro i limiti di validità di questa, che sono più ampi di quelli che si esigono per la linearità della y , come risulta confrontando l'ordine di grandezza dei termini trascurati negli sviluppi in serie che condussero alle (9') ed alle (12').

Naturalmente la linea che rappresenta la forza dovuta al secondo campo, passa per il punto R_2 simmetrico ad R_1 rispetto ad 0 (fig. 3).

Fig. 3.

Per ottenere il coefficiente di magnetizzazione a mezzo della (19), bisognerebbe dunque (22') misurare per ogni corpo le forze esercitate su esso dai due campi in un punto qualunque. Se il corpo è rigidamente collegato ad un sistema elastico, basterebbe, con uno dei soliti metodi di riduzione a zero, misurare successivamente gli sforzi necessari per mantenere inalterata la posizione del corpo sotto l'azione dei due campi.

Ma in questo caso possono bastare soltanto le misure degli spostamenti subiti dal sistema sotto le azioni dei due campi, per darci il valore $F(0)$ cercato.

Per dimostrare ciò osserviamo che se un corpo magnetico, rigidamente collegato ad un sistema elastico, si sposta dalla sua posizione d'equilibrio sotto l'azione di un campo magnetico, esso si muove deformando il sistema elastico, finchè raggiunge quella posizione nella quale si fanno equilibrio l'azione del campo (non uniforme) e la forza di reazione elastica provocata nel sistema per l'effettuatosi spostamento.

Se le deformazioni sono abbastanza piccole la deviazione che subisce il sistema è proporzionale alla forza che il campo esercita sul corpo nella nuova posizione d'equilibrio raggiunta (punto di arrivo). Ma la suscettività magnetica di un corpo diamagnetico e paramagnetico resta inalterata al mutare del

campo e quindi (4) per un dato corpo la deviazione α è ancora proporzionale al prodotto $H H^1$.

Siano ora α_1 ed α_2 le deviazioni subite dalla massa in esame a partire da una data posizione iniziale P_i .

Siano inoltre P_1, P_2 le sue posizioni di equilibrio assunte sotto l'azione dei due campi $(A, M, A, m), (A, m, A, M)$. Indicando rispettivamente con x_i e ξ_i , con x_1 e ξ_1 , con x_2 e ξ_2 le coordinate di P_i, P_1, P_2 rispetto ai due sistemi $0x, 0\xi$; ammessa la linearità della $F(x)$, si ha, (*) di pag. 393, indicando con γ un coefficiente di proporzionalità:

$$(\alpha) \quad \gamma \alpha_1 = \gamma (x_1 - x_i) = F(o) \left(1 - \frac{x_i}{a} \right); \text{ (campo } A, M, A, m),$$

$$\gamma \alpha_2 = \gamma (\xi_2 - \xi_i) = F(o) \left(1 - \frac{\xi_i}{a} \right), \text{ (campo } A, m, A, M).$$

Ma per ogni punto:

$$\xi = -x$$

e quindi, rispetto al primo sistema coordinato, la seconda equazione diventa:

$$(\beta) \quad \gamma \alpha_2 = \gamma (x_1 - x_2) = F(o) \left(1 + \frac{x_2}{a} \right), \text{ campo } (A, m, A, M).$$

Sommando la (α) con la (β) si ottiene:

$$\gamma (\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma (x_1 - x_2) = F(o) \left(2 - \frac{x_1 - x_2}{a} \right).$$

Evidentemente α_1 ed α_2 sono spostamenti di verso contrario, ma dell'istesso segno nei due sistemi coordinati.

Orbene, posto:

$$(23) \quad \alpha_1 + \alpha_2 = c,$$

si ha:

$$(24) \quad F(o) = \frac{\gamma c a}{2 a - c}.$$

Dalla (24) si vede che: 1) la somma $c = \alpha_1 + \alpha_2$ delle deviazioni ottenute eccitando i due campi $(A, M, A, m), (A, m, A, M)$ è indipendente dalla posizione iniziale; 2) la conoscenza di

essa somma e della costante a (semidistanza dei punti R_1, R_2), ci dà, a meno del coefficiente γ , il valore della forza $F(o)$ nel centro del campo.

Se con c_1 indichiamo la somma dei due spostamenti per un altro corpo di noto coefficiente di magnetizzazione K_1 e di massa M_1 , occupante lo stesso volume dell'altro, per la (24) e la (19) si ha che il rapporto dei due coefficienti di magnetizzazione nell'aria è dato dalla

$$(25) \quad r_1 = \frac{K}{K_1} = \frac{M_1 c (2a - c_1)}{M c_1 (2a - c)}.$$

A queste conclusioni giunge il Meslin ¹¹⁾ partendo dal fatto sperimentale, da lui verificato, dalla costanza della somma $\alpha_1 + \alpha_2$ degli spostamenti ottenuti a partire da un qualunque punto della porzione centrale del campo *).

§ 3. — Descrizione dell'apparecchio di misura.

Noi abbiamo creduto di rendere ancora più pratico il metodo del Meslin, introducendo qualche modificazione nell'apparecchio e cambiando metodo di lettura.

*) Egli da questo presupposto deduce che la deviazione a partire da una posizione generica x è data da :

$$z = \frac{c}{2} + \chi(x),$$

dove $\chi(x)$ è una funzione impari, che diventa nulla per $x = 0$ e che assume il valore $-\frac{c}{2}$ tanto per $x = a$, per il primo campo, quanto per $x = -a$, quando si inverte il campo.

E poichè inoltre la $\chi(x)$ è lineare in tutto l'intervallo $(-a, +a)$ ne segue che le equazioni delle rette, le cui ordinate sono le deviazioni a partire da un punto x , sono date da :

$$z = \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2a} x,$$

dove va preso il segno $+$ o $-$ rispettivamente per il primo e per il secondo campo.

Queste equazioni però non danno la z proporzionale alla forza nei punti di arrivo di ascissa $X = x + z$; da ciò, secondo il Meslin, la necessità di considerare le equazioni delle trasformate:

$$Z = \frac{c}{2a - c} (a \pm X),$$

una delle quali, quella che si ha prendendo il segno $-$, corrisponde, tenuto conto della (24), alla nostra (*) pag. 393.

Il Meslin, come il Curie, collega la massa da sperimentare, che sta fra i poli di un elettromagnete di Faraday, ad una bilancia di torsione unifilare, le cui deviazioni egli osserva col microscopio. Null'altro egli dice a tale proposito nella sua concisa relazione.

Per ottenere il valore della somma c , il Meslin deve attendere che il sistema si arresti nelle posizioni finali di riposo sotto l'azione successiva dei due campi magnetici eccitati. Ma nel caso che il momento d'inerzia del sistema mobile sia non molto piccolo, queste posizioni di riposo vengono raggiunte in un tempo tutt'altro che breve. Nel nostro caso, date le piccolissime forze che si misurano, specie quando si operi su sostanze di piccolissime suscettività, è necessario, oltre che difendere l'apparato mobile dalle azioni perturbatrici, di esser garantiti nel miglior modo della stabilità del suo punto di riposo.

Perciò noi abbiamo preferito di adottare, come diremo descrivendo l'apparecchio, la sospensione bifilare, come quella che permette una maggiore stabilità della posizione d'equilibrio, e di dedurre la forza agente nel centro nel campo dalla somma delle massime deviazioni subite dal sistema sotto l'azione dei due campi. La rapidità con cui otteniamo le misure e soprattutto l'accordo dei nostri risultati, che rivelano (pagg. 410-411) nelle nostre misure una maggiore costanza, rispetto a quella ottenuta dal Meslin, della somma delle deviazioni massime al variare della posizione iniziale valgono a provare la maggior convenienza del nostro modo di sperimentare.

Il nostro apparecchio consta di un elettromagnete ad asse orizzontale che permette di creare un campo magnetico non uniforme e di una sospensione bifilare, che sostiene la massa di noto peso, di forma e di volume costante, della quale si deve determinare la suscettività e che si trova nel campo dell'elettromagnete.

Nelle figure 4^a e 5^a riproduciamo in scala circa del 1:10 l'intero apparecchio visto di fronte ed in pianta.

A_1 e A_2 sono i due rocchetti, che avvolgono i nuclei di una comune elettrocalamita di Faraday. Le estremità polari

prospicienti sono di forma rotonda un po' appuntita. Un'ampia custodia a vetri apribile da tre lati protegge l'apparecchio dai movimenti d'aria.

Il coperchio della custodia è in parte costituito da una grossa lastra di vetro, disposta orizzontalmente. Attorno ad un foro praticato nella lastra stessa si erge, fissato ad apposita ghiera d'ottone, un tubo di vetro alla cui estremità trovasi uno dei soliti dispositivi per l'attacco di una sospensione bifilare, munito di testa di torsione t . I due fili, che erano di alluminio e del diametro di circa mm. 0,1, nelle nostre misurazioni furono mantenuti distanti circa cm. 0,6.

Fig. 4.

Fig. 5.

La sospensione riesce lunga circa cm. 36. Essa sostiene un giogo di leggera canna di ottone a braccia disuguali; all'estremità del braccio più lungo b è ben fissata, con opportuno dispositivo, una provetta p di vetro sottile, che si protende verticalmente in basso per circa cm. 23 e che di volta in volta per sperimentare si introduce attraverso ad un altro foro praticato sulla lastra superiore della custodia. L'altro braccio porta dei contrappesi π , destinati a mantenere orizzontale il giogo.

Al disotto del punto di sospensione il giogo porta un'asta verticale, pure di canna d'ottone, che termina in basso con un disco orizzontale D di rame, del diametro di circa cm. 9, che pesca in una bacinella contenente benzina; si abbassa così il baricentro, e si regolarizza il tenue smorzamento.

Sull'asta verticale è fissato uno specchietto S , che serve alla misurazione degli spostamenti angolari del sistema.

Più in basso è fissato all'asta stessa un sottile filo di ottone f , che si protende orizzontalmente d'ambo i lati per parecchi centimetri ed è poi piegato ad angolo retto in giù ad una estremità, la quale termina in una punta sottile di

platino. Questa può pescare o no, a volontà dello sperimentatore, entro un liquido contenuto in un recipiente V, poichè, con apposito dispositivo, senza bisogno di aprire la custodia, l'osservatore può abbassare od innalzare il livello. Trovammo preferibile adoperare anche qui benzina come liquido smorzatore.

L'estremità inferiore della provetta p trovasi fra le espansioni polari dell'elettromagnete; è appunto in fondo a questa provetta che deve mettersi la sostanza da sperimentare, sia solida che liquida.

Alla distanza di cm. 150 circa dallo specchietto S, il cui piano è pressochè normale all'asse dell'elettrocalamita, sta un cannocchiale con scala divisa per le letture a riflessione.

In direzione pressochè normale sta un secondo cannocchiale, col quale si può osservare la posizione approssimata dell'estremo inferiore della provetta rispetto ad un reticolato di carta millimetrata r che è posto verticalmente vicino a quella tra i poli dell'elettrocalamita e che nelle figure è indicato con un semplice tratteggio.

Quando si cambia il corpo nella provetta, e di necessità si muove il contrappeso per render orizzontale il giogo, le osservazioni al secondo cannocchiale ci rendono edotti del fatto che l'estremo della provetta riesce alla stessa altezza di prima. Allo stesso scopo esso serve pure quando talora, pel rompersi accidentale dei fili, si è costretti di rinnovare la sospensione. Del resto nelle nostre misurazioni per differenze d'altezza del fondo della provetta da 1 a 2 mm. non si avvertiva variazione alcuna nell'azione del campo.

Un apposito dispositivo permette, come diremo, di magnetizzare l'uno o l'altro dei nuclei dell'elettromagnete o di smagnetizzarli entrambi.

L'elettromagnete e la custodia che lo ricopre appoggiano sul pilastro sismico nell'Istituto di Fisica, che ha la sezione di 1 m² e si erge, alto 4 metri, da un blocco di bettonata di circa 18 m³, la cui faccia inferiore è a metri 6 sotto il piano stradale, circostanza questa alla quale dobbiamo la stabilità delle posizioni di riposo del nostro apparato di sospensione.

§ 4. — Uso dell'apparecchio.

L'apparecchio può servire a misurare le suscettività dei corpi diamagnetici o paramagnetici, allo stato liquido o allo stato solido. Esso si presta per misure di suscettività tanto estremamente deboli, quanto relativamente considerevoli, come ad esempio quella del bismuto.

Basta, a tale scopo, regolare la distanza fra le espansioni polari e l'intensità della corrente che percorre l'elettromagnete. Benchè non sia possibile determinare direttamente la distanza 2δ fra i due punti nei quali si possono immaginare concentrate le masse magnetiche, si può a priori calcolare in via approssimata quanto debbano essere fra loro distanti le estremità dei due nuclei dell'elettromagnete per ottenere le condizioni volute, cioè la linearità della y e quella sensibilità che si desidera.

Diciamo ora come si proceda alla determinazione della costante α , che figura nelle nostre formole, e come si usa l'apparecchio, senza accennare, per ora, alle cure che conviene avere nella preparazione della massa solida o liquida che viene sottoposta alla misurazione.

Il corpo, della voluta forma e volume, viene posto al fondo della provetta che fa parte del sistema mobile e si trova così fra le espansioni polari dell'elettromagnete.

Supponiamo che dapprincipio il campo magnetico sia nullo.

Si lascia il corpo da sperimentare alcun tempo tranquillo, in modo da esser sicuri della sua posizione di riposo, e si nota la divisione n della scala riflessa dallo specchietto nel cannocchiale corrispondente a questa posizione. Si lancia poi in uno dei due rocchetti, per es. in A_1 , una corrente che deve avere costante intensità in tutto il corso delle misurazioni. Noi usammo di una corrente di 7,5 ampères fornita da una batteria di 10 accumulatori; apposito amperometro, diviso in mezzi ampères, ed un reostato erano inseriti nel circuito. Era bene apprezzabile il decimo di ampère.

Al crearsi del campo magnetico il sistema mobile si sposta; si nota la divisione n_1 corrispondente alla massima deviazione subita dal sistema.

Tolto il campo non si ha un assoluto ritorno al punto di partenza causa il magnetismo residuo dei nuclei. Al massimo il punto di riposo è spostato di 1 decimo di divisione di scala; date le condizioni del nostro sistema di lettura a riflessione ciò significa che il sistema ruotante è spostato di un angolo di circa $14''$ rispetto alla sua posizione iniziale ed il corpo quindi si trova spostato di mm 0,015 lungo l'asse $A_1 A_2$. Comunque noi smagnetizziamo i nuclei dopo ogni lettura col metodo di Auerbach.

In quest'operazione i due avvolgimenti sono in serie e percorsi dalla corrente alternata stradale opportunamente resa decrescente con apposito reostato a liquido.

Questo è costituito semplicemente così: Un vaso di vetro che dall'alto al basso va restringendosi, termina in uno stretto cannello verticale; a questo è legato un tubo di gomma a grosse pareti che fa capo al fondo di una bottiglia, la quale può essere posta su due sostegni a livello differente. Il vaso di vetro contiene una soluzione di solfato di rame e del mercurio, il quale riempie il tubo di gomma e parte della bottiglia.

Quando la bottiglia è sul sostegno a livello più alto il mercurio nel vaso di vetro è distante circa un centimetro da una lamina di rame immersa nella soluzione salina. Alla lamina fa capo uno dei reofori della corrente, mentre il mercurio funge da secondo elettrodo.

Se la bottiglia è sul sostegno più basso, il livello del mercurio nel cannello verticale si trova a circa 60 cm. dall'elettrodo di rame.

Portando la bottiglia dal livello superiore all'inferiore, la nostra corrente smagnetizzante variava gradualmente da 4 ampères a zero in 12 secondi circa.

L'efficacia dell'azione smagnetizzante è provata dal perfetto ritorno a zero del sistema, anche quando al fondo della provetta si trovi una massa di circa 10 gr. di bismuto.

Quando si è sicuri che il sistema è ritornato alla primitiva posizione di riposo si manda la corrente continua di 7,5 ampères nell'altro rocchetto A_2 , si crea cioè il campo ($A_1 m$, $A_2 M$),

e si nota la divisione n_2 di scala, che corrisponde alla massima deviazione subita dal sistema, divisione che naturalmente si trova dalla banda opposta di n_1 rispetto alla posizione iniziale n . Tolto il campo, si procede alla smagnetizzazione dei due nuclei e si verifica nuovamente il perfetto ritorno a zero del sistema.

La differenza $n_1 - n_2$ misura la somma delle due deviazioni subite dal sistema sotto l'azione dei due campi.

In seguito indicheremo con w la somma delle due deviazioni impulsive; scriveremo cioè:

$$w = n_1 - n_2.$$

Ebbene: se si gira la testa di torsione di un angolo abbastanza piccolo e se si indica con n' la divisione corrispondente alla nuova posizione di riposo e con n'_1 ed n'_2 le nuove letture corrispondenti ad n_1 ed n_2 , si ha:

$$n'_1 - n'_2 = n_1 - n_2,$$

o, in altri termini: la somma w delle due deviazioni impulsive è indipendente dalla posizione iniziale del sistema.

Diamo un esempio tolto dal nostro giornale d'esperienza.

Intensità della corrente: ampères 7,5. Nella provetta ci sono gr. 9,823 di bismuto ($t = 15^\circ$ circa).

n	n_1	n_2	$n_1 - n_2$
+ 45,4 *)	+ 57,7	+ 19,0	38,7
45,4	57,6	19,0	38,6
45,4	57,7	19,1	38,6
45,4	57,6	19,1	38,5
45,4	57,6	19,0	38,6
45,4	57,6	19,0	38,6

per $n = + 45,4$: media $w_m = 38,6$.

*) Per la più facile intelligenza delle tabelle avvertiamo che il centro del campo corrisponde alla divisione + 32,8 della nostra scala.

Si gira la testa di torsione ($t = 15^\circ$).

n	n_1	n_2	$n_1 - n_2$
- 0,9	+ 37,1	- 1,4	38,5
0,9	37,3	1,3	38,6
0,9	37,3	1,3	38,6
0,9	37,3	1,3	38,6
0,9	37,4	1,2	38,6
0,9	37,4	1,3	38,7

per $n = - 0,9$: media $w_m = 38,6$.

Si gira nuovamente la testa di torsione ($t = 15^\circ$).

n	n_1	n_2	$n_1 - n_2$
+ 24,4	+ 47,7	+ 9,2	38,5
24,4	47,9	9,3	38,6
24,4	47,9	9,3	38,6
24,4	48,0	9,3	38,7
24,4	47,9	9,4	38,5
24,4	47,9	9,4	38,5

per $n = + 24,4$: media $w_m = 38,57$

Riassumendo i precedenti dati e riportando i risultati di analoghe tabelle per altri valori di n , sempre per il bismuto (a temperatura di 15° circa), si ebbe :

per $n = + 45,5$	$w_m = 38,6$
$n = - 0,9$	$w_m = 38,6$
$n = + 24,4$	$w_m = 38,57$
$n = + 42,0$	$w_m = 38,56$
$n = + 15,0$	$w_m = 38,5$
$n = + 52,5$	$w_m = 38,6$
$n = + 36,5$	$w_m = 38,65$
$n = + 26,9$	$w_m = 38,6$

Riportiamo i dati di analoghe misure ottenute avendo posto nella provetta una massa di mercurio di volume uguale a quello del bismuto :

n	n_1	n_2	$n_1 - n_2$
+ 34,4	+ 40,7	+ 27,7	13,0
34,4	40,5	27,6	12,9
34,4	40,4	27,6	12,8
34,4	40,4	27,6	12,8
34,4	40,5	27,6	12,9
34,4	40,4	27,6	12,8
34,3	40,5	27,6	12,9
34,4	40,6	27,7	12,9

per $n = + 34,4$: media $w_m = 12,88$

ed analogamente :

per $n = + 27,0$ $w_m = 12,82$
 $n = + 65,0$ $w_m = 12,85$
 $n = + 50,0$ $w_m = 12,85$.

Del pari, impiegando una massa d' acqua :

n	n_1	n_2	$n_1 - n_2$
+ 20,1	+ 23,5	+ 18,1	5,4
20,1	23,4	18,0	5,4
20,1	23,5	18,0	5,5
20,1	23,4	17,9	5,5
20,1	23,4	18,0	5,4
20,1	23,3	17,9	5,4
20,1	23,4	18,0	5,4
20,1	23,4	18,0	5,4

per $n = + 20,1$: media $w_m = 5,43$

ed analogamente :

per $n = + 3,2$	$w_m = 5,45$
$n = + 29,0$	$w_m = 5,45$
$n = + 47,5$	$w_m = 5,45$
$n = + 6,5$	$w_m = 5,45$
$n = + 56,0$	$w_m = 5,45$

Riportiamo a titolo di confronto la tabella, che a mo' di esempio espone il Meslin ⁽⁹⁾ per provare la costanza delle somme c , trovate da lui col suo metodo di lettura.

n	α_1	α_2	$\alpha_1 - \alpha_2 = c$
47,50	32,75	34,50	67,25
52,50	34,25	34,00	68,25
56,00	35,00	33,50	68,50
61,50	37,00	31,50	68,50
68,00	37,50	30,50	68,00
79,00	40,50	28,00	68,50
92,50	43,00	25,00	68,00
110,75	49,25	21,00	70,25
124,50	52,00	18,00	70,00
150,50	58,50	12,00	70,50
167,00	62,00	8,25	70,25

La media calcolata c_m è 68,91.

Come vedesi l'accordo degli 11 valori di c ottenuti dal Meslin non raggiunge quello da noi ottenuto nella somma delle deviazioni massime, ciò in grazia, forse, alla più opportuna distanza delle nostre masse polari, alla intensità del campo magnetico ed inoltre alla diversità dei metodi di sospensione, di lettura, di smorzamento. Se calcoliamo, per esempio l'error mediano relativo dai dati del Meslin si trova $\frac{14}{1000}$, mentre nel nostro caso, per il bismuto si ha un error

mediano relativo di circa $\frac{1}{1000}$ e per il mercurio e l'acqua esso è compreso fra $\frac{1}{10000}$ e $\frac{5}{10000}$.

A questo punto riportiamo il diagramma cartesiano ortogonale (Tav. I) da noi ottenuto coi dati sopra esposti, quando cioè nella provetta si trovano bismuto, mercurio od acqua. Le ordinate rappresentano le deviazioni in divisioni di scala corrispondenti alle posizioni iniziali (ascisse).

Le coppie di linee L_1 , L_2 sono relative ai corpi suindicati, quelle L_1 , che passano per R_1 , sono relative al campo ($A_1 M$, $A_2 m$), le altre, che passano per R_2 , al campo ($A_1 m$, $A_2 M$).

Il loro andamento rettilineo è manifesto.

Le ordinate di queste rette sono positive nella parte centrale del campo, conforme alle convenzioni fatte nel § 2, e ciò perchè tutti e tre i corpi sono diamagnetici.

Evidentemente la misura del segmento $R_1 R_2$ dà il doppio della costante α introdotta a pag. 389.

Abbiamo determinata analiticamente la costante α , per estrapolazione lineare dai nostri dati. Ottenemmo i seguenti risultati espressi in parti di scala:

Ponendo bismuto nella provetta con 4 coppie di dati risultarono per α i valori seguenti:

$$\alpha = 34,42 ; 34,42 ; 34,46 ; 34,42 ;$$

ponendo nella provetta il mercurio ottenemmo:

$$\alpha = 34,44 ; 34,43 ;$$

con l'acqua:

$$\alpha = 34,09 ; 34,09 ; 34,85 ; 34,85 .$$

È naturale che questi dati ottenuti con l'acqua siano meno precisi dei precedenti e specie di quelli ottenuti col bismuto, tenuto conto (Tav. I) del minor angolo che fanno con l'asse x le rette L_1 , L_2 relative all'acqua in confronto di quelle relative al mercurio e specialmente al bismuto.

Tavola I.

Noi assumeremo per valore di a in divisioni di scala 34,43 e scriveremo: $a = 34,43$ (div. scala).

Tenuto conto della distanza dello specchio dalla scala e della lunghezza del braccio b (cm. 22,2) risulta: $a = 0,515$ centimetri.

Le nostre misure si ottennero sempre nell'intervallo R_1, R_2 ; gli spostamenti della massa posta a cm. 22,2 dall'asse di rotazione non superano mai i cm. 0,58; la massima deviazione angolare non superò un grado e mezzo; si può quindi assumere direttamente il valore di $\text{tang. } 2\alpha$ a misura dell'angolo 2α . Inoltre le forze corrispondenti alle torsioni del sistema ruotante si possono considerare proporzionali all'angolo e non al seno dell'angolo e quindi ai valori di $\text{tang. } 2\alpha$, che ci sono dati direttamente dalla lettura a riflessione a meno di un coefficiente di proporzionalità. Infine, data la lunghezza del braccio b , possiamo considerare che il centro della massa si muova sensibilmente nell'asse del campo anche per i massimi spostamenti da noi ottenuti.

§ 5. — Formule per i calcoli numerici delle costanti magnetiche.

Diciamo ora come si proceda nei calcoli numerici una volta ottenuti i dati sperimentali diretti.

Le considerazioni precedenti furono fatte partendo dal presupposto semplicista, che le forze si esercitassero su masse omogenee. Ma le nostre masse sono contenute in un sottile recipiente di vetro che subisce una debole azione della quale occorre tener conto. Nella realtà dunque siamo di fronte ad una massa debolmente magnetica, omogenea o no, la quale si muove lungo una retta in un campo magnetico, che esercita sulla massa una forza ponderomotrice funzione lineare della coordinata che individua la posizione della massa lungo quella retta. La massa stessa fa parte di un sistema elastico il quale, come dicemmo (pag. 399), date le piccole deviazioni, è lecito supporre reagisca con forze proporzionali agli spostamenti, entrando in gioco, come vedremo più tardi, piccoli attriti proporzionali alle velocità.

Prescindiamo per ora dall'azione degli attriti e dimostriamo che nel nostro caso la forza $f(o)$, esercitata su una massa qualunque nel punto 0, è data dalla:

$$(28) \quad f(o) = \frac{a \gamma w}{4a - w},$$

dove w è, come fu detto, la somma delle deviazioni massime ottenute a partire da una qualunque posizione iniziale x_i e γ una grandezza positiva che, come vedremo, dipende dalle dimensioni e dal peso del sistema.

In fatto supponiamo dapprima di eccitare il campo ($A_1 M, A_2 m$). In ogni posizione x durante il moto la massa attratta, distante b dall'asse di rotazione, è sotto l'azione di due forze conservative, quella attiva:

$$f(x) = f(o) \left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

e quella di reazione $-\gamma(x - x_i)$, dove γ è la forza che applicata al centro della massa in esame produce sul sistema mobile una torsione che corrisponde allo spostamento unitario lungo 0 x .

Se I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione, la equazione delle forze vive si può scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{I}{b^2} x'^2 = \int_{x_i}^x \left[f(o) \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \gamma(x - x_i) \right] dx,$$

ed indicando con x_i l'ascissa del punto P_i corrispondente alla massima deviazione, e notando che $x' = 0$ ai limiti d'integrazione, si ha, integrando fra x_i ed x_i :

$$(x) \quad f(o) \left(1 - \frac{x_i - x_i}{2a}\right) - \gamma \frac{x_i - x_i}{2} = 0.$$

Eccitiamo ora il campo ($A_1 m, A_2 M$). Chiamiamo con ξ_i e ξ_s le ascisse rispetto al nuovo asse coordinato della posizione iniziale P_i e di quella del punto P_s , in cui alla fine della se-

mioscillazione la massa s'arresta; si avrà ancora l'integrale primo:

$$f(o) \left\{ 1 - \frac{\xi_2 - \xi_i}{2a} \right\} - \gamma \frac{\xi_2 - \xi_i}{2} = 0.$$

Se in questa equazione ci riferiamo di nuovo al vecchio sistema, bisogna che poniamo $\xi_2 = -x_2$ ed $\xi_i = -x_i$. Si ha quindi:

$$(\beta) \quad f(o) \left\{ 1 - \frac{x_i - x_2}{2a} \right\} - \gamma \frac{x_i - x_2}{2} = 0.$$

Sommando la (α) e la (β) si ha:

$$f(o) \left\{ 2 - \frac{x_i - x_2}{2a} \right\} - \gamma \frac{x_i - x_2}{2} = 0$$

ed osservando che $x_i - x_2 = w$ (pag. 407), somma delle due deviazioni impulsive, si ha la (28).

Se si tien conto dell'attrito, la (28) può essere modificata così:

$$(29) \quad f(o) = \frac{a \gamma w}{(4 - \lambda) a - w},$$

dove λ si ottiene, come diremo, misurando le ampiezze delle prime oscillazioni. Ciò viene dimostrato nella nota *) in appendice.

Nel nostro apparecchio il coefficiente di smorzamento è abbastanza piccolo; le sue variazioni dall'uno all'altro caso sono trascurabili. La provetta ed il suo sostegno si muovono in seno all'aria ed il disco inferiore pesca nella benzina, la presenza della quale regolarizza lo smorzamento pur mantenendolo lieve, data la densità di essa ed il suo coefficiente di attrito interno. In fatto il coefficiente di smorzamento delle oscillazioni di un disco circolare girevole intorno al suo asse e che si muove in seno ad un liquido è, come sappiamo, direttamente proporzionale alla radice quadrata del prodotto

della densità e della viscosità del liquido, prodotto che per la benzina è considerevolmente minore di quello della maggior parte dei liquidi. Abbiamo studiato il nostro sistema oscillante, determinando le durate d'oscillazione, le ampiezze e le velocità angolari in diverse condizioni variando cioè il momento d'inerzia, le forze agenti e lo smorzamento. La durata d'oscillazione, che quando c'è il campo è di circa 23^s, varia pochissimo dall'uno all'altro caso e quando si tolga la benzina, il che prova come nei diversi casi vari di poco il rapporto fra i momenti d'inerzia del sistema e le coppie direttrici e come inoltre sia piccolo l'attrito prodotto dalla benzina.

L'isocronismo per varie ampiezze è ottimo; siamo dunque di fronte ad attriti proporzionali alle velocità. Notiamo ancora che quando si parte dalla quiete (cioè quando il liquido smorzatore, il sistema oscillante e l'aria sono perfettamente tranquilli), le prime oscillazioni, ottenute in seguito ad un impulso, si succedono regolarmente in progressione geometrica, ma che, dopo questo primo periodo regolare, il movimento si effettua con una certa irregolarità. Questa irregolarità, escluse altre cause, come ad es., movimenti dei robustissimi supporti, va attribuita in gran parte alle lievissime correnti d'aria prodotte dal moto per quanto lento del sistema (specie nello spazio rinserrato fra le estremità polari, nel quale si muove la provetta) ed a quelle, dapprincipio irregolari, che produce nella benzina il disco oscillandovi.

Perciò, per correggere le ampiezze della prima deviazione, bisogna tener conto soltanto del valore dello smorzamento nelle prime di esse.

Abbiamo tracciate coll'aiuto di un cronografo le curve di oscillazione del nostro sistema e calcolato il valore di λ che poco si scosta dal decremento logaritmico delle oscillazioni, (pag. 439); esso risultò in media di circa 0,025. E qui, dal punto di vista pratico, dobbiamo far notare che il valore di λ può determinarsi in via affatto approssimata ed una volta per sempre; poichè anche ammesso che si misuri λ così grossolanamente da commettere un error relativo dell'ordine di grandezza di un decimo, l'error relativo limite nella misura

di $f(o)$ non ammonta che a $\frac{1}{1200}$ circa *), errore questo minore assai di altri inevitabili.

Per calcolare dalla (29) in unità assolute [C. G. S.] la forza $f(o)$ ci occorre la conoscenza di γ nelle stesse unità di misura.

Esprimendo in quel sistema le grandezze: l, h, b, g , che sono rispettivamente la lunghezza della sospensione bifilare, la semidistanza dei fili, la distanza della massa attratta dall'asse di rotazione e l'accelerazione della gravità, la massa P dell'apparecchio mobile, compresa la provetta vuota, e quella p del corpo in essa contenuto, si ha:

$$\gamma = \frac{(P + p) h^2}{l b^2} g,$$

la quale ci dà in unità assolute la forza di reazione, che applicata alla distanza b dall'asse di rotazione fa equilibrio alla forza agente capace di spostare di 1 cm. la massa lungo la linea dei poli.

Sostituendo nella (29) e ponendo:

$$\eta = \frac{h^2 a}{l b^2} g$$

(a espresso in cm.) si ha:

$$(30) \quad f(o) = (P + p) \eta \frac{w}{(4 - \lambda) a - w},$$

la quale ci dà in dine il valore cercato. Va da sé che in pratica, noto il numero λ ed il valore in unità assolute di η basta esprimere w ed a nella stessa unità di misura, del resto qualunque e quindi, ad esempio, in parti di scala.

Abbiamo calcolato approssimativamente il valore di $f(o)$ per i tre corpi studiati, per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle forze da noi misurate.

*) Risulta in fatto: $\frac{d f(o)}{f(o)} = \frac{a \lambda}{(4 - \lambda) a - w} \frac{d \lambda}{\lambda}$ e trascurando λ rispetto a 4 e posto, nella peggiore ipotesi, $w = a$ si ha: $\frac{d f(o)}{f(o)} = \frac{\lambda}{3} \frac{d \lambda}{\lambda}$. Ora λ è 0,025 e quindi, anche ammesso $\frac{d \lambda}{\lambda} = \frac{1}{10}$, si ha: $\frac{d f(o)}{f(o)} = \frac{1}{1200}$.

La forza esercitata quando nella provetta c'è 1 cm³ di bismuto è di 0,1474 dine; quando c'è mercurio è di 0,0398 dine, quando c'è acqua è di 0,0140 dine.

Facciamo rilevare che, considerando come apprezzabile nelle nostre letture il decimo di divisione di scala (le divisioni della nostra scala sono di 2 mm. di ampiezza), la minima forza da noi misurabile è circa $\frac{1}{1000}$ di dine.

Ma la (30) ci dà la forza esercitata in 0 su una massa di sostanza magnetica di peso p contenuta nella provetta di vetro, la quale in parte almeno, per il lieve diamagnetismo del vetro, risente l'azione del campo magnetico. Indicheremo con $f_v(o)$ la forza su di essa esercitata e che è non sempre trascurabile rispetto ad $f(o)$.

Se vogliamo dunque la forza $F(o)$, che sollecita il corpo contenuto nella provetta, dobbiamo porre:

$$(31) \quad F(o) = f(o) - f_v(o).$$

Nella nostre misure sperimentando con la provetta vuota ($p = 0$) abbiamo trovato $f_v(o) =$ dine 0,0031, si ha quindi (30):

$$\begin{aligned} F_{H_2O}(o) &= \text{dine } 0,0109 \\ F_{Hg}(o) &= \gg 0,0367 \\ F_{Bi}(o) &= \gg 0,1443. \end{aligned}$$

Ottenuto così il valore di $F(o)$ per un corpo di noto coefficiente K di magnetizzazione nell'aria, essendo noto a , ed assunto per δ un valore approssimato, deducemmo i valori assoluti approssimati delle masse magnetiche M ed m , che possiamo supporre concentrati nei punti A_1, A_2 del nostro campo.

Per noi $a =$ cm. 0,515. Assumendo in cifra tonda:

$2\delta = \overline{A_1 A_2} =$ cm. 6, ed applicando la (13):

$$A = \frac{m}{M} = \left(\frac{\delta - a}{\delta + a} \right)^3,$$

ottenemmo per valore assoluto del rapporto delle masse: $A = \frac{1}{3}$ circa.

Assunti per coefficienti di magnetizzazione nell'aria i valori: $-0,82 \cdot 10^{-6}$ per l'acqua, $-1,05 \cdot 10^{-6}$ per il bismuto, $-0,194 \cdot 10^{-6}$ per il mercurio, applicando la (14):

$$B = M^2 - m^2 = -\frac{\delta^3 F(o)}{2 K M},$$

ottenemmo per il valor medio della differenza dei quadrati delle masse nei tre casi $137 \cdot 10^4$, con un errore relativo medio di circa $\frac{2}{100}$ *). Ricorrendo infine alle (15), ottenemmo per valori delle masse: $m = 135$ unità assolute, $M = 400$ circa.

Posti, in cifre tonde, $m = 100$, $M = 300$, $\delta = 3$, noi costruiamo per punti le curve di equazioni (5), (6), (9), che danno rispettivamente: il campo H , la derivata $\frac{dH}{dx}$ ed il prodotto $y = H \frac{dH}{dx}$ in funzione di x e che furono riprodotte a pagina 391.

Ci basti osservare che nell'intervallo $0 R_1$ la differenza fra le ordinate di due punti della curva $y(x)$ e della retta $P_0 R_1$ corrispondenti alla stessa x , ammonta in media a $\frac{7}{1000}$ della loro grandezza.

Ma qui di nuovo osserviamo che le considerazioni teoriche suesposte valgono per un corpo magnetico la cui massa supponemmo concentrata in un punto materiale.

Nelle condizioni pratiche invece, nelle quali la massa tratta occupa un volume di 1 cm^3 circa, il prodotto dei valori medi del campo e della sua derivata nello spazio occupato dal corpo, si presenta proprio come una funzione lineare della posizione del centro d'applicazione delle forze agenti sulla massa ed entro limiti più ampi di quelli da noi teoricamente dedotti, come si vede anche dalla tavola I.

*) Accordo soddisfacente, quando si consideri l'incertezza dei valori di K nelle più precise misure dei vari autori, la quale, nel caso particolare del bismuto, dipende assai dalla sua variabile purezza.

Quando si voglia determinare con misure relative il coefficiente di magnetizzazione di una sostanza, bisogna procedere nel seguente modo.

La (19) ci dà il rapporto del coefficiente di magnetizzazione del corpo studiato e di quello di confronto nell'aria come prodotto dal rapporto inverso delle masse e di quello diretto delle forze esercitate dal campo in un punto x_0 .

Essa vale in particolare per $x_0 = o$.

Usando la (31) e chiamando con $f_v(o)$, $f(o)$, $f_1(o)$ le forze in 0 quando la provetta è vuota, o contiene p grammi del corpo in esame, o contiene un peso p_1 del corpo di confronto occupante lo stesso volume, e sostituendo al rapporto delle masse quello dei pesi, il rapporto r_1 dei due coefficienti di magnetizzazione K e K_1 nell'aria è dato (19) da:

$$r_1 = \frac{K}{K_1} = \frac{p_1}{p} \frac{f(o) - f_v(o)}{f_1(o) - f_v(o)}.$$

Chiamando ora con w_v , w , w_1 , le somme delle deviazioni ottenute a partire da una qualunque posizione, quando rispettivamente la provetta è vuota, contiene il corpo in esame o contiene quello di riferimento, sostituendo nella formula testè scritta la espressione delle forze data dalla (30), semplificando e ponendo:

$$(32) \quad G = \frac{p_1}{(P + p_1) \frac{(4 - \lambda) a - w_v}{(4 - \lambda) a - w_1} w_1 - P w_v},$$

il quale valore è una costante per un dato corpo di confronto e per una determinata provetta, si ha:

$$(33) \quad r_1 = \frac{K}{K_1} = G \frac{1}{p} \left\{ (P + p) \frac{(4 - \lambda) a - w_v}{(4 - \lambda) a - w} w - P w_v \right\},$$

formola che ci dà il cercato rapporto r_1 in funzione del peso p della massa del corpo di ignoto coefficiente, contenuta in un volume dato e della somma w delle deviazioni subite dalla

provetta, a partire da una qualunque posizione iniziale per effetto dei due campi (A, M, A, m) , (A, m, A, M) .

In una serie di misure, qual'è quella da noi intrapresa, la costante G va calcolata una volta per sempre o di quando in quando per verifica.

Per la correzione relativa all'aria ricordiamo, che in seguito alle misure del Curie *) sul paramagnetismo dell'ossigeno si può assumere come suscettività magnetica di essa $+0,032.10^{-6}$.

Per avere adunque il coefficiente di magnetizzazione $\mathbf{K}$ nel vuoto di un determinato corpo di densità ρ , basterà aggiungere al suo coefficiente determinato nell'aria la quantità $\pm \frac{0,032.10^{-6}}{\rho}$, assumendo il segno $+$ od il segno $-$ a secondo che esso è paramagnetico o diamagnetico. Se K_1 è il coefficiente di magnetizzazione del corpo di confronto nell'aria:

$$\mathbf{K} = r_1 K_1 \pm \frac{0,032}{\rho} 10^{-6}.$$

Se il corpo di confronto è l'acqua, per la quale possiamo assumere, come il Meslin **), per coefficiente di magnetizzazione nell'aria $-0,821.10^{-6}$, il valore $\mathbf{K}$ del coefficiente di magnetizzazione nel vuoto del corpo studiato è:

$$(34) \quad \mathbf{K} = 10^{-6} \left\{ -0,821 r_1 + \frac{0,032}{\rho} \right\}.$$

La suscettività magnetica k , ricordiamolo, è il rapporto fra il momento magnetico dell'unità di volume del corpo magnetizzato nel vuoto (intensità di magnetizzazione) e l'intensità del campo magnetizzante.

Se vogliamo quindi ottenere dal coefficiente di magnetizzazione, che è quel rapporto riferito invece all'unità di massa, il valore della suscettività, basta moltiplicare il primo per la densità ρ della sostanza magnetica studiata. Si ha cioè:

$$k = \rho \mathbf{K}.$$

La (34), associata alle (32) e (33), ci servì al calcolo effettivo dei coefficienti di magnetizzazione nel vuoto dei corpi da noi studiati, avendo assunto l'acqua come corpo di confronto e per coefficiente di magnetizzazione di essa nel vuoto $-0,79 \cdot 10^{-6}$ e come suscettività dell'aria $+0,032 \cdot 10^{-6}$.

Applicando la (34) abbiamo ottenuto: per il bismuto (nel vuoto a 15°) $\mathbf{K}_{Bi} = (-1,046 \pm 0,006) \cdot 10^{-6}$, per il mercurio $\mathbf{K}_{Hg} = (-0,191 \pm 0,001) \cdot 10^{-6}$.

L'ordine di grandezza degli errori indicati ci risultò così calcolando il differenziale totale del rapporto r_1 dato dalla (33) rispetto alle grandezze dalle quali dipende; si trovò che l'errore relativo limite è $\left(\frac{d r_1}{r_1}\right)_m = 0,005$ tanto pel bismuto quanto per il mercurio. Per i corpi di piccola suscettività la precisione raggiunta è molto minore. Per lo stagno, ad esempio, l'errore ammonta al 5%, ciò in causa della piccola deviazione che gli corrisponde e dell'azione che in questo caso esercita l'incertezza nell'apprezzamento delle deviazioni corrispondenti al vetro che sono pur piccole. Ma non era il caso di aumentare ad esempio l'intensità della corrente oppure di avvicinare le masse polari, per avere maggiori le somme w perchè sarebbe risultato eccessiva la deviazione corrispondente al bismuto, mentre a noi premeva di mantenere inalterate le condizioni d'esperienza per tutta la serie di leghe da noi studiate, passando dal corpo più diamagnetico, il bismuto, allo stagno leggermente paramagnetico.

Raccogliamo nella tabella seguente i valori di $\mathbf{K} \cdot 10^6$ da noi riportati per il Bi ed il Hg e quelli che ottenemmo per lo Sn, per il Pb ed il Cd, usati nelle nostre ricerche, assieme a quelli ottenuti da altri sperimentatori, generalmente con misure assolute.

Valori di $\mathbf{K} \cdot 10^6$

		Meyer ¹³⁾	Meslin *) ¹²⁾	Curie ¹⁴⁾	Wills ¹⁵⁾	Lombardi ¹⁶⁾
Mercurio	—0,191	—0,151	—0,185	—	—	—
Bismuto	—1,046	—0,97	—1,39	—1,20	—1,26	—1,22
Cadmio	—0,137	—0,133	—	—	—	—
Piombo	—0,095	—0,12	—	—	—	—
Stagno	+0,022	+0,03	—	—	—	—

Il valore dato dal Curie per il Bi è la media di quelli ottenuti su 4 campioni di Bi del commercio, che gli diedero a 20° per $\mathbf{K} \cdot 10^6$ i seguenti valori:

$$-1,30, \quad -1,04, \quad -1,25, \quad -1,22.$$

Per il Bi elettrolitico egli però trovò —1,35.

Questi considerevoli divari fra i suoi dati fanno specialmente comprendere quanta azione abbiano le impurità dei corpi in queste delicate misure.

I valori che riporta il Meyer ¹³⁾ nella sua ricerca sulle proprietà magnetiche degli elementi, che può dirsi il primo studio sistematico sul magnetismo atomico, generalmente sono troppo bassi. Con uno dei metodi che gli servì a quelle determinazioni egli, assieme a G. Jäger ¹⁷⁾, trovò per l'acqua:

$$\mathbf{K} \cdot 10^6 = -0,69 \text{ circa,}$$

valore inferiore a quello dato dalla maggior parte degli sperimentatori.

Il fatto che il nostro dato per il Hg (—0,191) è superiore a quelli ottenuti dal Meslin e dal Meyer, mentre il valore relativo al Bi è compreso fra i valori da loro dati ci dà affidamento che le differenze non dipendano, per nostro conto, da

*) I valori dati da Meslin sono ottenuti con misure relative all'acqua.

errori sistematici. In ogni modo la divergenza dei valori per il Bi a noi interessa meno che ai precedenti sperimentatori, i quali si erano proposti di dare valori assoluti.

Scopo della nostra ricerca fu di studiare la variazione delle costanti magnetiche del Bi nelle sue leghe e studiammo il mercurio, per averlo, intanto, come termine di attendibilità dei valori stessi.

Del resto la incerta attendibilità dei valori assoluti delle piccole costanti magnetiche salta subito all'occhio qualora si esaminino una tabella qualunque ¹⁸⁾ di dati relativi a singoli corpi; per l'acqua in particolare è bene osservare anche la tabella data dallo Scarpa ¹⁹⁾, che riassume le ricerche fatte fino al 1905. I disaccordi che vi si incontrano dipendono, per le misure assolute, in gran parte dalla necessità di studi accurati, non scevri di incertezze, su campi magnetici non uniformi, talora complicati, e dal fatto che i dati finali sono desunti in funzione di molte grandezze misurabili direttamente talora con poca precisione. Basta osservare, per es., la complicazione dei dispositivi sperimentali resi necessari per l'applicazione dei metodi di Boltzmann ²⁰⁾. Il Curie ²¹⁾ dichiara che nelle sue misure assolute gli errori ammontano al 4 % ed in quelle relative il 2 %. Anche il metodo di Curie e Cheneveau ²²⁾, che il Bernini ²³⁾ adoperò con successo per misure relative su sostanze che hanno un coefficiente dieci volte maggiore di quello dello stagno, gli errori sono nei limiti di quelli da noi commessi per quel metallo.

§ 6. — Le nostre misure sulle leghe.

I metalli che adoperammo in queste ricerche ci furono forniti in bastoncini cilindrici dalla casa Suchardt di Goerlitz. Essi ci furono dichiarati chimicamente puri; e difatti su un solo bastoncino di bismuto si trovarono lievi tracce di ferro *).

Poichè, come dicemmo, bisogna operare su volumi uguali delle sostanze in esame, la preparazione delle masse, delle

*) L'analisi venne fatta dal sig. G. Dall'Acqua, dottore in Chimica, assistente nell'Istituto di Fisica.

quali determinammo le costanti magnetiche, fu condotta come segue:

I bastoncini dei metalli studiati venivano dapprima raschiati con un pezzo di vetro, in modo da togliere gli strati superficiali d'ossido. Si rompevano poi in piccoli pezzi, avendo cura di non metterli mai a contatto diretto di tenaglie e morse di ferro.

Il volume da noi scelto per la massa da sperimentare era di 1 cm³, perciò il peso in grammi del campioncino doveva essere uguale alla sua densità.

Nel caso di un metallo puro si pesava la quantità necessaria, asportando mediante raschiatura con vetro la parte eccedente e poi, per dare al campione sempre una stessa forma, il metallo così pesato, veniva posto in una provetta di vetro a pareti abbastanza spesse e di diametro interno di pochissimo inferiore a quello della provetta posta al magnetometro (mm. 8 circa). Si fondeva sotto paraffina; si lasciava poi raffreddare il tutto nella provetta stessa. Quando il campioncino metallico aveva assunto la temperatura ambiente veniva tolto da essa, lavato con benzina, e, ripulito, lo si introduceva nella provetta del magnetometro.

Nel preparare una lega la fusione veniva fatta invece due volte. Si fondevano dapprincipio nella provetta di fusione i due metalli nelle proporzioni in peso volute per ottenere una decina di grammi circa di lega, avendo cura di agitarli bene durante la solidificazione. Veniva poi con un vetro raschiata la parte eccedente, per ridurre il campioncino ad avere il peso voluto. Si fondeva poi di nuovo per dargli la solita forma.

Nel corso delle nostre misurazioni magnetiche ponemmo di tratto in tratto la provetta vuota al magnetometro, per avere così con maggior esattezza il dato di correzione relativo alla forza esercitata su di essa, poichè questo dato ha una considerevole influenza sui risultati delle misure fatte su corpi di piccola suscettività come sarebbero lo Sn, il Pb, il Cd etc.

La somma delle deviazioni w è, per ogni sostanza, la media di almeno 6 determinazioni. Dopo la lettura di ogni deviazione si verificava il perfetto ritorno a zero smagnetizzando dapprima come già dicemmo, i nuclei.

Piccole variazioni dei volumi dei campioncini posti nella provetta, non influiscono nelle misurazioni; è invece necessario conoscere con esattezza il peso del campioncino. Poichè una variazione Δp nel peso p , quantunque provochi una variazione di w nell'istesso senso, produce nel calcolo di r_1 un error relativo di poco inferiore a $\frac{\Delta p}{p}$. Nelle pesate è bene raggiungere una precisione di $\frac{1}{1000}$.

Nelle seguenti tabelle diamo i risultati da noi ottenuti per le serie di leghe da noi studiate:

I percentuali e le corrispondenti densità ρ delle nostre sostanze furono dedotte dalla nota memoria del Matthiessen ²⁴), eccetto il caso di 5 leghe di Cd — Bi delle quali determinammo la densità col metodo del picnometro. Esse sono quelle che nella tabella II portano un asterisco nella colonna della densità.

LEGHE CONTENENTI BISMUTO.

Stagno - Bismuto.

Tab. I.

Leg a	Percentuale di bismuto (in peso)	ρ Densità	K 10 ⁶ Coefficiente di magnetizza- zione	k 10 ⁶ Susceffività
Sn	0	7,294	+ 0,022	+ 0,16
—	1,64	7,310	+ 0,023	+ 0,17
—	5,00	7,397	+ 0,058	+ 0,43
Sn ₁₅ Bi	10,45	7,500	0,000	0,00
Sn ₈ Bi	36,87	8,096	— 0,149	— 1,21
Sn ₂ Bi	46,70	8,325	— 0,180	— 1,53
Sn Bi	63,66	8,759	— 0,252	— 2,20
Sn Bi ₄	87,51	9,427	— 0,303	— 2,85
Sn Bi ₈	93,34	9,609	— 0,410	— 3,94
Bi	100,00	9,823	— 1,046	— 10,28

Cadmio - Bismuto

Tab. II.

L e g a	Percentuale di bismuto (in peso)	ρ Densità	$K \cdot 10^6$ Coefficiente di magnetizzaz- zione	$k \cdot 10^6$ Suscettività
Cd	0	8,655	— 0,137	— 1,18
Cd ₉₀ Bi	5,82	8,712 *)	— 0,179	— 1,56
Cd ₈₀ Bi	11,01	8,764 *)	— 0,227	— 1,99
Cd ₇₀ Bi	18,82	8,855 *)	— 0,323	— 2,86
Cd ₆₀ Bi	23,62	8,909 *)	— 0,363	— 3,24
Cd ₅₀ Bi	31,68	8,955 *)	— 0,416	— 3,73
Cd ₄₀ Bi	38,21	9,078	— 0,448	— 4,07
Cd ₃₀ Bi	48,12	9,194	— 0,520	— 4,77
Cd Bi	64,97	9,388	— 0,605	— 5,68
Cd Bi ₂	78,77	9,554	— 0,761	— 7,27
Cd Bi ₃	88,12	9,670	— 0,891	— 8,64
Cd Bi ₄	93,69	9,737	— 0,992	— 9,66
Cd Bi ₁₂	95,70	9,767	— 1,016	— 9,92
Bi	100,00	9,823	— 1,046	— 10,28

Piombo - Bismuto

Tab. III.

L e g a	Percentuale di bismuto (in peso)	ρ Densità	$K \cdot 10^6$ Coefficiente di magnetizzaz- zione	$k \cdot 10^6$ Suscettività
Pb	0	11,376	— 0,095	— 1,08
Pb ₈₀ Bi ₂	40,18	11,065	— 0,178	— 1,97
Pb Bi	50,19	10,951	— 0,220	— 2,41
Bi	100,00	9,823	— 1,046	— 10,28

LEGHE NON CONTENENTI BISMUTO.

Cadmio - Piombo

Tab. IV.

Lega	Percentuale di piombo (in peso)	ρ Densità	$k \cdot 10^6$ Coefficiente di magnetizzazione	$k \cdot 10^6$ Suscettività
Cd	0	8,655	— 0,137	— 1,18
Cd ₄ Pb	31,52	9,353	— 0,124	— 1,16
Cd Pb	64,80	10,246	— 0,111	— 1,15
Pb	100,00	11,376	— 0,095	— 1,08

Cadmio - Stagno

Tab. V.

Lega	Percentuale di stagno (in peso)	ρ Densità	$K \cdot 10^6$ Coefficiente di magnetizzazione	$k \cdot 10^6$ Suscettività
Cd	0	8,655	— 0,137	— 1,18
Cd ₂ Sn	34,61	8,122	— 0,089	— 0,71
Cd Sn ₂	67,92	7,686	— 0,028	— 0,21
Sn	100,00	7,294	+ 0,022	+ 0,16

Stagno - Piombo.

Tab. VI.

Lega	Percentuale di piombo (in peso)	ρ Densità	$K \cdot 10^6$ Coefficiente di magnetizzazione	$k \cdot 10^6$ Suscettività
Sn	0	7,294	+ 0,022	+ 0,16
Sn Pb	30,00	8,171	— 0,010	— 0,08
Sn Pb	87,43	10,584	— 0,091	— 0,98
Pb	100,00	11,376	— 0,095	— 1,08

Nel seguente diagramma cartesiano diamo le suscettività magnetiche delle leghe relative alle tabelle I e II in funzione delle concentrazioni.

Tavola II.

Esaminiamo brevemente i risultati ottenuti per ognuna delle nostre serie di leghe.

LEGHE CONTENENTI BISMUTO.

Stagno-Bismuto.

La rapida diminuzione di suscettività, che il bismuto subisce per effetto di un'aggiunta anche lieve di stagno fu già messa in rilievo dalle misure del Laws, il quale trovò che per la lega al 90 % di bismuto una suscettività metà di quella ottenuta pel suo bismuto. Per le quattro leghe da lui studiate ai percentuali di bismuto ; 98,77 = 96,99 = 90,00 = 73,40, egli trovò rispettivamente $\chi \cdot 10^6 = 11,54 = 8,83 = 6,96 = 5,75$. È da notare però che il valore di $\chi \cdot 10^6$ da lui trovato per il bismuto, 13,9, è maggiore di quelli ottenuti da tutti gli ultimi

sperimentatori. Le nostre misure confermano quelle del Laws ed anzi in esse si manifesta ancor più accentuata l'azione di un'aggiunta di stagno al bismuto.

Una lieve aggiunta di bismuto allo stagno, il quale, in accordo alle misure del Meyer ¹⁸⁾ ci risultò lievemente paramagnetico, ci dà leghe più paramagnetiche di questo; per una ulteriore aggiunta il diamagnetismo del bismuto prende il sopravvento. Al 10 %, circa in Bi la lega è *amagnetica*.

Di questi comportamenti agli estremi dell'intervallo il primo trova riscontro nei risultati ottenuti dallo Schulze ²⁵⁾ per la conduttività elettrica, la quale presenta un minimo accentuato per 98 % di Bi, ed in quelli del Puschin ²⁶⁾, il secondo, a quanto dice Stoffel ²⁷⁾, nelle osservazioni micrografiche del Kurnakow, il quale dalla parte dello stagno riscontrò presenza di cristalli misti, benchè lo Shepherd ²⁸⁾ nelle sue misure di forza elettromotrice e nelle sue osservazioni micrografiche, non abbia trovato indizio di soluzioni solide.

Di queste leghe del resto non fu ancor fatta un'analisi termica completa. Le misure di Heycook e Neville ²⁹⁾ del Kapp ³⁰⁾ e quelle dello A. Stoffell ²⁷⁾, che intese di completare le precedenti, mettono in rilievo l'esistenza della eutectica a circa 56 % in peso di Bi (57 % atom. di Sn), che il Guthrie ³¹⁾ però trova invece ad altra concentrazione, ed escludono l'esistenza di composti; ma, non avendo nessuno di essi misurato le durate di cristallizzazione delle eutectiche, non è possibile costruire la curva dei tempi di durata colla quale soltanto si può decidere sulla esistenza di cristalli misti agli estremi. Le nostre misure accennerebbero a quest'esistenza. Data la speciale costituzione del bismuto, dai nostri risultati noi dovremmo supporre che ai cristalli misti, che rappresentano uno speciale stato fisico dei componenti, corrisponda una costante diamagnetica diversa da quella che competerebbe alla lega se si considerasse la suscettività come una proprietà addittiva.

In particolare nel nostro caso, per le leghe ricche di bismuto, dovremmo ammettere che ai cristalli misti ad alto percentuale di questo metallo competa una suscettività di gran lunga minore di quella del Bi puro, e per le leghe ricche di

stagno analogamente supporre che ai cristalli misti corrisponda una costante diamagnetica minore così che la lega risultante riesce più paramagnetica dello Sn stesso.

Cadmio-Bismuto.

Queste leghe diamagnetiche presentano tutte una suscettività minore, in valor assoluto, di quella che avrebbero se la variazione fosse lineare.

Benchè in grado meno accentuato la curva corrispondente presenta nel suo complesso qualche analogia di comportamento con quella relativa alle leghe Sn — Bi.

Quantunque anche per questa lega l'analisi termica completa non sia stata eseguita, le misure termiche di Heycock e Neville ³²⁾, Kapp ³⁰⁾, Stoffel ³³⁾, in accordo alle misure di forze elettromotrici fatte da Herschkowitsch ³⁴⁾, escludono la formazione di composti e di cristalli misti ed accertano l'esistenza di una eutectica al 56 % di Bi (45 % at. di Bi).

Forse interviene anche in questo caso, meno accentuata del resto che nelle precedenti leghe, l'azione di piccole tracce di cristalli misti, la formazione dei quali, come afferma Gürtler ³⁵⁾, si deve generalmente ammettere in tutti i casi, sia pure in proporzioni limitatissime.

Piombo-Bismuto.

Abbiamo studiate due sole leghe alle concentrazioni del 40 % e del 50 % circa di Pb. Le suscettività di esse sono di gran lunga inferiori in valore assoluto a quelle che avrebbero se per esse fosse valida la regola del miscuglio. Le suscettività da noi calcolate in quest'ultima ipotesi sarebbero: — 4,93 per la prima lega e — 5,75 per la seconda, invece che rispettivamente — 1,97 e — 2,41. In realtà adunque le suscettività sono all'incirca, rispettivamente, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ di quelle che risulterebbero col calcolo lineare. È probabile che aumentando il contenuto di bismuto, le differenze fra i dati sperimentali e calcolati risulterebbero ancora considerevoli. Se ne dovreb-

bero trarre conseguenze analoghe a quelle enunciate per le leghe di Sn — Bi ricche di Bi.

Il Kapp ³⁰⁾ del resto osservò che per una lega al 30 % in peso di Bi non si presenta alcun arresto in corrispondenza alla temperatura della eutectica, il che porterebbe ad ammettere l'esistenza di cristalli misti anche per le leghe ricche di piombo, ipotesi questa in accordo con le misure di potenziale eseguite da Shepherd ³⁸⁾ e con i risultati dallo stesso Matthiessen, che trovò per esse leghe pesi specifici differenti dai teorici.

Le ricerche termiche del Kapp ³⁰⁾, di Charpy ³⁶⁾, di Stofal ³⁷⁾ concordano nel precisare l'eutectica a circa 56 % di Bi e nell'escludere la presenza di composti; il Maey ³⁷⁾ solo, in base a risultati dilatometrici, sospetta l'esistenza dei composti Pb₃Bi₂ e PbBi che corrispondono appunto alle concentrazioni da noi studiate.

LEGHE NON CONTENENTI BISMUTO.

Data la esiguità dei valori assoluti dei coefficienti di magnetizzazione di queste leghe, i risultati ottenuti per esse hanno un grado di precisione inferiore a quello che per effetto della presenza del bismuto avevano i precedenti. Le differenze fra i dati ottenuti per i coefficienti di magnetizzazione e quelli calcolati con la regola del miscuglio sono affatto trascurabili per quelle leghe i cui coefficienti sono dell'ordine di grandezza di circa 0.1, in particolare per le leghe Cd — Pb, e cadono nei limiti degli errori di misura per tutte le altre.

Dalle nostre misure si deve così concludere che per le leghe non contenenti bismuto da noi studiate il coefficiente di magnetizzazione è funzione lineare della concentrazione. Altrettanto deve dirsi per la loro suscettività per il fatto che queste leghe si formano senza variazione sensibile di volume.

Riferiamo ciò che fu fatto finora intorno alla loro costituzione.

Cadmio - Piombo.

Le leghe furono studiate termicamente da Heycock e Neville ³²⁾, Kapp ³⁰⁾, Stoffel ³³⁾; dall'Herschkowitsch ³⁴⁾ per le forze elettromotrici. Il Maey ³⁷⁾ trovò dilatazione lieve nella loro formazione.

Il calore molecolare di fusione fu studiato da Van Laar ³⁸⁾.

Esiste una eutectica al 18 % in peso di cadmio (33 % atom. di Cd). È esclusa la presenza di composti. Fu provata dall'Herschkowitsch ³⁹⁾ la formazione di cristalli misti contenenti fino al 4 % atom. di cadmio. Matthiessen ⁴⁰⁾ trovò la conduttività elettrica funzione lineare della concentrazione.

Cadmio - Stagno.

Tutti gli sperimentatori che studiarono le leghe di Cd — Pb (all'infuori del Van Laar ³⁸⁾) si occuparono anche di queste leghe. Esiste una eutectica a circa 30 % atom. di Cd (poco meno del 30 % in peso). Il Maey ³⁷⁾ non trovò alcuna variazione di volume nella loro formazione.

È esclusa da tutti la esistenza di composti, ma la presenza in proporzione limitate di cristalli misti dalla parte dello Sn (2.5 % circa di Cd) fu trovata al solito modo dall'Herschkowitsch ⁴¹⁾ e confermata dall'analisi termica dello Stoffel ³³⁾, che a quella concentrazione di Cd e per concentrazioni minori non trovò arresto eutectico.

La lega che contiene circa il 12 % di cadmio è amagnetica.

Stagno - Piombo.

Termicamente fu studiata da Wiesengrund ⁴²⁾ Heycock e Neville ³²⁾, Charpy ³⁶⁾, Kapp ³⁰⁾, Stoffel ³³⁾, Mazzotto ⁴³⁾. Va esclusa la formazione di composti. È accertata l'esistenza di una eutectica di composizione di circa 25 % atom. di Pb (35 % in peso). Heycock e Neville per primi hanno concluso per la esistenza di cristalli misti in seguito alle misure degli abbassamenti anormali delle temperature di cristallizzazione del Pb per aggiunta di Sn, che riescono 4 volte minori dell'abbassamento teorico. Anche Kapp alla concentrazione del 10 % in

peso di Sn trovò l'assenza di arresto di temperatura in corrispondenza alla cristallizzazione della eutectica ed il Mazzotto misurando il calore di formazione ⁴⁴⁾ vorrebbe concludere per l'esistenza di una soluzione solida contenente il 16 % in peso di Sn.

A vero dire le misure del Maey ³⁷⁾ e quelle del Matthiessen ³⁸⁾ mostrano che i volumi specifici delle leghe sono variabili secondo la regola del miscuglio; il secondo dei due ⁴⁰⁾ trovò ciò anche per la conduttività. Le ricerche di Shepherd ³⁹⁾ sulle forze elettromotrici non hanno condotto ad alcun risultato.

Ma i risultati delle recenti ricerche di Gürtler ⁴⁵⁾ portano ad ammettere l'esistenza di cristalli misti in proporzioni limitate da ambo le parti.

La lega che contiene circa il 13 % di piombo è amagnetica.

Riassumendo: l'esistenza di cristalli misti in tutte le leghe non contenenti bismuto da noi studiate, è accertata.

Ma poichè nei corpi diamagnetici e debolmente paramagnetici le modificazioni fisiche non hanno azione sensibile sulla suscettività magnetica, era da aspettarsi, conformemente alle leggi di P. Curie, che per le leghe da noi studiate non contenenti bismuto la suscettività magnetica fosse funzione lineare della concentrazione.

E ciò fu confermato dalle nostre esperienze.

A nessun risultato può condurre adunque una analisi magnetica sulla costituzione delle leghe diamagnetiche non contenenti bismuto (od altro elemento che si comporti come esso).

Interessa in tutti i casi dal punto di vista pratico la ricerca sperimentale delle leghe amagnetiche di bismuto (od antimonio) e la verifica della assenza di suscettività magnetica in quelle leghe binarie che sono costituite da un corpo paramagnetico e da uno diamagnetico, le concentrazioni delle quali si possono a priori stabilire colla regola del miscuglio.

In particolare per le leghe che contengono bismuto la ricerca magnetometrica può essere efficace mezzo di indagine sulla loro costituzione chimico-fisica. Noi ci proponiamo di e-

stendere queste nostre ricerche sulle leghe e specialmente di studiare le proprietà magnetiche di specie molecolari contenenti bismuto per contribuire alla conoscenza della speciale sua struttura fisica.

Il presente lavoro fu eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Padova, diretto dal Chiarissimo Prof. Giuseppe Vicentini.

T. GNESOTTO, M. BINGHINOTTO.

APPENDICE *)

Dimostrazione della formula (29) di pag. 415.

Studiamo il movimento lungo l'asse $0x$ di un punto del nostro sistema distante b dall'asse di rotazione, a partire da una posizione iniziale qualunque P_i , sotto l'azione delle seguenti forze, dirette secondo $0x$;

la forza attiva dovuta al campo magnetico non uniforme ($A, M, A_2 m$) (pag. 393), forza che approssimativamente è funzione lineare della x e che ha per espressione: $f(o) \left(1 - \frac{x}{a}\right)$,

la forza di richiamo dovuta alla deformazione del sistema elastico, che ponemmo eguale a $-\gamma (x - x_i)$, proporzionale allo spostamento (pag. 414);

la resistenza d'attrito, che possiamo supporre (pag. 416) proporzionale alla velocità ed indicare con $-2h x'$, essendo h una costante positiva.

Indicando con I il momento di inerzia del nostro sistema, la equazione differenziale del movimento lungo $0x$ è:

$$(1) \quad \frac{I}{b^2} x'' = f(o) \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \gamma (x - x_i) - 2h x'.$$

Ponendo:

$$(2) \quad \chi = \frac{1}{a} f(o) + \gamma$$

e scrivendo inoltre :

$$(3) \quad z = x - x_i - \frac{f(x_i)}{\chi};$$

la equazione (1) diviene :

$$(4) \quad \frac{1}{b^2} z'' + 2h z' + \chi z = 0.$$

Se, per brevità, scriviamo :

$$(5) \quad \omega = \frac{b}{1} \sqrt{\chi - h^2 b^2}$$

ed indicando con r e θ_0 due costanti arbitrarie, l'integrale generale della (4) è :

$$(6) \quad z = r e^{-\frac{h b^2}{1} t} \cos(\omega t - \theta_0),$$

che definisce il moto oscillatorio smorzato (pseudoperiodico) del nostro sistema.

Poichè all'inizio del movimento, cioè per $t = 0$, si ha $x = x_i$ e quindi $z = -\frac{f(x_i)}{\chi}$, risulta subito che :

$$(7) \quad r \cos \theta_0 = -\frac{f(x_i)}{\chi}.$$

Chiamiamo ora con x_i e z_i rispettivamente i valori di x e di z per $t = \frac{\pi}{\omega}$, cioè quando alla fine della prima semi-oscillazione il punto mobile partendo da P_i raggiunge la posizione estrema P_1 (pag. 399). Dalla (6), tenuto conto della (7), e per la (3), si ha intanto :

$$(8) \quad z_i = \frac{f(x_i)}{\chi} e^{-\frac{h b^2 \pi}{1 \omega}} = x_i - x_i - \frac{f(x_i)}{\chi}$$

e da questa :

$$(9) \quad x_i - x_i = \frac{f(x_i)}{\chi} \left(1 + e^{-\frac{h b^2 \pi}{1 \omega}} \right).$$

Eccitiamo ora il campo $(A_1 m, A_2 M)$ e riferiamoci al sistema 0ξ (pag. 397).

Nel modo stesso col quale giungemmo alla (9), noi otteniamo questa seconda equazione:

$$(10) \quad \xi_2 - \xi_i = \frac{f(\xi_i)}{\chi} \left(1 + e^{-\frac{\hbar b^2 \pi}{I \omega}} \right),$$

nella quale ξ_i è la coordinata della posizione P_2 , a cui si arresta il sistema alla fine della prima oscillazione sotto l'azione del campo $(A_1 m, A_2 M)$, partendo sempre dalla stessa posizione P_i .

Trasformiamo ora la (10) passando dal sistema 0ξ al vecchio sistema $0x$; ricordando che $\xi = -x$ (pag. 397) e chiamando x_2 la coordinata di P_2 nel vecchio sistema otteniamo:

$$(11) \quad -x_2 + x_i = \frac{f(-x_i)}{\chi} \left(1 + e^{-\frac{\hbar b^2 \pi}{I \omega}} \right).$$

Addizionando membro a membro la (9) con la (11) si ottiene:

$$(12) \quad x_i - x_2 = \frac{f(x_i) + f(-x_i)}{\chi} \left(1 + e^{-\frac{\hbar b^2 \pi}{I \omega}} \right).$$

Scrivendo: $w = x_i - x_2$ (pag. 415) e $2f(o)$ al posto della somma; $f(x_i) + f(-x_i)$ (pag. 397), sostituendo a χ la sua espressione (2) e ponendo infine:

$$(13) \quad \lambda = 2 \frac{\hbar b^2 \pi}{I \omega},$$

dalla (12) si ottiene:

$$f(o) = \frac{a \gamma w}{2 \left(1 + e^{-\frac{\lambda}{2}} \right) a - w}.$$

Se nel denominatore del secondo membro di questa ultima eguaglianza sviluppiamo in serie la potenza $e^{-\frac{\lambda}{2}}$ e tra-

scuriamo, com'è lecito, le potenze $\frac{\lambda}{2}$ superiori alla prima, otteniamo senz'altro la cercata espressione di pag. 415, cioè :

$$f(o) = \frac{a \gamma w}{(4 - \lambda) a - w}.$$

Per trovare sperimentalmente il valore di λ , e quindi il suo significato si può procedere così: Osserviamo a partire da una determinata posizione iniziale, le successive posizioni estreme raggiunte dal sistema mobile sotto l'azione di uno dei due campi magnetici. In teoria basta osservarne soltanto due dopo la prima. Siano x_3 e x_3 i valori di x e di z alla fine della terza semioscillazione (per esempio) cioè nell'istante $t = 3 \frac{\pi}{\omega}$. Operando sulla (6) in modo del tutto analogo a quello col quale giungemmo ad ottenere da essa la (8), abbiamo subito:

$$z_3 = \frac{f(x_i)}{\chi} e^{-3 \frac{\hbar b^2 \pi}{I \omega}} = x_3 - x_i - \frac{f(x_i)}{\chi};$$

dividendo questa per la (8) e tenendo conto della (13), si ha:

$$\frac{z_3}{x_3} = e^{\lambda} = \frac{x_3 - x_i - \frac{f(x_i)}{\chi}}{x_3 - x_i - \frac{f(x_i)}{\chi}}.$$

Al numeratore ed al denominatore di questa ultima frazione figura il termine $\frac{f(x_i)}{\chi}$; che (2) può scriversi così:

$$\frac{f(o) + a \gamma}{a f(x_i)}.$$

Questo termine com'è facile verificare in pratica *), è assai piccolo rispetto alle differenze $(x_3 - x_i)$, $(x_3 - x_i)$, le quali

*) Nel caso nostro per il bismuto λ è circa 0.025 e trascurando nei termini della frazione l'addendo si commette un errore sulla quinta decimale dopo la virgola. In qualche caso, quando $f(x_i)$ è abbastanza grande, l'errore è alquanto maggiore, in ogni modo esso è trascurabile sempre, anche per le ragioni dette nella nota a pag. 417.

pel tenue attrito sono assai poco diverse fra loro; esso si può quindi trascurare in ambo i termini della frazione, che del resto ha un valore molto prossimo all'unità. Potremo dunque scrivere:

$$\lambda = \log_e \frac{x_1 - x_i}{x_3 - x_i},$$

espressione questa che per piccoli smorzamenti, com'è nel nostro caso, di poco si scosta dal decremento logaritmo delle oscillazioni. Questo sarebbe $\log_e \frac{x_1 - x_i}{x_1 - x_3}$; ma esso diventa senz'altro λ quando si ponga nel denominatore $x_1 = x_3 + \Delta_3$ ed $x_2 = x_i + \Delta_2$ e si osservi che in prima approssimazione è $\Delta_2 = \Delta_3$.

T. GNESOTTO.

CITAZIONI.

¹⁾ Laws: « The Magnetic Susceptibility of alloys Bismuth and Tin ». — *Phyl. Mag.* 4 Ser., vol. 8. (1904), II, pagg. 49-57.

²⁾ Curie: « Propriétés magnétiques des corps ». — *Ann. Ch. Ph.* 1895, Ser., 7. vol. 5, pagg. 289-405.

³⁾ Langevin: « Magnétisme et théorie des électrons ». — *Ann. Ch. Ph.* 1895, Ser., 8, vol. 5, pagg. 70-127.

⁴⁾ J. J. Thomson: « Indications relatives à la constitution de la matière ». — *Congrès de Phys.* Paris 1900, vol. 3, pagg. 138-151.

⁵⁾ Langevin: vedi ³⁾ pag. 73 e seg.

⁶⁾ » vedi ³⁾ pagg. 89-90.

⁷⁾ Meslin: « Appareil et méthode de mesure des coefficients d'aimantation ». — *Comp. Rend.* T. 140. (1905), pagg. 1683-1685.

⁸⁾ Curie: vedi ²⁾, pagg. 294-317.

⁹⁾ Lombardi: « Ricerche sopra sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche ». — *Mem. Acc. Torino.* T. 47. (1897), pagg. 1-32.

¹⁰⁾ Meslin: « Mesure des coefficients d'aimantation et étude du champ magnétique ». — *Comp. Rend.* T. 141. (1906), pagg. 102-106.

¹¹⁾ Meslin: vedi ¹⁰⁾ pag. 103.

¹²⁾ Meslin: « Sur le coefficient du Bismuth et sur quelques points de repère dans l'échelle diamagnétique ». — *Comp. Rend.* T. 140. (1905), pagg. 499-502.

- ¹³⁾ Meyer St.: « Ueber die magnetischen Eigenschaften der Elemente ». — *Wied. Ann.*, vol. 68. (1899), pag. 325-334.
- ¹⁴⁾ Curie: vedi ²⁾ pag. 330.
- ¹⁵⁾ Villis: « On the Susceptibility of diamagnetic and Weakly magnetic Substances ». — *Phil. Mag. Ser.*, 5, vol. 45, (1898), pag. 432-447.
- ¹⁶⁾ Lombardi: vedi ⁹⁾, pag. 18.
- ¹⁷⁾ S. Meyer e G. Jäger: « Die Magnetisirangszahl des Wassers ». — *Wied. Ann.*, vol. 67. (1899), pag. 707-718.
- ¹⁸⁾ Landolt Börnstein: *Phys. Chem. Tabellen* (1905). Tab. 248.
- ¹⁹⁾ Scarpa: « Suscettività magnetica dell'acqua ». — *Nuovo Cimento. Ser. 5. T. 10.* (1905), pag. 157.
- ²⁰⁾ Boltzmann: « Ueber die auf Diamagnete wirksamen Kräfte ». — *Wien. Ber. 80. II. Abth.*, pagg. 687-715.
- ²¹⁾ Curie: vedi ²⁾ pagg. 414-15.
- ²²⁾ Curie et Chenéveau: « Sur un appareil pour la détermination des constantes magnétiques ». — *Journ. de Phys. I. II. Ser. 4* (1908), pagg. 706-802.
- ²³⁾ Bernini: « Sulla magnetizzazione di alcuni metalli alcalini ». *Nuovo Cimento. Ser. 5. T. 8.* (1904), pagg. 441-447.
- ²⁴⁾ Matthiessen: « Specif. Gewicht der Legirungen ». — *Pogg. Ann.* 110, (1860), pag. 32.
- ²⁵⁾ Schulze: « Ueber das Verhalten einiger Legirungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz ». — *Annalen der Phys. T. 9.* 1902, III, pag. 555.
- ²⁶⁾ Puschin: « Die Potential und die chemische Konstitution der Metallegirungen ». — *Zeits. f. Ann. Chem.* vol. 56. (1907), pag. 25.
- ²⁷⁾ Stoffel: « Untersuch. ueber binäre und ternäre Legirungen von Sn, Pb, Bi, Cd ». — *Zeit. f. Anorg. Chem.*, 53. (1907), pag. 148.
- ²⁸⁾ Shepherd: « Elektromotorische Kraft der Legirungen von Sn, Pb, Bi, ». — *Beibl. Ann. der Phys.* 1903, pag. 868.
- ²⁹⁾ Heycock Neville: « Das Moleculargewicht von Metallen in Lösungen ». — *Beibl. Ann. der Physik.* 1890, pag. 729.
- ³⁰⁾ A. W. Kapp: « Ueber vollständige Gefrierpunktskurven binärer Metallegirungen ». — *Ann. der Phys.* 1901. III. 754-773.
- ³¹⁾ Guthrie: « On Eutexia ». — *Phylos. Magaz.*, [V.], 17, 1884, pag. 462.
- ³²⁾ Heycock Neville: « Ueber die Gefrierpunktserniedrigung des Cadmius, Wismuths und Bleies durch Legirung mit anderen Metallen ». — *Beibl. Ann. der Phys.* 17^o. (1893), pag. 288.
- ³³⁾ Stoffel: vedi ²⁷⁾, pag. 148.
- ³⁴⁾ Herschkowitsch: « Beitrag zur Kenntniss der Metallegirungen ». — *Zeitschr. f. Phys. Chemie.* 27, (1898). 141.
- ³⁵⁾ Gürtler: « Betrachtungen ueber di festen Lösungen der Elemente in einander ». — *Zeitschr. f. Phys. Chemie.* 68, (1909) pagg. 177-203.
- ³⁶⁾ Charpy: « Sur les états d'équilibre du système ternaire Pb, Sn, Bi ». — *Journ. de Phys. Ser. 3. T. 8.* (1908), pag. 501.
- ³⁷⁾ Maey: « Neue Bestimmung der Dichte der Kupfer. Zinn, Kupfer. Zink und Zinn. Zink Legirungen ». — *Zeitschr. f. Phys. Chemie.* 38. (1901), pag. 295.
- ³⁸⁾ Van Laar: vedi: Bakhuis Roozeboom, *Heter. Gleich.*, II., 276.
- ³⁹⁾ Herschkowitsch: vedi ³⁴⁾, pag. 140.
- ⁴⁰⁾ Matthiessen: « Elektr. Leitungsfähigkeit der Legirungen ». — *Pogg. Ann.* 1860, 110-190.

⁴¹⁾ Heschkowitsch: vedi ³⁴⁾, pag. 139.

⁴²⁾ Wiesengrund: vedi Stoffel, ²⁷⁾, pag. 138.

⁴³⁾ Mazzotto: *Mem. Ist. Lomb.* Ser. II., vol. XVIII, 1885, pag. 165.

⁴⁴⁾ Mazzotto: « Sul calore di solidificazione delle leghe di piombo e stagno ». — *Nuovo Cimento*. Ser. 5, vol. 19. 1910, marzo aprile, pag. 215.

⁴⁵⁾ Gürtler: « Ueber Constitution und Warmeinhalt des Blei. Zinn. Legirungen ». *Zeischr. f. Elektroch.*, vol. 15. 1909, pag. 953.