SUR UNE SÉRIE DE POLYNOMES DONT CHAQUE SOMME
PARTIELLE REPRÉSENTE LA MEILLEURE APPROXIMA-
TION D'UN DEGRÉ DONNÉ SUIVANT LA MÉTHODE DES
MOINDRES CARRÉS*

Par CHARLES JORDAN.

[Read November 11th, 1920.—Received in revised form February, 18th 1921.]

1. En statistique mathématique on rencontre souvent le problème suivant: étant données certaines valeurs $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ par ordre de grandeur de la variable x auxquelles correspondent respectivement les fréquences $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, le nombre n étant généralement grand, il s'agit de reproduire ces résultats aussi bien que possible à l'aide d'un polynome $f_m(x)$ de degré m plus petit que n . Les écarts ou erreurs étant $\delta_i = y_i - f_m(x_i)$, il faut déterminer les coefficients c_v du polynome $f_n(x) = \sum c_v x^v$ conformément à la théorie des moindres carrés, en rendant la somme des carrés des erreurs δ_i minimum.

Les calculs ne présentent pas de difficultés, mais ils sont longs et pénibles; en effet, les valeurs de $m+1$ déterminants du m -ième ordre doivent être calculées.

Les constantes c_v évaluées, on peut, pour se rendre compte de la précision obtenue, déterminer d'après la théorie des moindres carrés, la somme des carrés des écarts δ_i par la formule suivante:

$$\sum \delta_i^2 = \sum y_i^2 - c_0 \cdot \sum y_i - c_1 \cdot \sum y_i x_i - c_2 \cdot \sum y_i x_i^2 - \dots - c_m \cdot \sum y_i x_i^m.$$

Si l'on trouve que l'approximation obtenue n'est pas suffisante, pour en avoir une plus grande, on est obligé de refaire le calcul, et de déterminer les coefficients d'un polynome de degré $m_1 > m$; le grand inconvénient de la méthode est que dans ce cas, tout est à recommencer, car les $m+1$ constantes obtenues précédemment ne conservent pas leurs valeurs.

* L'origine de ce travail est dans un cours de statistique mathématique et de probabilités, que j'ai fait en 1919 à l'Université de Budapest.

Si, au lieu de développer le polynome $f_m(x)$ suivant les puissances de x , on fait ce développement suivant les factorielles de x , $x(x-h)$, etc. c.-à-d. si l'on pose :

$$f_m(x) = \sum c_\nu x(x-h)(x-2h) \dots (x-\nu h + h),$$

et qu'on détermine les coefficients c_ν d'après le principe des moindres carrés, on rencontre les mêmes difficultés.

Par contre, si l'on fait l'approximation à l'aide d'une série de Fourier, cette difficulté ne se présente pas ; en effet dans une telle série les $2m+1$ constantes étant calculées, si l'on veut obtenir celles d'une série à $2m_1+1$ termes ($m_1 > m$), il suffit de déterminer les constantes supplémentaires, car les premiers $2m+1$ coefficients restent les mêmes.

Tchebichef a considéré la première fois une série de polynomes tels que le développement d'une fonction suivant ces polynomes possède la propriété précieuse des séries de Fourier.*

Étant données les valeurs $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ qu'une fonction y prend pour les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ de la variable x , il s'agit de déterminer une suite de polynomes $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$, le polynome $\phi_\nu(x)$ étant de degré ν , tels que si l'on représente y par la somme de degré m ($m < n$)

$$f_m(x) = c_0 + c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_m \phi_m(x),$$

la quantité†

$$\sum_{i=0}^n [y_i - f_m(x_i)]^2,$$

soit minimum pour toutes les valeurs de m .

Tchebichef a montré que les polynomes $\phi_\nu(x)$ sont proportionnels aux dénominateurs $\psi_\nu(x)$ des réduites de la fraction continue suivante :

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{x-x_i} = \frac{a_1}{x-b_1 + \frac{a_2}{x-b_2 + \frac{a_3}{x-b_3 + \dots}}}$$

* "Sur une formule d'Analyse," *Bull. Phys. Math. de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, t. 13 (1854), p. 210 ; "Sur les fractions continues," *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 série, t. 3 (1855), p. 289 ; "Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés," *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg*, 7 série, t. 1 (1859), p. 1.

† Dans ce travail, conformément aux principes du calcul des différences finies, la variable x ne prend pas la valeur de la limite supérieure de la somme définie, c.-à-d.

$$\sum_{x=1}^{n+1} f(x) = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

Le facteur de proportionnalité étant quelconque on peut choisir :

$$\phi_\nu(x) = (-1)^\nu \psi_\nu(x) \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \dots & \Sigma x_i^{\nu-1} \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \dots & \Sigma x_i^\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x_i^{\nu-1} & \dots & \dots & \dots & \Sigma x_i^{2\nu-2} \end{vmatrix}.$$

Alors en déterminant les réduites on trouve

$$\phi_\nu(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^\nu \\ n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \dots & \Sigma x_i^\nu \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \dots & \Sigma x_i^{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x_i^{\nu-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \Sigma x_i^{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Tchebichef a obtenu la formule suivante donnant les coefficients c_ν ,

$$c_\nu = \frac{\Sigma y_i \phi_\nu(x_i)}{\Sigma \phi_\nu^2(x_i)}.$$

Dans le mémoire de 1859, mentionné ci-dessus, il a traité en outre le cas particulier dans lequel les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont équidistantes, dans ce cas entre les fonctions $\phi_\nu(x)$ définies dans son mémoire et les polynomes $\psi_\nu(x)$ précédents il y a la relation :

$$\phi_\nu(x) = \frac{(2\nu)!}{\nu!} \psi_\nu(x).$$

Tchebichef a donné de plus une formule de récurrence pour déterminer les polynomes $\phi_\nu(x)$.

Poincaré dans son *Calcul des Probabilités*,* a repris la question et il est arrivé, par le développement de $\Sigma 1/(x-x_i)$ en fraction continue, à des polynomes $D_\nu(x)$ proportionnels aux polynomes $\phi_\nu(x)$ de Tchebichef.

A. Quinet, dans les *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge,† a indiqué une méthode d'application de ces polynomes aux fonctions de survie.

L'emploi de ces polynomes est certainement avantageux, malgré qu'il nécessite la détermination préalable des valeurs de $\phi_\nu(x_i)$ et de $\Sigma \phi_\nu^2(x_i)$ qui

* 1 éd., 1896, p. 251 ; 2 éd., 1912, p. 280.

† Cambridge Press, Vol. 2 (1913), p. 385.

est généralement laborieuse. Leur avantage ressort surtout dans le cas où l'on a plusieurs approximations à faire, dans lesquelles les grandeurs $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont les mêmes, en effet les valeurs de $\phi_\nu(x_i)$, etc., peuvent être calculées alors une fois pour toute. C'est ce qui a lieu si les valeurs de $x_0, x_1, \dots$, etc., sont équidistantes, ce qui arrive très souvent en statistique mathématique.

Dans ce travail nous allons déduire directement la forme générale des polynômes possédant les propriétés mentionnées des séries de Fourier, et étudier leurs propriétés; puis en supposant les valeurs de x_i équidistantes, nous allons donner des formules simples et des tables permettant de déterminer les valeurs de ces polynômes; enfin, on va montrer sur un exemple l'emploi de ces formules et de ces tables.

2. *Déduction des polynômes.*—Étant donnés n points de coordonnées $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}$, soit $y = f_{n-1}(x)$ l'équation d'une courbe de degré $n-1$ passant par ces points. Développons $f_{n-1}(x)$ en une série de polynômes :

$$(1) \quad y = f_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu G_\nu,$$

où A_ν est un coefficient constant, G_ν un certain polynôme de degré ν .

Considérons une somme partielle de l'expression précédente

$$y = f_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m+1} A_\nu G_\nu.$$

Disposons des coefficients A_ν de manière que la courbe $y = f_m(x)$ de degré m passe aussi près que possible des n points donnés, suivant le principe des moindres carrés c.-à-d. que la somme (2) des carrés des écarts soit minimum :

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n [y_i - f_m(x_i)]^2.$$

A cet effet, il faut égaler à zéro les $m+1$ dérivées par rapport à $A_0, A_1, \dots, A_m$ de cette somme.

Cela nous donne les $m+1$ équations :

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n [y_i - (A_0 + A_1 G_1 + A_2 G_2 + \dots + A_m G_m)] G_\nu = 0,$$

pour $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, m$.

Si les polynômes G_ν sont des polynômes quelconques, les valeurs de A_ν obtenues à l'aide de ces équations dépendront en général du degré m

de la courbe. Notre but est de *déterminer les polynomes G_ν de manière que les constantes A_ν soient indépendantes de m .*

La résolution des équations précédentes pour $m = 0$ donne :

$$A_0 = \sum y_i / n G_0;$$

en remplaçant A_0 par cette valeur dans les deux équations obtenues de (3) en posant $m = 1$, on a $\sum G_0 G_1 = 0$ (équation de condition) et

$$A_1 = \sum y_i G_1 / \sum G_1^2.$$

Si nous posons dans (3) $m = 2$ et si nous y remplaçons A_0 et A_1 par les valeurs précédentes, nous trouvons :

$$\sum G_0 G_2 = 0, \quad \sum G_1 G_2 = 0, \quad A_2 = \sum y_i G_2 / \sum G_2^2.$$

En procédant de la même manière, on arrive aux $\binom{n}{2}$ équations de conditions

$$(4) \quad \sum_{i=0}^n G_\nu(x_i) G_\mu(x_i) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu \neq \mu.$$

Les polynomes $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ contiennent en tout $\binom{n+1}{2}$ constantes arbitraires, on peut donc satisfaire à ces équations et, en plus, on peut choisir arbitrairement dans chaque polynome un des coefficients.

Outre les équations de condition, on trouve encore :

$$A_\nu \sum_{i=0}^n [G_\nu(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^n y_i G_\nu(x_i).$$

Par suite, le développement en série de polynomes G possède non seulement l'avantage, vis à vis d'un développement suivant les puissances de x , qu'en poussant l'approximation plus loin, les coefficients déjà obtenus conservent leurs valeurs, mais encore l'extrême simplicité de la détermination de ces coefficients A_ν .

On peut donner une autre expression aux équations de condition (4); en supposant $\mu > \nu$ on peut mettre à la place de G_ν un polynome quelconque $F_\nu(x_i)$ de degré ν . En effet ce dernier peut être considéré comme la somme de plusieurs polynomes G_s tels que $s \leq \nu$; il en résulte que les conditions (4) sont équivalentes à

$$(4') \quad \sum_{i=0}^n F_\nu(x_i) G_\mu(x_i) = 0 \quad \text{si} \quad \mu > \nu.$$

Les polynomes mentionnés de Tchebichef et de Poincaré satisfont à cette équation.

3. Nous nous proposons de résoudre les équations (4') en supposant les valeurs de x_i équidistantes :

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i = a + hi.$$

C'est dans ce cas, comme nous l'avons remarqué que l'utilisation de ces polynômes est particulièrement avantageuse. Dans ce cas particulier nous désignerons les polynômes G_ν par Q_ν . Pour abréger l'écriture dans la résolution des équations (4'), introduisons une notation nouvelle ; les sommes indéfinies de Q_m seront désignées, comme il suit :

$$\Sigma Q_m h = {}^1Q_m, \quad \Sigma \Sigma Q_m h^2 = \Sigma (\Sigma Q_m h) h = {}^2Q_m, \quad \text{etc.},$$

de manière que la μ -ième somme indéfinie de Q_m sera ${}^\mu Q_m$; et la μ -ième différence de Q_m sera

$$Q_m^{(\mu)} = \Delta^\mu Q_m.$$

Pour déterminer les polynômes Q_m , nous allons partir de la somme indéfinie qui correspond à (4'),

$$\Sigma F_s(x) Q_m(x) h.$$

En utilisant la méthode de la sommation par parties, de manière à prendre la somme de Q_m et la différence de F_s ,* puis en répétant l'opération $s-1$ fois, jusqu'à arriver à $F_s^{(s)} = \text{constante}$, notre somme indéfinie deviendra :

$$(5) \quad \Sigma Q_m F_s h = {}^1Q_m F_s - {}^2Q_m(x+h) F_s^{(1)} + {}^3Q_m(x+2h) F_s^{(2)} - \dots \\ + (-1)^s {}^{s+1}Q_m(x+sh) F_s^{(s)}.$$

Les sommes ${}^\nu Q_m$ ci-dessus ne sont pas complètement déterminées ; en effet, on peut leur ajouter sans inconvénient un polynôme arbitraire de degré $\nu-1$ sans changer Q_m ; nous pouvons donc disposer de ces polynômes arbitraires de manière à annuler les expressions ${}^\nu Q_m(x+\nu h-h)$ pour $x = a$ ou $i = 0$ c.-à-d. pour avoir quel que soit ν ,

$$(6) \quad {}^\nu Q_m(a+\nu h-h) = 0, \quad \nu \leq m.$$

Il y aura ainsi m conditions et m constantes arbitraires disponibles dans ${}^m Q_m$.

* $\Sigma Q(x) F(x) h = {}^1Q(x) F(x) - \Sigma {}^1Q(x+h) F^{(1)}(x) h.$

Comme dans ces conditions la somme indéfinie précédente est nulle à la limite inférieure de (4'), pour que cette condition soit satisfaite, il faut que (5) soit aussi nulle à la limite supérieure, c.-à-d. pour $x = b$ ou $i = n$; le polynôme F , ainsi que ses différences étant arbitraires, la somme (5) ne peut être nulle pour $x = b$ que si chaque terme est séparément nulle. Il faut donc avoir pour toutes les valeurs de ν ,

$$({}^\nu Q_m(b + \nu h - h)h = 0.$$

De (6) on conclut que l'on a ${}^1 Q_m(a) = 0$, ce qui veut dire que $(x-a)$ doit être un facteur de ${}^1 Q_m(x)$ c.-à-d.,

$${}^1 Q_m(x) = (x-a)f_m(x).$$

De cette relation on arrive, en appliquant la méthode de la sommation par parties, à ${}^2 Q_m(x)$,

$${}^2 Q_m(x) = \frac{1}{2!} (x-a)(x-a-h)f_m(x) - \Sigma \frac{1}{2!} (x-a+h)(x-a)f_m^{(1)}(x)h.$$

Pour abréger les formules, nous allons adopter la notation suivante pour la factorielle* :

$$(x+k)(x+k-h)(x+k-2h)(x+k-3h) \dots (x+k-mh+h) = (x+k)_m.$$

Revenons à notre expression de ${}^2 Q_m$ et répétons la sommation par parties $m-1$ fois pour avoir :

$${}^2 Q_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m+1} (-1)^\nu \frac{(x-a+\nu h)_{\nu+2}}{(\nu+2)!} f_m^{(\nu)}(x).$$

On en conclut que $(x-a)$ et $(x-a-h)$ doivent être des facteurs de ${}^2 Q_m(x)$ de manière que

$${}^2 Q_m(x) = (x-a)(x-a-h)g_m(x) = (x-a)_2 g_m(x).$$

Par sommations successives on démontre de la même manière que

$${}^m Q_m(x) = (x-a)_m \omega_m(x).$$

Cette grandeur satisfait à la condition (6) pour qu'elle satisfasse aussi

* Cette notation fait bien ressortir l'analogie entre les puissances et les factorielles ; p. ex. on a :

$$\Sigma (x+k)_m h = \frac{1}{m+1} (x+k)_{m+1} \quad \text{et} \quad \int (x+k)^m dx = \frac{1}{m+1} (x+k)^{m+1}.$$

à la condition (7) on part de ${}^1Q_m(b) = 0$ et en procédant de la même manière on est conduit à la formule

$${}^mQ_m(x) = C(x-a)_m(x-b)_m,$$

C étant un facteur constant arbitraire. Le polynome Q_m se trouve donc déterminé, c'est la m -ième différence de l'expression ci-dessus, c.-à-d.,

$$Q_m = C. \Delta^m(x-a)_m(x-b)_m.$$

En prenant successivement les différences de $C(x-a)_m(x-b)_m$ on est conduit sans difficulté à la formule suivante où $\nu \leq m$,

$$(8) \quad \Delta^\nu C(x-a)_m(x-b)_m = \nu! h^\nu C \sum_{s=0}^{\nu+1} \binom{m}{s} \binom{m}{\nu-s} (x-a+sh)_{m-\nu+s} (x-b)_{m-s}.$$

La même formule peut servir pour les différences d'ordre supérieure à m p. ex. pour $\nu = m + \mu$, mais dans ce cas s ne varie que de μ à $m+1$; en effet, les termes sous le signe Σ sont nuls si $s < \mu$ ou si $s > m$.

Si nous posons $\nu = m$ et $C = 1/2^m \cdot m! \cdot h^m$, les polynomes cherchés deviennent:

$$(9) \quad Q_m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s}^2 (x-a+sh)_s (x-b)_{m-s}.$$

La formule (8) donne les différences des polynomes Q_m ; citons comme exemple:

$$(10) \quad \Delta^m Q_m = \frac{(2m)! h^m}{2^m m!}.$$

De la relation (9) on peut déduire les valeurs des polynomes Q_n correspondant à des cas particuliers; p. ex. en posant $a = -1$ et $b = 1$, il résulte:

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = x + \frac{1}{2}h,$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}hx + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2},$$

$$Q_3 = \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{4}hx^2 + \frac{(11h^2-6)}{4}x + \frac{3h(h^2-1)}{4}.$$

4. Pour pouvoir effectuer les calculs indiqués au commencement du no. 2, il faut encore connaître la valeur de

$$S_m = \sum_{x=a}^b Q_m^2(x) h.$$

On peut déterminer cette somme par la méthode des sommations successives par parties, on trouve un résultat analogue à celui obtenu par Tchebichef dans son mémoire *Sur une méthode d'interpolation* déjà cité.

$$(11) \quad S_m = \frac{n \cdot h^{2m+1}}{4^m(2m+1)} (n^2-1)(n^2-2^2)(n^2-3^2) \dots (n^2-m^2).$$

5. Si l'on veut calculer les valeurs des polynomes Q_m correspondant à des grandeurs données de n et de x , on peut bien se servir de la formule (9), mais il est préférable de déduire d'autres formules plus commodes et plus maniables. Pour y arriver nous allons développer $(x-a)_m(x-b)_m$ en série de factorielles de $(x-b)$, $(x-b)_2$, $(x-b)_3$, ... etc., en employant la formule d'interpolation de Newton, qui remplace la formule de Taylor, lorsque au lieu de développer suivant des puissances on veut développer suivant des factorielles. On a :

$$(x-a)_m(x-b)_m = \sum_{\nu=0}^{2m+1} \frac{(x-b)_\nu}{\nu! h^\nu} [\Delta^\nu (x-a)_m(x-b)_m]_{(x=b)}.$$

D'après notre formule (8), la ν -ième différence de $(x-a)_m(x-b)_m$ est égale à zéro pour $x = b$ si $\nu < m$; par contre, si $\nu > m$ cette différence est égale pour $x = b$ à :

$$\nu! h^\nu \binom{m}{\nu-m} (b-a+mh)_{2m-\nu}.$$

Il résulte de là

$$(12) \quad (x-a)_m(x-b)_m = \sum_{\nu=m}^{2m+1} \binom{m}{\nu-m} (b-a+mh)_{2m-\nu} (x-b)_\nu.$$

De la même manière en développant $Q_m(x)$ suivant les factorielles de $(x-b)$, on aura

$$(13) \quad Q_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m+1} \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} (b-a+mh)_{m-\nu} (x-b)_\nu.$$

Comme $(x-a)_m(x-b)_m$ est symétrique par rapport à a et b et par suite Q_m aussi, il existe un développement de Q_m en factorielles de $(x-a)$ analogue à l'expression (13); on l'obtient de cette dernière en changeant a en b et inversement.

De (13), on peut déduire directement la différence d'ordre μ de Q_m ,

$$(14) \quad \Delta^\mu Q_m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{(m+\mu)! h^\mu}{m!} \sum_{\nu=\mu}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu-\mu} (b-a+mh)_{m-\nu} (x-b)_{\nu-\mu}.$$

Voici quelques valeurs particulières de Q_m tirées de (13):

$$Q_1 = \frac{1}{2}(b-a+h) + (x-b),$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}(b-a+2h)_2 + \frac{3}{2}(b-a+2h)(x-b) + \frac{3}{2}(x-b)_2,$$

$$Q_3 = \frac{1}{8}(b-a+3h)_3 + \frac{3}{2}(b-a+3h)_2(x-b) + \frac{15}{4}(b-a+3h)(x-b)_2 + \frac{5}{2}(x-b)_3.$$

6. Les polynômes Q_m montrent une certaine symétrie. En effet, si dans la formule (9) on remplace x par $a+b-h-x$, on obtient :

$$Q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s}^2 (b-x+sh-h)_s (a-x-h)_{m-s},$$

et en changeant le signe de chaque facteur, on trouve

$$Q_m = (-\frac{1}{2})^m \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s}^2 (x-b)_s (x-a+mh-sh)_{m-s},$$

résultat identique à (9), seul le signe est devenu $(-1)^m$; on en conclut

$$(15) \quad Q_m(x) = (-1)^m Q_m(a+b-h-x);$$

et si nous introduisons une nouvelle variable x_1 telle que :

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(a+b-h)$$

nous aurons

$$Q_m(x_1) = (-1)^m Q_m(-x_1).$$

Par conséquent, si m est paire, le polynôme Q_m ne contient que des puissances paires de x_1 ; et si m est impaire, $Q_m(x_1)$ ne contient que des puissances impaires de x_1 . Dans le cas particulier de $a = -1$, $b = 1$, on a

$$Q_1 = x_1,$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{2},$$

$$Q_3 = \frac{5}{2}x_1^3 + \frac{1}{8}(7h^2 + 12)x_1.$$

7. Nous allons maintenant introduire au lieu de x une nouvelle variable ξ , cette dernière prendra les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ définies par la relation

$$(16) \quad x = a + h\xi \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Nos formules établies précédemment deviennent :

$$(9') \quad \dot{q}_m = \frac{1}{h^m} Q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu}^2 (\xi + \nu)_\nu (\xi - n)_{m-\nu},$$

$$(13') \quad q_m = \frac{1}{h^m} Q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} (m+n)_{m-\nu} (\xi - n)_\nu,$$

$$(13'') \quad q_m = \frac{1}{h^m} Q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} (m-n)_{m-\nu} (\xi)_\nu, *$$

$$(15') \quad q_m(\xi) = (-1)^m q_m(n-1-\xi).$$

La relation (13'') donne immédiatement le développement de $q_m(\xi)$ suivant les factorielles de ξ . [Remarquons que dans ces factorielles, la différence étant l'unité, $(\xi)_\nu$ signifie $\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-\nu+1)$.]

$$q_1 = \frac{1}{2}(1-n) + \xi,$$

$$q_2 = \frac{1}{4}(2-n)_2 + \frac{3}{2}(2-n)\xi + \frac{3}{2}(\xi)_2,$$

$$q_3 = \frac{1}{8}(3-n)_3 + \frac{3}{2}(3-n)_2 \xi + \frac{15}{4}(3-n)(\xi)_2 + \frac{5}{2}(\xi)_3.$$

En remplaçant dans la formule (13'') les factorielles par les puissances de ξ , on trouve†

$$q_2 = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}(n-1)\xi + \frac{1}{4}(n^2 - 3n + 2),$$

$$q_3 = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{15}{4}(n-1)\xi^2 + \frac{1}{4}(6n^2 - 15n + 11)\xi - \frac{1}{8}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6),$$

$$q_4 = \frac{35}{8}\xi^4 - \frac{35}{4}(n-1)\xi^3 + \frac{5}{8}(9n^2 - 21n + 17)\xi^2 - \frac{5}{8}(2n^3 - 9n^2 + 17n - 10)\xi + \frac{1}{16}(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24),$$

$$q_5 = \frac{63}{8}\xi^5 - \frac{315}{16}(n-1)\xi^4 + \frac{35}{8}(4n^2 - 9n + 8)\xi^3 - \frac{105}{16}(n^3 - 4n^2 + 8n - 5)\xi^2 + \frac{1}{16}(15n^4 - 105n^3 + 365n^2 - 525n + 274)\xi - \frac{1}{32}(n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 225n^2 + 274n - 120).$$

* On obtient la formule (13'') en partant de (13), si, avant d'introduire la variable ξ , on y change a en b et inversement.

† Cette substitution est faite par la formule connue :

$$(x)_m = \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^{m-\mu} C_m^{m-\mu} x^\mu,$$

où les coefficients $C_m^{m-\mu}$ sont les nombres de Stirling de première espèce (Voir Nielsen, *Gammalfunktionen*, p. 67).

8. Maintenant nous sommes en état de pouvoir développer un polynome $F(x)$ de degré $n-1$ en séries de polynomes $Q_\nu(x)$, ou un polynome $f(\xi)$ en séries de polynomes $q_\nu(\xi)$:

$$(1') \quad F(x) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu Q_\nu(x), \quad f(\xi) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu q_\nu(\xi).$$

Pour déterminer les coefficients A_ν , il suffit de multiplier la première équation par Q_ν et de faire la somme des quantités obtenues, x variant de a à b , ou x_i de x_0 à x_{n-1} . D'après la formule (4), tous les termes du second membre disparaissent sauf le terme en A_ν et l'on trouve :

$$A_\nu = \frac{1}{S_\nu} \sum_{i=0}^n F(x_i) Q_\nu(x_i) \quad \text{où} \quad S_\nu = \sum_{i=0}^n [Q_\nu(x_i)]^2.$$

De la même manière, on aura

$$(16') \quad a_\nu \cdot \sum_{\xi=0}^n [q_\nu(\xi)]^2 = \sum_{\xi=0}^n f(\xi) q_\nu(\xi).$$

Remarquons en passant que $a_\nu = h^\nu \cdot A_\nu$ et que $q_\nu h^\nu = Q_\nu$.

Si la fonction, $F(x)$ est donnée par n points de coordonnées $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}$ on peut considérer (1') comme une formule d'interpolation que l'on pourrait appeler formule d'interpolation de Tchebichef; cette formule présente de grands avantages sur les autres formules semblables; les calculs sont plus simples et plus rapides, surtout dans le cas considéré dans ce mémoire où les grandeurs x_i sont équidistantes. Alors non seulement on peut utiliser les formules simples que nous venons de donner, mais encore comme nous le verrons, on peut construire des tables abrégant beaucoup les calculs.

Il n'est pas sans intérêt de comparer les diverses formules d'interpolation :

(1) La formule de Lagrange :

$$y = \sum_{\nu=0}^n y_\nu L_\nu(x),$$

$$\text{où} \quad L_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_\nu) \left[\frac{d\omega}{dx} \right]_{x=x_\nu}} \quad \text{et} \quad \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).$$

Si nous considérons une somme partielle de y , dans laquelle ν varie de 0 à k , l'équation obtenue représente une courbe de degré $n-1$, passant

par les premiers k points de coordonnées $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_{k-1}, y_{k-1}$ et par les points de coordonnées $x_k, 0; x_{k+1}, 0; \dots; x_{n-1}, 0$.

(2) La formule d'Ampère :

$$y = y_0 + \sum_{\nu=1}^n B_{\nu}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\nu-1}).$$

Les coefficients B_{ν} sont déterminés successivement en remplaçant x et y par les valeurs correspondantes de $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}$. La somme partielle de y , où ν varie de 0 à k , représente une courbe de degré $k-1$ passant par les premiers k points.

(3) Formule de Tchebicchef :

$$y = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu} G_{\nu}(x),$$

où A_{ν} est donnée par :

$$A_{\nu} \sum_{i=0}^n [G_{\nu}(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^n y_i G_{\nu}(x_i),$$

et où $G_{\nu}(x)$ est le dénominateur de la ν -ième réduite de $d/dx [\log \omega(x)]$ développé en fraction continue. La somme partielle de y , où ν varie de 0 à k , représente une courbe de degré $k-1$ passant aussi près des n points donnés que possible selon la théorie des moindres carrés.

Nous avons vu que cette dernière formule ne devient réellement pratique que si les valeurs de x sont équidistantes. Dans ce cas, on a

$$y = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} q_{\nu}(\xi),$$

où $q_{\nu}(\xi)$ est donnée par la formule (13''), et a_{ν} par (16') ; la valeur de s_{ν} est conformément à la relation (11) :

$$(11') \quad s_{\nu} = \sum_{\xi=0}^n [q_{\nu}(\xi)]^2 = \frac{n}{4^n(2n+1)} (n^2-1)(n^2-2^2) \dots (n^2-\nu^2).$$

En outre, on peut construire une fois pour toutes des tables donnant les valeurs de $q_{\nu}(\xi)$ et s_{ν} .

9. Les tables les plus importantes pour le travail statistique en vue de l'utilisation de nos formules sont les suivantes :

(A) Des tables à double entrée donnant les valeurs de $q_{\nu}(n, \xi)$; une

table pour chaque valeur de ν variant de 1 à 6 ou tout au plus jusqu'à 10. L'interpolation à l'aide de polynômes de degré supérieur à 6 ne se fait que très rarement. On fera varier dans ces tables n de $\nu+1$ à 20 ou à 50 selon les besoins.

Nous avons vu que ξ doit varier de zéro à n , mais on peut réduire les tables de moitié en tenant compte de la symétrie des polynômes $q_\nu(\xi)$ selon (15').

Cette formule, comme celle de

$$\sum_{\xi=0}^n q_\nu(\xi) = 0,$$

peut servir comme vérification aux calculs des tables. Pour déterminer les valeurs numériques de $q_\nu(\xi)$ on se servira de la formule (13'').

(B) Une table à double entrée donnant les grandeurs $s_\nu(n)$ pour les valeurs de ν et de n qui figurent dans les tables précédentes. On utilisera la formule (11').

A titre d'exemple, nous avons joint à ce mémoire six tables. Les Tables I-V donnent les valeurs de $q_\nu(n, \xi)$ pour $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ et pour n jusqu'à 20; la Table VI donne $s_\nu(n)$ pour les mêmes valeurs de ν et de n .

Nous allons montrer sur un exemple la facilité avec laquelle les constantes a_ν se déterminent en se servant de ces tables.

La somme des carrés des erreurs mesurant la précision obtenue est

$$\begin{aligned} \Sigma \delta_\xi^2 &= \Sigma (y_\xi - a_0 - a_1 q_1 - a_2 q_2 - \dots)^2 \\ &= \Sigma y_\xi^2 - 2a_0 \Sigma y_\xi - 2a_1 \Sigma y_\xi q_1 - \dots + a_0^2 n + a_1^2 \Sigma q_1^2 + a_2^2 \Sigma q_2^2 + \dots \end{aligned}$$

En y substituant $\Sigma y_\xi q_\nu$ à $a_\nu \cdot \Sigma q_\nu^2$ on trouve :

$$(17) \quad \Sigma \delta_\xi^2 = \Sigma y_\xi^2 - a_0 \Sigma y_\xi - a_1 \Sigma y_\xi q_1 - a_2 \Sigma y_\xi q_2 - \dots - a_m \Sigma y_\xi q_m,$$

dans ces sommes, ξ varie de 0 à n . De la relation

$$\Sigma y_\xi q_\nu = a_\nu s_\nu,$$

il résulte :

$$(17') \quad \sum_{\xi=0}^n \delta_\xi^2 = \sum_{\xi=0}^n y_\xi^2 - \sum_{\nu=0}^{m+1} s_\nu a_\nu^2.$$

Notons que tous les termes du second membre sauf le premier sont négatifs, ce qui n'était pas nécessairement vraie dans le cas de la formule, du no. 1 donnant la somme des carrés des erreurs. C'est un point im-

portant, en effet si l'approximation obtenue à l'aide d'un polynome de degré m est insuffisante, pour avoir une meilleure approximation à l'aide d'un polynome de degré $m+1$, les constantes $a_0, a_1, \dots, a_m$ obtenues précédemment conservent leurs valeurs et il suffit de calculer la constante a_{m+1} . La somme des carrés des erreurs sera diminuée de $a_{m+1}^2 \cdot s_{m+1}$.

Par suite, en calculant ces termes au cours des calculs on se rend toujours compte de l'approximation déjà obtenue, cela permet de juger, si la nécessité de continuer s'impose.

Les calculs sont si simples et peuvent être exécutés si rapidement que même lorsque un développement suivant des *puissances* de x est nécessaire, il y a avantage à passer par les polynomes q_v .

Les polynomes q_v sont utiles non seulement aux statisticiens, mais encore aux physiciens, quand il s'agit d'interpréter par un polynome les résultats numériques des expériences.

10. Nous allons montrer un exemple d'interpolation appuyé sur les polynomes q_v , en partant des données empreuntées à Bowley, *Elements of Statistics* (3-ième éd., p. 91).

TABLE DES SALAIRES JOURNALIERS DANS L'ANNÉE 1891 EN AMÉRIQUE.

Salaires.	Nombre d'ouvriers.	ξ	y^2
0.50	317	0	100489
1.00	1472	1	2166784
1.50	1297	2	1682209
2.00	970	3	940900
2.50	506	4	256036
3.00	198	5	39204
3.50	254	6	64516
4.00	96	7	9216
4.50	4	8	16
5.00	9	9	81
$\Sigma y = 5123$			$\Sigma y^2 = 5259451$

Dans l'exemple ci-dessus $a = 50$ cents, $h = 50$ cents, $n = 10$. On en tire immédiatement

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = 512.3.$$

Si l'on s'arrêtait à ce terme, la somme des carrés des erreurs serait :

$$\Sigma \delta_0^2 = \Sigma y_i^2 - a_0 \Sigma y_i = 2634938.$$

Pour déterminer la constante a_1 écrivons en utilisant la Table I pour $q_1(10, \xi)$ et la Table VI pour $s_1(10)$,

ξ	$y(\xi) - y(9 - \xi)$	$q_1(\xi)$	$q_1(\xi) [y(\xi) - y(9 - \xi)]$
0	308	-4.5	-1386
1	1468	-3.5	-5138
2	1201	-2.5	-3002.5
3	716	-1.5	-1074
4	308	-0.5	-154
			<hr/>
			$\Sigma y q_1 = -10754.5$

Il en résulte :

$$a_1 = \frac{\Sigma y q_1}{\Sigma q_1^2} = -130.357 \quad \text{et} \quad \Sigma \delta_1^2 = \Sigma \delta_0^2 - a_1 \Sigma y q_1 = 1233015.$$

Pour déterminer a_2 et $\Sigma \delta_2^2$, on procède de la même manière :

ξ	$y(\xi) + y(9 - \xi)$	$q_2(\xi)$	$q_2(\xi) [y(\xi) + y(9 - \xi)]$
0	326	18	5868
1	1476	6	8856
2	1393	-3	-4179
3	1224	-9	-11016
4	704	-12	-8448
			<hr/>
			$\Sigma y q_2 = -8919$

On en tire

$$a_2 = -7.51, \quad \Sigma \delta_2^2 = 1166981.$$

Détermination du coefficient a_3 et de la somme $\Sigma \delta_3^2$,

ξ	$y(\xi) - y(9 - \xi)$	$q_3(\xi)$	$q_3(\xi) [y(\xi) - y(9 - \xi)]$
0	308	-63	-19404
1	1468	21	30828
2	1201	52.4	63052.5
3	716	46.5	33294
4	308	18	5544
			<hr/>
			$\Sigma y q_3 = 118314.5$

$$a_3 = 5.87, \quad \Sigma \delta_3^2 = 500879.$$

Détermination du coefficient a_4 et de la somme $\Sigma \delta_4^2$,

	$y(\xi) + y(9-\xi)$	$q_4(\xi)$	$q_4(\xi) [y(\xi) + y(9-\xi)]$
0	326	189	61614
1	1476	-231	-340956
2	1393	-178.5	-248650.5
3	1224	31.5	38556
4	704	189	133056
			<hr/>
			$\Sigma y q_4 = -356380.5$

$$a_4 = -1.13, \quad \Sigma \delta_4^2 = 98527.$$

Détermination de a_5 et de $\Sigma \delta_5^2$,

ξ	$y(\xi) - y(9-\xi)$	$q_5(\xi)$	$q_5(\xi) [y(\xi) - y(9-\xi)]$
0	308	-472.5	-145530
1	1468	1102.5	1618470
2	1201	-78.5	-94578.75
3	716	-866.25	-620235
4	308	-472.5	-145530
			<hr/>
			$\Sigma y q_5 = 612596.25$

par suite $a_5 = 0.1268, \quad \Sigma \delta_5^2 = 20850.$

Il en résulte que si nous nous arrêtons à a_5 , l'erreur moyenne ϵ sera :

$$\epsilon = \left[\frac{\Sigma \delta^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = 45.7.$$

La fonction y cherchée est la suivante :

$$(a) \quad y = 512.3 + 130.4q_1 - 7.51q_2 + 5.87q_3 - 1.13q_4 + 0.127q_5,$$

ou en substituant aux polynômes q leurs développements suivant les puissances de ξ , on trouve :

$$(b) \quad y = 320.54 + 2144.76\xi - 1271.25\xi^2 + 280.35\xi^3 - 27.45\xi^4 + \xi^5.$$

Comme vérification, déterminons à l'aide de la formule (a) et les Tables I-V les écarts δ correspondant aux valeurs de $\xi = 0, 1, \dots, 9$; on a

très rapidement :

ξ	δ
0	3.54
1	-24.05
2	63.71
3	-67.15
4	-6.29
5	79.99
6	-68.27
7	16.35
8	4.59
9	-2.44

La somme de ces erreurs devrait être égale à zéro, et la somme de leur carré à 20810 ; effectivement nous avons $\Sigma\delta = -0.02$ et $\Sigma\delta^2 = 20565$, ce qui prouve que les calculs ont été exécutés avec une précision suffisante.

II PARTIE.

Propriétés mathématiques des polynomes $Q_\nu(x)$.

11. Examinons la limite des polynomes $Q_\nu(x)$ lorsque l'intervalle h tend vers zéro. Comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} (x-a)_m = (x-a)^m \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^m}{h^m} F = \frac{d^m}{dx^m} F,$$

on conclut :

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^m (x-b)^m.$$

Posons $a = -1$, $b = 1$, nous trouverons $\lim Q_m = P_m$; où P_m est le m -ième polynome de Legendre.

En égalant dans nos formules (9) et (13) h à zéro, nous obtenons des expressions donnant les polynomes de Legendre.

$$(18) \quad \begin{cases} P_m = \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s}^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^s \left(\frac{x-1}{2}\right)^{m-s}, \\ P_m = \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m}{s} \binom{m+s}{s} \left(\frac{x-1}{2}\right)^s, \\ P_m = \sum_{s=0}^{m+1} (-1)^{m-s} \binom{m}{s} \binom{m+s}{s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^s. \end{cases}$$

Si nous remplaçons x dans les formules (18) par $\cos \vartheta$ elles deviennent identiques aux développements des polynômes de Legendre suivant les puissances de $\tan^2 \frac{1}{2}\vartheta$, de $\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta$ et de $\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta$ donnés par Dirichlet.*

Remarquons que l'on a aussi d'après la formule (11),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Sigma (Q_m)^2 h = \int_{-1}^1 (P_m)^2 dx = \frac{2}{2m+1}.$$

12. Nous allons déduire maintenant une équation aux différences finies, dont la solution est le polynôme Q_m . Désignons $(x-a)_m (x-b)_m$ par $u_m(x)$ et déterminons la première différence de $u_{m+1}(x)$:

$$\Delta u_{m+1}(x) = (m+1)h[2x - mh + h - a - b]u_m(x).$$

Écrivons la différence de m -ième ordre de ce produit en utilisant la formule suivante analogue à celle de Leibnitz

$$(18a) \quad \Delta^n [U(x) V(x)] = \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n}{s} \Delta^s V(x+nh-sh) \Delta^{n-s} U(x),$$

d'après cette formule on a :

$$(19) \quad \Delta^{m+1} u_{m+1} = (m+1)h[(2x+mh+h-a-b)\Delta^m u_m + 2mh\Delta^{m-1} u_m].$$

On peut encore exprimer cette quantité autrement, en considérant u_{m+1} comme le produit des deux facteurs $u_m(x)$ et $u_1(x-mh)$. On trouve alors à l'aide de (18a),

$$(20) \quad \Delta^{m+1} u_{m+1} = u_1(x+h) \Delta^{m+1} u_m + (m+1) \Delta u_1(x) \Delta^m u_m(x) \\ + \binom{m+1}{2} \Delta^2 u_1(x-h) \Delta^{m-1} u_m(x).$$

En remarquant que $\Delta u_1(x) = (2x+h-a-b)h$ et que $\Delta^2 u_1(x) = 2h^2$ on tire de (19) et de (20),

$$u_1(x+h) \Delta^{m+1} u_m(x) - m(m+1)h^2 \Delta^m u_m(x) - m(m+1)h^2 \Delta^{m-1} u_m(x) = 0.$$

La première différence de cette expression donne, si l'on remplace $\Delta^m u_m(x)$ par $1/C \cdot Q_m$, l'équation aux différences cherchée :

$$(21) \quad (x-a+2h)(x-b+2h) \Delta^2 Q_m + [2x+3h-m(m+1)-a-b] h \cdot \Delta Q_m \\ - m(m+1)h^2 \cdot Q_m = 0.$$

* Crelle Journal, Bd. 17, pp. 39, 40.

Si nous posons $a = -1$, $b = 1$ et si nous faisons tendre h vers zéro, l'équation (21) est transformée en une équation différentielle du second ordre admettant comme solution le polynôme de Legendre de degré m .

En introduisant la variable ξ au lieu de x d'après (16) on a :

$$(22) \quad (\xi + 2)(\xi - n + 2)\Delta^2 q_m + [2\xi - n + 3 - m(m+1)]\Delta q_m - m(m+1)q_m = 0.$$

La solution de cette équation est donnée par la méthode de Boole (*Treatise on Finite Differences*, 1860, p. 176),

$$q_m(\xi) = \sum_{\nu=0}^{m+1} b_\nu (\xi + \nu)_\nu,$$

$$b_\nu = (-1)^\nu \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} \frac{b_0}{(n+\nu)_\nu},$$

où b_0 est une constante arbitraire. De la première de ces deux relations il résulte que $b_0 = q_m(-1)$. En remplaçant ξ par -1 dans notre formule (9') nous obtenons :

$$(23) \quad \begin{cases} b_0 = (-\frac{1}{2})^m (m+n)_m \\ \text{et } q_m = \sum_{\nu=0}^{m+1} (-1)^{m-\nu} (\frac{1}{2})^m \binom{m}{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} (m+n)_{m-\nu} (\xi+\nu)_\nu. \end{cases}$$

C'est une formule semblable à celle de (13'); elle est aussi très commode pour le calcul des polynômes $q_m(\xi)$. En y remplaçant n par $2/h$, la variable ξ par $(x+1)/h$, et $q_m(\xi)$ par $Q_m(x)h^m$ et en faisant tendre h vers zéro, la formule (23) coïncide à la limite avec la troisième formule (18) donnant les polynômes de Legendre.

13. Pour établir l'équation fonctionnelle qui relie les polynômes Q de divers degrés, il suffit de développer $x \cdot Q_m$ en séries de polynômes Q_m ; d'après ce que nous avons vu, ce développement ne contient que les trois termes suivants :

$$(24) \quad xQ_m = A_{m-1}Q_{m-1} + A_m Q_m + A_{m+1}Q_{m+1}.$$

Les autres termes étant nuls conformément à l'équation (4'); et l'on a :

$$A_{m-1} = \frac{1}{S_{m-1}} \sum_{x=a}^b x \cdot Q_m Q_{m-1} h,$$

$$A_m = \frac{1}{S_m} \sum_{x=a}^b x (Q_m)^2 h,$$

$$A_{m+1} = \frac{1}{S_{m+1}} \sum_{x=a}^b x \cdot Q_m Q_{m+1} h.$$

La détermination des coefficients A_{m-1} et A_{m+1} ne présente pas de difficultés, en répétant sur (24) la sommation par parties, on est conduit à la grandeur $\Sigma(x+mh-a)_m(x+mh-b)_m$ que l'on peut évaluer à l'aide d'une formule analogue à celle donnée par Cauchy pour le développement de $(x+y)_n$ en factorielles de x et y . On trouve enfin :

$$A_{m+1} = \frac{m+1}{2m+1}, \quad A_{m-1} = \frac{m}{2m+1} \frac{(b-a)^2 - m^2 h^2}{4}.$$

La détermination du troisième coefficient, par la même méthode, conduirait à des difficultés. Elle nécessiterait l'évaluation de

$$\Sigma(x+hm+h-a)_m(x+hm+h-b)_m$$

ce qui est difficile, par contre on arrive directement au résultat en remarquant que l'équation (24) doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x donc aussi pour $x = b$, mais de (9) il résulte que

$$Q_m(b) = \left(\frac{1}{2}\right)^m (b-a+mh)_m.$$

En remplaçant dans (24) A_{m-1} , A_{m+1} , $Q_m(b)$, $Q_{m-1}(b)$, et $Q_{m+1}(b)$ par les valeurs correspondantes, on peut déterminer la seule inconnue A_m ,

$$A_m = \frac{1}{2}(a+b-h).$$

Finalement on a

(25)

$$4(m+1)Q_{m+1} - 2(2m+1)(2x-a-b+h)Q_m + m[(b-a)^2 - m^2 h^2]Q_{m-1} = 0.$$

En posant $a = -1$ et $b = 1$ nous obtenons l'équation de Tchebichef mentionnée au no. 1 ; si en outre nous posons $h = 0$, l'équation (25) coïncide avec l'équation bien connue vérifiée par les polynomes de Legendre,

$$(m+1)P_{m+1} - (2m+1)x.P_m + m.P_{m-1} = 0.$$

14. La méthode des fonctions génératrices de Laplace appliquée à (25) conduit à une équation différentielle dont la solution est la fonction génératrice des polynomes Q_m .

En désignant par $G[\psi(m)]$ la fonction génératrice de $\psi(m)$, on a :

$$G[\psi(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} \psi(m) t^m.$$

Posons

$$G(Q_m) = \phi \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dt} = \phi',$$

nous aurons :

$$G[(m+2)Q_{m+2}] = \frac{1}{t}(\phi' - Q_1), \quad G[Q_{m+1}] = \frac{1}{t}(\phi - Q_0),$$

$$G[(m+1)Q_{m+1}] = \phi', \quad G[mQ_m] = t\phi',$$

$$G[m^2Q_m] = t^2\phi'' + t\phi', \quad G[m^3Q_m] = t^3\phi''' + 3t^2\phi'' + t.$$

En écrivant dans (25) $m+1$ au lieu de m et x_1 au lieu de $x - \frac{1}{2}(a+b-h)$, on obtient à l'aide des quantités précédentes la fonction génératrice du premier membre de l'équation (25); en égalant cette fonction génératrice à zéro, nous obtenons une équation différentielle linéaire du troisième ordre dont la solution est la fonction génératrice cherchée :

$$(26) \quad \phi''' t^4 h^2 + 6\phi'' t^3 h^2 + \phi' [(7h^2 - b^2 + 2ab - a^2)t^2 + 8x_1 t - 4] \\ + \phi [(h^2 - b^2 + 2ab - a^2)t + 4x_1] = Q_1 - x_1 Q_0.$$

Remarquons que dans le cas particulier des polynomes Q_n , cette équation se simplifie, car $Q_0 = 1$ et $Q_1 = x_1 Q_0$, donc le second membre de l'équation (26) est nul.

Si nous posons dans (26) $h = 0$, $a = -1$, $b = 1$, l'équation se transforme en une équation différentielle admettant comme solution la fonction génératrice des polynomes de Legendre,

$$\phi'(t^2 - 2x_1 t + 1) + \phi(t - x_1) = 0.$$

On en tire :
$$\phi = (t^2 - 2x_1 t + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans notre cas, il est possible de donner une forme plus simple à l'équation (26) en posant

$$\phi = t^{-2} \psi$$

et
$$\frac{1}{h^2 t^4} \{ [h^2 - (b-a)^2] t^2 + 8x_1 t - 4 \} = R.$$

Il vient

$$(27) \quad \psi''' + \psi' R + \frac{1}{2} \psi \frac{dR}{dt} = 0.$$

La résolution de cette équation donnerait la fonction génératrice des polynomes Q_m .

NOTES.

Ce mémoire ayant été communiqué à Mr. L. Fejér, il a démontré les propositions suivantes :

1. Étant donnés n points dont les abscisses sont par ordre de grandeur $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, parmi tous les polynômes $g_m(x)$ de degré m , dans lesquels le coefficient du terme en x^m est l'unité, le polynôme $G_m(x)$ qui rend minimum l'expression

$$(28) \quad \sum_{i=0}^n [g_m(x_i)]^2 \quad (m < n)$$

est proportionnel au polynôme ψ_m de Tchebichef, mentionné au no. 1.

Si les différences $x_i - x_{i-1}$ sont constantes, $G_m(x)$ est proportionnel à notre polynôme $Q_m(x)$.

Cette proposition présente une analogie avec la suivante : Parmi les polynômes considérés précédemment, celui qui rend minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^1 [g_m(x)]^2 dx$$

est proportionnel aux polynôme P_m de Legendre.*

2. Les racines de l'équation $G_m(x) = 0$ et par suite aussi des équations $\psi_m = 0$ et $Q_m = 0$ sont toutes réelles et comprises dans l'intervalle (x_0, x_{n-1}) .

3. L'équation $G_m(x) = 0$ n'a pas de racines multiples et dans tout intervalle (x_i, x_{i+1}) il y a au plus une racine de cette équation.

Pour prouver ces propositions, nous allons poser avec Mr. Fejér :

$$g_m(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m.$$

Proposition I.—En vue de rendre minimum l'expression (28) égalons à zéro les dérivées de cette dernière par rapport aux coefficients c_ν ,

$$(29) \quad \sum_{i=0}^n x_i^\nu g_m(x_i) = 0 \quad (0 \leq \nu < m).$$

Ces conditions sont identiques à nos conditions (4) qui déterminent les polynômes ψ_m et Q_m , on peut donc définir ces dernières comme rendant minimum l'expression (28).

Proposition II.—Cette proposition est la conséquence immédiate d'un théorème plus général dû à Mr. Fejér.

* Voir Runge, *Praxis der Reihen*, p. 112.

Étant donnés n points $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ dans le plan de la variable complexe z , soit $G_m(z)$ le polynôme de degré m ($m < n$), dans lequel le coefficient de z^m est égal à l'unité, et qui rende minimum l'expression suivante :

$$(30) \quad \sum_{i=0}^n |g_m(z_i)|^2.$$

Théorème : Si $a, b, c, \dots$, sont les racines de $G_m(z) = 0$, aucune de ces racines ne peut représenter un point extérieur au plus petit polygone convexe contenant les points $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

Démonstration : Supposons que l'une de ces racines, p. ex. $z = a$ corresponde à un point extérieur au polygone mentionné. S'il est possible de déplacer le point a en a_1 de manière que toutes les distances $|z_i - a|$ diminuent, ($i = 0, 1, \dots, n-1$), c.-à-d. que

$$|z_i - a_1| < |z_i - a|$$

pour toutes les valeurs de i , nous obtiendrons un polynôme

$$H_m(z) = (z - a_1)(z - b)(z - c) \dots$$

tel que

$$|H_m(z_i)| < |G_m(z_i)|$$

pour toutes les valeurs de i pour lesquelles $G_m(z_i) \neq 0$; aux autres valeurs $H_m(z_i) = G_m(z_i)$, par conséquent on aurait

$$\sum |H_m(z_i)|^2 < \sum |G_m(z_i)|^2.$$

ce qui serait contraire à la supposition que $G_m(z)$ rend minimum l'expression (30).

Il reste encore à montrer que, le point a étant un point extérieur au polygone mentionné ci-dessus, il est effectivement possible de déplacer ce point de manière à diminuer toutes les distances $|z_i - a|$. En effet, si le point a est un point extérieur, il est toujours possible de mener une droite D de manière que le polygone soit situé d'un côté de la droite, et le point a de l'autre. Menons par le point a une perpendiculaire à D , si le point a se déplace sur cette perpendiculaire vers la droite D , on peut voir aisément que toutes les distances $|z_i - a|$ diminuent ; on en conclut qu'aucune des racines de $G_m(x) = 0$ ne peut être située en dehors du polygone considéré ; la démonstration du théorème est donc complète.

Dans le cas particulier où les n points donnés sont tous situés sur l'axe réel, le polygone est réduit au segment de droite (x_0, x_{n-1}) , par suite d'après le théorème que l'on vient de démontrer, les racines de $G_m(x)$ sont toutes situées entre ces deux points, donc elles sont toutes réelles.

Proposition III.—Nous allons démontrer qu'entre deux points consécutifs quelconques x_i et x_{i+1} le polynome $Y = G_m(x)$ ne peut changer de signe plus d'une fois.

D'abord dans la suite $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ correspondant à $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ la quantité Y_i change de signe m fois.

En effet $G_m(x)$ étant de degré m , il est évident que la série ci-dessus ne peut présenter plus de m changements de signe. Supposons, qu'il y ait moins, p. ex. μ ($\mu < m$), dans ce cas il serait possible de mener une courbe de degré μ soit $y = f_\mu(x)$ telle que pour toutes les valeurs de i les grandeurs $y_i = f_\mu(x_i)$ et Y_i aient le même signe, lorsque y_i et Y_i sont différentes de zéro.

Supprimons les points x_i correspondant aux valeurs nulles de Y_i ; supposons qu'en suite les changements de signes de Y_i ont lieu entre les points x_k et x_p , entre x_i et x_r , etc., alors la courbe suivante de degré μ ,

$$(31) \quad y = f_\mu(x) = (-1)^\mu Y_k(x - \frac{1}{2}x_k - \frac{1}{2}x_p)(x - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_r) \dots$$

change de signe au milieu des mêmes intervalles que Y , et l'on voit facilement que le signe de $f_\mu(x_i)$ et Y_i est le même pour toutes les valeurs de i pour lesquelles y_i et Y_i sont différentes de zéro. Or il y a de telles valeurs, car d'après notre supposition Y_k est différente de zéro et à cause de (31) y_k l'est aussi. On en conclut que

$$\sum_{i=0}^n f_\mu(x_i) G_m(x_i) > 0,$$

ce qui contredit notre condition (29). Le polynome $G_m(x)$ ne rendrait pas l'expression (30) minimum, donc en supposant qu'il y a moins de m changements de signe dans la suite $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ on arrive à une contradiction.

Ainsi nous avons démontré que le polynome $G_m(x)$ change de signe m fois entre x_0 et x_{n-1} , comme il est de degré m toutes ces racines sont simples. La première partie du théorème est donc démontrée. Pour montrer qu'entre deux racines consécutives de $G_m(x) = 0$ se trouve placé au moins un des points x_i , il suffit de remarquer que dans le cas contraire la suite $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ présenterait nécessairement moins de m changements de signe, ainsi dans l'intervalle $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ il y a au plus une racine de $G_m(x) = 0$.

En résumé : étant donnés n points, dont les abscisses sont par ordre de grandeur : $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, parmi tous les polynomes $g_m(x)$ de degré m , dans lesquels le coefficient de x^m est l'unité, soit $G_m(x)$ le polynome qui

rend minimum l'expression :

$$\sum_{i=0}^n [g_m(x_i)]^2 \quad (m < n).$$

Le polynome $G_m(x)$ est proportionnel au polynome ψ_m de Tchebichef, de plus toutes les racines de ce polynome sont réelles et comprises entre x_0 et x_{n-1} ; en outre, cette équation n'a pas de racine multiple et parmi les $n-1$ intervalles il y a m intervalles (x_i, x_{i+1}) renfermant une racine de $G_m(x) = 0$.

Dans le cas particulier où $m = n-1$, chacun des intervalles mentionnés contient une racine.

I. TABLE DES VALEURS DE $q_1(n, \xi)$.

n, ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	-0.5	0.5										
3	-1	0	1									
4	-1.5	-0.5	0.5	1.5								
5	-2	-1	0	1	2							
6	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5						
7	-3	-2	-1	0	1	2	3					
8	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5				
9	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4			
10	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5		
11	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
12	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
13	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
14	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
15	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
16	-7.5	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5
17	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
18	-8.5	-7.5	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5
19	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
20	-9.5	-8.5	-7.5	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5

Remarques :

$$q_1(n, n-1-\xi) = -q_1(n, \xi).$$

La table a été calculée à l'aide de la formule :

$$q_1 = \xi - \frac{1}{2}(n-1).$$

II. TABLE DES VALEURS DE $q_2(n, \xi)$.

n, ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0.5	-1	0.5									
4	1.5	-1.5	-1.5	1.5								
5	3	-1.5	-3	-1.5	3							
6	5	-1	-4	-4	-1	5						
7	7.5	0	-4.5	-6	-4.5	0	7.5					
8	10.5	1.5	-4.5	-7.5	-7.5	-4.5	1.5	10.5				
9	14	3.5	-4	-8.5	-10	-8.5	-4	3.5	14			
10	18	6	-3	-9	-12	-12	-9	-3	6	18		
11	22.5	9	-1.5	-9	-13.5	-15	-13.5	-9	-1.5	9	22.5	
12	27.5	12.5	0.5	-8.5	-14.5	-17.5	-17.5	-14.5	-8.5	0.5	12.5	27.5
13	33	16.5	3	-7.5	-15	-19.5	-21	-19.5	-15	-7.5	3	16.5
14	39	21	6	-6	-15	-21	-24	-24	-21	-15	-6	6
15	45.5	26	9.5	-4	-14.5	-22	-26.5	-28	-26.5	-22	-14.5	-4
16	52.5	31.5	13.5	-1.5	-13.5	-22.5	-28.5	-31.5	-31.5	-28.5	-22.5	-13.5
17	60	37.5	18	1.5	-12	-22.5	-30	-34.5	-36	-34.5	-30	-22.5
18	68	44	23	5	-10	-22	-31	-37	-40	-40	-37	-31
19	76.5	51	28.5	9	-7.5	-21	-31.5	-39	-43.5	-45	-43.5	-39
20	85.5	58.5	34.5	13.5	-4.5	-19.5	-31.5	-40.5	-46.5	-49.5	-49.5	-46.5

Remarque :

$$q_2(n, n-1-\xi) = q_2(n, \xi).$$

La table a été calculée à l'aide de la formule :

$$q_2 = \frac{1}{4}(2-n)_2 + \frac{3}{2}(2-n)\xi + \frac{3}{2}(\xi)_2.$$

III. TABLE DES VALEURS DE $q_3(n, \xi)$.

n, ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	-0.75	2.25	-2.25	0.75							
5	-3	6	-0	-6	3						
6	-7.5	10.5	6	-6	-10.5	7.5					
7	-15	15	15	0	-15	-15	15				
8	-26.25	18.75	26.25	11.25	-11.25	-26.25	-18.75	26.25			
9	-42	21	39	27	0	-27	-39	-21	42		
10	-63	21	52.5	46.5	18	-18	-46.5	-52.5	-21	63	
11	-90	18	66	69	42	0	-42	-69	-66	-18	90
12	-123.75	11.25	78.75	93.75	71.75	26.25	-26.25	-71.75	-93.75	-78.75	-11.25
13	-165	0	90	120	105	60	0	-60	-105	-120	-90
14	-214.5	-16.5	99	147	142.5	100.5	36	-36	-100.5	-142.5	-147
15	-273	-39	105	174	183	147	81	0	-81	-147	-183
16	-341.25	-68.25	107.25	200.25	225.75	198.75	134.25	47.25	-47.25	-134.25	-198.75
17	-420	-105	105	225	270	255	195	105	0	-105	-195
18	-510	-150	97.5	247.5	315	315	262.5	172.5	60	-60	-172.5
19	-612	-204	84	267	360	378	336	249	132	0	-132
20	-726.75	-267.75	63.75	282.75	404.25	443.25	414.75	333.75	215.25	74.25	-74.25

Remarque :

$$q_3(n, n-1-\xi) = -q_3(n, \xi).$$

La table a été calculée par la formule :

$$q_3 = \frac{1}{8}(3-n)_3 + \frac{3}{2}(3-n)_2\xi + \frac{15}{4}(3-n)(\xi)_2 + \frac{5}{2}(\xi)_3.$$

IV. TABLE DES VALEURS DE $q_4(n, \xi)$.

n, ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1.5	- 6	9	- 6	1.5						
6	7.5	- 22.5	15	15	- 22.5	7.5					
7	22.5	- 52.5	7.5	45	7.5	- 52.5	22.5				
8	52.5	- 97.5	- 22.5	67.5	67.5	- 22.5	- 97.5	52.5			
9	105	- 157.5	- 82.5	67.5	135	67.5	- 82.5	- 157.5	105		
10	189	- 231	- 178.5	31.5	189	189	31.5	- 178.5	- 231	189	
11	315	- 315	- 315	- 52.5	210	315	210	- 52.5	- 315	- 315	315
12	495	- 405	- 495	- 195	180	420	420	180	- 195	- 495	- 405
13	742.5	- 495	- 720	- 405	82.5	480	630	480	82.5	- 405	- 720
14	1072.5	- 577.5	- 990	- 690	- 97.5	472.5	810	810	472.5	- 97.5	- 690
15	1501.5	- 643.5	- 1303.5	- 1056	- 373.5	376.5	931.5	1134	931.5	376.5	- 373.5
16	2047.5	- 682.5	- 1657.5	- 1507.5	- 757.5	172.5	967.5	1417.5	1417.5	967.5	172.5
17	2730	- 682.5	- 2047.5	- 2047.5	- 1260	- 157.5	892.5	1627.5	1890	1627.5	892.5
18	3570	- 630	- 2467.5	- 2677.5	- 1890	- 630	682.5	1732.5	2310	2310	1732.5
19	4590	- 510	- 2910	- 3397.5	- 2655	- 1260	315	1702.5	2640	2970	2640
20	5814	- 306	- 3366	- 4206	- 3561	- 2061	- 231	1509	2844	3564	3564

Remarque :

$$q(n, \xi) = q(n, n-1-\xi).$$

La table a été calculée à l'aide de la formule :

$$q_4(\xi) = \frac{1}{16} [(4-n)_4 + 20(4-n)_3 \xi + 90(4-n)_2 (\xi)_2 + 140(4-n)(\xi)_3 + 70(\xi)_4].$$

V. TABLE DES VALEURS DE $q_5(n, \xi)$.

n, ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	- 3.75	18.75	- 37.5	37.5	- 18.75	3.75					
7	- 22.5	90	- 112.5	0	112.5	- 90	22.5				
8	- 78.5	258.75	- 191.25	- 168.75	168.75	191.25	- 258.75	78.75			
9	- 210	577.5	- 210	- 472.5	0	472.5	210	- 577.5			
10	- 472.5	1102.5	- 78.75	- 866.25	- 472.5	472.5	866.25	78.75	- 1102.5	472.5	
11	- 945	1890	315	- 1260	- 1260	0	1260	1260	- 315	- 1890	945
12	- 1732.5	2992.5	1102.5	- 1522.5	- 2310	- 1050	1050	2310	1522.5	- 1102.5	- 2992.5
13	- 2970	4455	2430	- 1485	- 3510	- 2700	0	2700	3510	1485	- 2430
14	- 4826.25	6311.25	4455	- 945	- 4691.25	- 4893.25	- 2025	2025	4893.25	4691.25	945
15	- 7507.5	8580	7342.5	330	- 5632.5	- 7500	- 5062.5	0	5062.5	7500	5632.5
16	- 11261.25	11261.25	11261.25	2598.75	- 6063.75	- 10316.25	- 9056.25	- 3543.75	3543.75	9056.25	10316.25
17	- 16380	14332.5	16380	6142.5	- 5670	- 13072.5	- 13860	- 8662.5	0	8662.5	13860
18	- 23205	17745	22863.75	11261.25	- 4095	- 15435	- 19241.25	- 15303.75	- 5775	5775	15303.75
19	- 32130	21420	30870	18270	- 945	- 17010	- 24885	- 23310	- 13860	0	13860
20	- 43605	25245	40545	27495	4207.5	- 17347.5	- 30397.5	- 32422.5	- 24210	- 8910	8910

Remarques : On a

$$q_5(n, \xi) = -q_5(n, n-1-\xi).$$

Les valeurs ci-dessus ont été calculées à l'aide de la formule

$$q_5(n, \xi) = \frac{1}{3^2} (5-n)_5 + \frac{1}{1^2} (5-n)_4 \xi + \frac{1}{1^2} (5-n)_3 (\xi)_2 + \frac{3}{2^2} (5-n)_2 (\xi)_3 + \frac{3}{1^2} (5-n)(\xi)_4 + \frac{9}{8} (\xi)_5$$

VI. TABLE DES VALEURS DE $\sum_{\xi=0}^n [q_m(\mu, \xi)]^2$.

<i>n, m</i>	1	2	3	4	5
2	0·5				
3	2	1·5			
4	5	9	11·25		
5	10	31·5	90	157·5	
6	17·5	84	405	1575	3543·75
7	28	189	1350	8662·5	42525
8	42	378	3712·5	34650	276412·5
9	60	693	8910	112612·5	1289925
10	82·5	1188	19305	315315	4837218·75
11	110	1930·5	38610	788287·5	15479100
12	143	3003	72393·75	1801800	43857450
13	182	4504·5	128700	3828825	112736300
14	227·5	6552	218790	7657650	267843637·5
15	280	9282	353020	14549535	595208250
16	340	12852	566865	26453700	1249937325
17	408	17442	872100	46293975	2499874650
18	484·5	23256	1308150	78343650	4791426412·5
19	570	30523·5	1918620	128707425	8845710300
20	665	39501	2758016·25	205931880	15795911250

Remarque : La table a été calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\Sigma (q_m)^2 = \frac{n}{(2m+1)2^{2m}} \prod_{s=1}^{m+1} (n^2 - s^2).$$