Nuovi studî sulle superficie rigate.

(Di PIETRO TORTORICI, *Zona di guerra.*)

PREFAZIONE.

Altra volta ⁽¹⁾ mi sono occupato di quelle superficie rigate (rigate r) con due asintotiche curvilinee a torsione costante ed eguale e fin da allora ho annunziato che, con altro metodo, avrei determinato ancora la classe completa di queste superficie. Riprendo qui adunque taluni studî sulle superficie rigate e, mettendomi da un punto di vista alquanto generale, mi propongo di studiare le rigate gobbe con due asintotiche curvilinee a torsione costante (uguale o no): tralascio lo studio delle rigate con una sola asintotica a torsione costante perchè, come ho già osservato, qualunque superficie rigata può flettersi in guisa da renderla tale.

Il lettore vedrà che, col nuovo metodo qui adoperato, in modo assai rapido, si riesce a classificare completamente le nostre superficie le quali, come risulterà nel corso della Memoria, possono essere di due soli tipi:

a) superficie rigate di, cui tutte le asintotiche curvilinee sono a torsione costante (elicoidi rigate d'area minima),

b) superficie rigate con due sole asintotiche a torsione costante; altri casi non sono possibili.

Tutte le superficie del tipo *b)* si suddividono poi in due classi a seconda che le due asintotiche a torsione costante abbiano o no la medesima torsione; io studio nell'ultima parte della Memoria le rigate r e stabilisco talune nuove loro proprietà.

Altrove forse studierò la classe delle superficie con due asintotiche a torsione costante e diversa.

§ 1.

LE FORMULE DI LELIEUVRE E LE FORMULE DI GOURSAT.

1. Per intraprenderè il nostro studio conviene richiamare i seguenti teoremi dovuti a LELIEUVRE ⁽²⁾:

Se si considera una superficie a curvatura totale negativa, e a sistema coordinato u, v su essa assumesi quello delle asintotiche, se per la curvatura totale K ponesi:

$$K = -\frac{1}{\rho^2}$$

e se, essendo X, Y, Z i coseni direttori della normale alle superficie nel suo punto generico $P \equiv (x, y, z)$ ponesi ancora:

$$\sqrt{\rho} X = \xi, \quad \sqrt{\rho} Y = \eta, \quad \sqrt{\rho} Z = \zeta$$

si hanno le formole:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = + \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e le analoghe circolando per y, z ; e ξ, η, ζ sono tre soluzioni particolari della equazione:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = M \xi, \quad M = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \sqrt{\rho} - f.$$

2. Ciò premesso occorre ricordare talune formole di GOURSAT relative alle superficie rigate.

Per ritrovare tale formula seguiamo il procedimento adoperato dal signor TZITZEICA nella Memoria che citiamo ⁽³⁾, perchè vogliamo considerare esplicitamente un caso ($M=0$), il quale, benchè sia semplicissimo, ha pel nostro studio una certa importanza.

Supponiamo adunque che la superficie che si considera sia rigata e sia

riferita alle sue asintotiche u, v ; inoltre le generatrici rettilinee siano le linee:

$$u = \text{costante}.$$

Ciò porta che debba essere:

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Ora evidentemente può porsi:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = A \frac{\partial \xi}{\partial u} + B \frac{\partial \xi}{\partial v} + C \xi$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = A \frac{\partial \eta}{\partial u} + B \frac{\partial \eta}{\partial v} + C \eta$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = A \frac{\partial \zeta}{\partial u} + B \frac{\partial \zeta}{\partial v} + C \zeta,$$

ove A, B, C sono opportune funzioni di u, v e ciò perchè si ha sempre

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \zeta \end{vmatrix} = 0;$$

inoltre, poichè dalle formule di LELIEUVRE (*) deducesi p. es.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} - \zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2},$$

sostituendo ottiensì:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = A \left(\eta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) + B \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}$$

con le analoghe per y e z .

Queste ultime formule confrontate con le proporzioni avanti scritte danno

$$A = 0$$

e perciò concludesi che le funzioni ξ , η , ζ devono essere integrali comuni alle due equazioni:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial u \partial v} = M \mathfrak{S} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} = B \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + C \mathfrak{S}.$$

3. Scriviamo le condizioni di integrabilità del sistema costituito dalle due precedenti equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial v^2} \right);$$

cioè sviluppando e tenendo presenti le equazioni medesime:

$$M \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} \mathfrak{P} = B M \mathfrak{P} + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} \mathfrak{S} + C \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}.$$

A tale relazione necessariamente soddisfano ξ , η , ζ e non potendo essere, come si è osservato,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

deducesi subito:

$$C = 0$$

e quindi se $M \neq 0$ successivamente

$$\frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial v} = B, \quad M = \frac{\partial B}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \log M}{\partial u \partial v} = M$$

mentre che se $M = 0$ ottiensi soltanto:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

4. Il caso $M=0$ si tratta facilmente, perchè soddisfatta la relazione:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

cioè posto:

$$B = \lambda(v)$$

λ essendo una certa funzione della sola v , per quanto precede (cfr. n. 2) si ha da integrare l'equazione

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial v^2} = \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v}.$$

Posto:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} = e^{\mu(u,v)}$$

tale equazione scrivesi:

$$\frac{\partial}{\partial v} \mu(u, v) = \lambda(v)$$

onde deducesi:

$$\mu(u, v) = \varphi_1(v) + \psi_1(u)$$

essendo $\varphi_1(v)$ una certa funzione di v e $\psi_1(u)$ una funzione arbitraria di u .

Segue da ciò che la funzione $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v}$ è del tipo:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} = \varphi_2(v) \psi_2(u);$$

ma ora la condizione:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial u \partial v} = 0$$

ne fornisce:

$$\psi_2(u) = k = \text{costante}$$

e quindi

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} = k \varphi_2(v)$$

e

$$\mathcal{S} = k \varphi(v) + \psi(u)$$

ove è sempre $\varphi(v)$ una certa funzione di v , $\psi(u)$ una funzione arbitraria di u e k una costante.

Concludiamo dicendo:

Perchè tre soluzioni ξ, η, ζ linearmente indipendenti della equazione:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} = 0$$

definiscano, mediante le formule di LELIEUVRE, una superficie rigata su cui le generatrici rettilinee siano le linee $u = \text{cost.}$, occorre e basta che esse siano del tipo:

$$\xi = k_1 \varphi(v) + \psi_1(u)$$

$$\eta = k_2 \varphi(v) + \psi_2(u)$$

$$\zeta = k_3 \varphi(v) + \psi_3(u)$$

ove k_1, k_2, k_3 sono tre costanti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 tre funzioni arbitrarie di u e $\psi(v)$ una funzione di v .

Ad es. posto:

$$k_1 = 0 \quad \psi_1(u) = u, \quad k_2 = 0 \quad \psi_2(u) = \psi(u)$$

$$k_3 = 1 \quad \varphi(v) = v, \quad \psi_3 = 0$$

ottiensi:

$$\xi = u, \quad \eta = \psi(u), \quad \zeta = v$$

e si definisce in tal modo la più generale conoide retta.

5. Nel caso in cui

$$M = 0$$

si ha da integrare l'equazione di LIOUVILLE:

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial u \partial v} = M.$$

Cambiando convenientemente i parametri u, v , LIOUVILLE ha trovato:

$$M = \frac{2}{(u+v)^2}$$

e quindi per le precedenti si ha:

$$B = -\frac{2}{u+v}.$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} = -\frac{2}{u+v} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}$$

onde segue:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2} U$$

essendo U una funzione arbitraria della sola u . Allora derivando rispetto ad u si ha:

$$\frac{2}{(u+v)^2} \mathfrak{P} = \frac{2}{(u+v)^2} \frac{dU}{du} - \frac{4}{(u+v)^3} U$$

cioè

$$\mathfrak{P} = \frac{dU}{du} - \frac{2U}{u+v}.$$

Volendo anche in questo caso scrivere le formule di LELIEUVRE⁽⁵⁾ indicheremo con U , V , W tre funzioni arbitrarie della sola u e indicando con apici le loro derivate rispetto ad u porremo:

$$\xi = U' - \frac{2U}{u+v}, \quad \eta = V' - \frac{2V}{u+v}, \quad \zeta = W' - \frac{2W}{u+v}$$

e le formule di LELIEUVRE danno:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = W' V'' - V' W'' - (W V'' - V W'') \frac{2}{u+v} + (W V' - V W') \frac{2}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (V W' - W V') \frac{2}{(u+v)^2}$$

e le analoghe circolando. Da queste deduconsi le formule di GOURSAT⁽⁶⁾ che volevamo ricordare:

$$x = (V W' - W V') \frac{2}{u+v} - \int (V' W'' - W' V'') du$$

$$y = (W U' - U W') \frac{2}{u+v} - \int (W' U'' - U' W'') du$$

$$z = (U V' - V U') \frac{2}{u+v} - \int (U' V'' - V' U'') du$$

di cui ci serviremo fra poco.

§ 2.

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LO STUDIO DELLE RIGATE
CON ASINTOTICHE CURVILINEE A TORSIONE COSTANTE.

6. Se $\varepsilon \frac{1}{\rho}$, ($\varepsilon = \pm 1$) è la torsione di una asintotica curvilinea di una superficie [rigata o no] lungo di essa si ha, conforme al teorema di ENNEPER:

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

designando con K la curvatura totale della superficie. Allora, se l'asintotica $v = v_0$ che si considera è a torsione costante, deve aversi lungo di essa:

$$\rho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{costante}.$$

Il primo membro di questa equazione mantenendosi costante per $v = v_0$ deve avere nulla la derivata rispetto ad u ; cioè per $v = v_0$ deve essere:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial u} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right]_{v=v_0} = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale che noi esamineremo per studiare, nel modo più generale possibile, le superficie rigate con asintotiche curvilinee a torsione costante.

Noi passiamo a costruire ed a studiare tale equazione nei due soli casi possibili esaminati al paragrafo precedente:

$$M = 0; \quad M = \frac{2}{(u+v)^2}$$

e poichè non vogliamo qui occuparci delle superficie rigate con una sola

asintotica curvilinea a torsione costante studieremo quando detta equazione possa essere soddisfatta per due diversi valori costanti di v :

$$v = v_0, \quad v = v_1.$$

§ 3.

IL CASO $M = 0$: L'ELICOIDE RIGATA D'AREA MINIMA.

7. Per condurre la ricerca nel caso $M = 0$, senza supporre, per ora, che la superficie sia rigata, siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \psi_1, \psi_2, \psi_3$ due terne di funzioni arbitrarie rispettivamente della sola v e della sola u e consideriamo le funzioni:

$$\xi = \varphi_1 + \psi_1, \quad \eta = \varphi_2 + \psi_2, \quad \zeta = \varphi_3 + \psi_3$$

le quali costituiscono evidentemente tre soluzioni della equazione:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} = 0.$$

Sia S la superficie che tali tre soluzioni definiscono mediante le formule di LELIEUVRE; se vogliamo esprimere che una asintotica $v = v_0$ di S è a torsione costante, dobbiamo scrivere precisamente che lungo di essa è:

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial u} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0$$

ovvero:

$$\left[(\varphi_1 + \psi_1) \psi'_1 + (\varphi_2 + \psi_2) \psi'_2 + (\varphi_3 + \psi_3) \psi'_3 \right]_{v=v_0} = 0.$$

Osservisi ora che, per le formule stesse di LELIEUVRE, è:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (\varphi_3 + \psi_3) \varphi'_2 - (\varphi_2 + \psi_2) \varphi'_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -(\varphi_3 + \psi_3) \psi'_2 + (\varphi_2 + \psi_2) \psi'_3;$$

e tenendo presenti tali formule, costruiscasi l'espressione del secondo coefficiente F della prima forma quadratica differenziale della superficie.

Si ha successivamente:

$$\begin{aligned} F &= S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = S \left[(\varphi_3 + \psi_3) \varphi'_2 - (\varphi_2 + \psi_2) \varphi'_3 \right] - (\varphi_3 + \psi_3) \psi'_2 + (\varphi_2 + \psi_2) \psi'_3 \left[\right] = \\ &= S \left[\left\{ \zeta' \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right\} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right] = \\ &= S \zeta \eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) - S \left[\zeta^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} + \eta^2 \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right]. \end{aligned}$$

Se si sviluppano le somme indicate e si aggruppano convenientemente i termini si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} F &= S \left[\zeta \frac{\partial \xi}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} S \xi^2 - \xi^2 \right) \right] + S \left[\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} (S \xi^2 - \xi^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial u} S \xi \frac{\partial \xi}{\partial v} + \rho S \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Allora, siccome per $v = v_0$ è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

lungo tale linea si ha:

$$F_{v=v_0} = \rho S \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Noi ci proponiamo di dimostrare che se la superficie è rigata ed ha più di una asintotica a torsione costante è anche, lungo tali asintotiche:

$$S \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$$

e questa circostanza ci farà trarre una conclusione abbastanza interessante per il nostro studio.

8. Invero, se la superficie è rigata, in ordine a quanto avanti si è dimostrato, le tre funzioni ξ , η , ζ sono rispettivamente del tipo:

$$\begin{aligned} \xi &= k_1 \varphi + \psi_1 & (k_1, k_2, k_3 = \text{costanti}) \\ \eta &= k_2 \varphi + \psi_2 & \varphi = \varphi(v) \\ \zeta &= k_3 \varphi + \psi_3; & \psi_1 = \psi_1(u), \quad \psi_2 = \psi_2(u), \quad \psi_3 = \psi_3(u), \end{aligned}$$

onde l'equazione :

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

scrivesi :

$$S(k_1 \varphi + \psi_1) \psi'_1 = 0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\varphi S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0.$$

Se ora supponesi che la superficie rigata che si considera ammetta due asintotiche curvilinee a torsione costante :

$$v = v_1, \quad v = v_2$$

l'ultima equazione scritta deve essere soddisfatta, qualunque sia u , per tali valori di v , onde si avrà :

$$\varphi(v_1) S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0$$

$$\varphi(v_2) S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0$$

e da queste relazioni deducesi per sottrazione l'altra :

$$\left\{ \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \right\} S k_1 \psi'_1 = 0$$

per cui dovrà essere

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$$

oppure

$$S k_1 \psi'_1 = 0.$$

Ora non è possibile che sia :

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$$

perchè in tal caso le espressioni di ξ , η , ζ mostrano che lungo una generatrice generica, per es. lungo la $u = u_2$, nei punti $v = v_1$, $v = v_2$ le normali alle superficie sono parallele, cosa manifestamente assurda per una superficie rigata gobba. Sarà dunque :

$$S k_1 \psi'_1 = 0.$$

Ora nel caso in esame è :

$$S \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = S \varphi' k_1 \psi'_1 = \varphi' S k_1 \psi'_1 = 0. \quad \text{c. d. d.}$$

Ciò porta a concludere che lungo le due asintotiche a torsione costante che si ammette esistano sulle superficie è costantemente:

$$F = 0;$$

cioè queste asintotiche sono traiettorie ortogonali delle generatrici le quali sono perciò le loro normali principali. Tali linee, in ordine a teoremi noti, sono allora due curve di BERTRAND (7) le quali, essendo a torsione costante (uguale o no), saranno pure a flessione costante, saranno cioè due eliche circolari e pertanto concludesi ora che l'unica superficie rigata con due asintotiche a torsione costante che fornisce il caso $M = 0$ è l'elicoide rigata d'area minima.

§ 4.

$$\text{IL CASO } M = \frac{2}{(u+v)^2}.$$

9. Al n. 5 abbiamo visto che in questo caso è.

$$\xi = U' - \frac{2U}{u+v}, \quad \eta = V' - \frac{2V}{u+v}, \quad \zeta = W' - \frac{2W}{u+v}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \rho &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \\ &= (U'^2 + V'^2 + W'^2) + 4 \frac{(U^2 + V^2 + W^2)}{(u+v)^2} - 4 \frac{U U' + V V' + W W'}{u+v} \end{aligned}$$

onde se ponesi:

$$S U^2 = U^2 + V^2 + W^2 = \varphi(u)$$

$$S U'^2 = U'^2 + V'^2 + W'^2 = \psi(u)$$

si ha:

$$\rho = \psi + \frac{4\varphi}{(u+v)^2} - \frac{2\varphi'}{u+v} \quad (2)$$

e l'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

scrivesi in questo caso:

$$\psi' + \frac{4\varphi'}{(u+v)^2} - \frac{8\varphi}{(u+v)^3} + \frac{2\varphi'}{(u+v)^2} - \frac{2\varphi''}{(u+v)} = 0$$

od anche:

$$\psi'(u+v)^3 - 2\varphi''(u+v)^2 + 6\varphi'(u+v) - 8\varphi = 0,$$

equazione che noi vogliamo studiare.

Avendo una equazione di tale tipo nella incognita v può presentarsi soltanto uno dei seguenti cinque casi:

1.º) Le tre radici sono tutte funzioni di u : non esiste allora sulla superficie rigata alcuna asintotica curvilinea a torsione costante.

2.º) Una delle tre radici è costante, le altre due sono funzioni di u : sulla rigata esiste una asintotica curvilinea a torsione costante.

3.º) Due delle radici sono costanti, la terza è funzione di u : la superficie ammette due asintotiche curvilinee a torsione costante.

4.º) Le tre radici sono tutte costanti: la rigata ammette tre asintotiche curvilinee a torsione costante.

5.º) L'equazione è una identità: tutte le asintotiche curvilinee della rigata sono a torsione costante.

Noi passiamo ad esaminare i singoli casi e mostriamo che l'unico da considerare è il caso 3.º), gli altri non offrendo interesse alcuno dal punto di vista da cui questo studio è condotto.

10. Intanto dimostriamo che l'ultimo caso non può mai accadere.

Invero se si ordina l'equazione trovata rispetto a v e si annullano i coefficienti ottiensì successivamente:

$$\psi' = 0, \quad \varphi'' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \varphi = 0$$

onde dalla espressione (2) trovata di ρ trarrebbe

$$\rho = \text{costante}$$

cosa manifestamente assurda per una superficie rigata propriamente detta. Allora ricordando quanto si è detto al § 3 possiamo concludere:

L'unica superficie rigata di cui tutte le asintotiche curvilinee siano a torsione costante è l'elicoide rigata d'area minima.

In altro lavoro noi avremo occasione di ritrovare per altra via tale risultato.

11. Mostriamo ancora che il quarto caso conduce a superficie rigate con una sola asintotica a torsione costante.

Infatti se l'equazione:

$$\psi'(u+v)^3 - 2\varphi''(u+v)^2 + 6\varphi'(u+v) - 8\varphi = 0 \quad (3)$$

o l'altra equivalente:

$$\begin{aligned} \psi'v^3 + \left\{ 3u\psi' - 2\varphi'' \right\} v^2 + \left\{ 3u^2\psi' - 4u\varphi'' + 6\varphi' \right\} v + \\ + \left\{ \psi'u^3 - 2\varphi''u^2 + 6\varphi'u - 8\varphi \right\} = 0 \end{aligned}$$

ha le sue tre radici costanti, indicando con a, b, c tre costanti deve aversi:

$$3u - 2\frac{\varphi''}{\psi'} = a$$

$$3u^2 - 4u\frac{\varphi''}{\psi'} + 6\frac{\varphi'}{\psi'} = b$$

$$u^3 - 2u^2\frac{\varphi''}{\psi'} + 6u\frac{\varphi'}{\psi'} - 8\frac{\varphi}{\psi'} = c.$$

Pongasi allora:

$$\frac{\varphi''}{\psi'} = A, \quad \frac{\varphi'}{\psi'} = B, \quad \frac{\varphi}{\psi'} = C$$

e si consideri il sistema lineare:

$$-2A = a - 3u$$

$$6B - 4uA = b - 3u^2$$

$$-8C + 6uB - 2u^2A = c - u^3$$

il quale fornisce:

$$A = \frac{3u - a}{2},$$

$$B = \frac{1}{6} \left\{ 3u^2 - 2ua + b \right\},$$

$$C = \frac{1}{8} \left\{ u^3 - au^2 + bu - c \right\}.$$

Deducesi allora :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{B}{C} = \frac{8(3u^2 - 2ua + b)}{6(u^3 - au^2 + bu - c)}$$

talmente che posto :

$$\omega = \omega(u) = u^3 - au^2 + bu - c$$

è :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{4}{3} \frac{\omega'}{\omega}$$

e perciò integrando ottiensì :

$$\varphi(u) = k \omega^{\frac{4}{3}} = k \omega \sqrt[3]{\omega} \quad (4)$$

k essendo una costante positiva.

Ma si ha ancora :

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{B}{A} = \frac{3u^2 - 2ua + b}{3(3u - a)};$$

mentre che l'espressione ora trovata di φ fornisce :

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{\frac{4}{3} k \omega^{\frac{1}{3}} \omega'}{\frac{4}{9} k \omega^{-\frac{2}{3}} \omega'^2 + \frac{4}{3} k \omega^{\frac{1}{3}} \omega''} = \frac{\omega \omega'}{\frac{1}{3} \omega'^2 + \omega \omega''}$$

e quindi uguagliando i due valori si deduce facilmente che le costanti a , b , c devono essere vincolate dalle relazioni :

$$3b - a^2 = 0,$$

$$-9c + ab = 0,$$

$$h^2 - 3ac = 0,$$

onde posto

$$c = \alpha^3$$

si ha :

$$b = 3\alpha^2, \quad a = 3\alpha$$

e perciò sostituendo in (4)

$$\varphi = k(u - \alpha)^4$$

$$\psi' = \frac{2\varphi''}{3(u - \alpha)}; \quad \psi = 4k(u - \alpha)^3 + \text{costante}.$$

L'equazione (3) diventa allora:

$$\psi'(v + \alpha)^3 = 0$$

e le sue tre radici coincidono col valore $-\alpha$.

Siccome non è il caso di parlare di linee asintotiche multiple si conclude che l'ipotesi 4) conduce a rigate con una sola asintotica a torsione costante. c. d. d.

12. Tuttavia vogliamo osservare esplicitamente che questo caso è nettamente distinto da quello in cui l'equazione (3) ha una sola radice costante, perchè mentre in questa ultima ipotesi l'asintotica curvilinea a torsione costante che corrisponde a tale radice è generica, nel caso in esame invece si può dimostrare che l'asintotica curvilinea a torsione costante è la linea di stringimento della superficie.

Ricerchisi infatti il valore di v per cui lungo una linea $u = \text{cost.}$ è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Si ha l'equazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = -8\varphi(u + v)^{-3} + 4\varphi'(u + v)^{-2} = 0$$

e ricordando l'espressione di φ subito deducesi:

$$v = -\alpha.$$

Siccome risulta che tale valore dà il minimo di ρ e quindi il massimo del valore assoluto della curvatura totale K della superficie, deducesi che lungo ogni generatrice il punto $v = -\alpha$ è il suo punto centrale e ciò prova appunto che l'asintotica a torsione costante, luogo di tali punti, è la linea di stringimento della superficie. c. d. d.

13. Il caso 1) non ha alcun interesse; il caso 2) non viene qui studiato per le ragioni addotte nella introduzione.

Rimane da esaminare il caso 3).

In tale caso le due asintotiche a torsione costante della rigata possono avere la torsione diversa ovvero uguale.

Noi dedichiamo l'ultima parte di questa Memoria alle superficie rigate con due asintotiche a torsione costante ed uguale (rigate Γ) riservandoci di tornare altrove sull'altro caso possibile.

Ritroveremo in un modo rapido molte delle proprietà che ho già fatto conoscere ed altre nuove delle rigate Γ .

§ 5.

LE RIGATE Γ .

14. Una superficie rigata dicesi una *rigata* Γ quando ammette due asintotiche curvilinee a torsione costante ed uguale.

Noi abbiamo già studiato altrove queste notevoli superficie; qui, col metodo esposto, le determineremo nuovamente e ritroveremo insieme ad altre nuove, talune loro proprietà.

Sostituendo ad una tale superficie rigata una superficie omotetica, potrà suppersi, senza restrizioni di sorta, che lungo la asintotica a torsione costante sia:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ovvero, con le notazioni precedenti:

$$(\psi - 1)(u + v)^2 - 2\varphi'(u + v) + 4\varphi = 0$$

essendo:

$$\varphi = \varphi(u) = S U^2,$$

$$\psi = \psi(u) = S U'^2.$$

L'equazione precedente, risolta rispetto a v , deve fornire due valori costanti, onde deve essere:

$$u - \frac{\varphi'}{\psi - 1} = a;$$

$$\frac{4\varphi}{\psi - 1} - \frac{2\varphi'}{\psi - 1}u + u^2 = b$$

a e b essendo due costanti.

Dalla prima di queste relazioni deducesi

$$\frac{1}{\psi - 1} = \frac{u - a}{\varphi'}$$

e quindi la seconda fornisce:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = 2 \frac{2(u - a)}{u^2 - 2ua + b}.$$

Posto:

$$\omega = \omega(u) = u^2 - 2ua + b$$

si ha

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = 2 \frac{\omega'}{\omega}$$

la quale equazione integrata dà:

$$\varphi = k \omega^2, \quad k = \text{costante.}$$

Allora, per quanto precede, è anche

$$\psi = 4k\omega + 1.$$

15. Se indichiamo con v_1 e v_2 le radici della equazione:

$$v^2 + 2av + b = \omega$$

le asintotiche C_1 e C_2 a torsione costante della nostra rigata Γ sono definite, in ordine alle formule di GOURSAT, dalle due seguenti terne di formule:

$$x_1 = (VW' - WV') \frac{2}{u + v_1} - \int (V'W'' - W'V'') du$$

$$y_1 = (WU' - UW') \frac{2}{u + v_1} - \int (W'U'' - U'W'') du$$

$$z_1 = (UV' - VU') \frac{2}{u + v_1} - \int (U'V'' - V'U'') du;$$

$$x_2 = (VW' - WV') \frac{2}{u + v_2} - \int (V'W'' - W'V'') du$$

$$y_2 = (WU' - UW') \frac{2}{u + v_2} - \int (W'U'' - U'W'') du$$

$$z_2 = (UV' - VU') \frac{2}{u + v_2} - \int (U'V'' - V'U'') du.$$

16. Per ritrovare una notevole proprietà calcoliamo la distanza t di due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ corrispondenti (situati sopra una medesima generatrice) sulle due asintotiche C_1 e C_2 definite dalle formule precedenti.

Si ha, per le espressioni già date di φ e ψ , ed essendo $\varepsilon = \pm 1$:

$$\begin{aligned} t^2 &= S(x_2 - x_1)^2 = S \left\{ v w' - w v' \right\}^2 \frac{(v_2 - v_1)^2}{(u^2 - 2 u a + b)^2} = \\ &= \left\{ \frac{\varepsilon \sqrt{a^2 - b}}{\omega} \right\}^2 \cdot \left\{ \varphi \psi - \frac{1}{4} \varphi'^2 \right\} = \\ &= 16(a^2 - b) \left\{ 4k^2(b - a^2) - k \right\} = \\ &= 16k(a^2 - b) \left\{ 4k(b - a^2) - 1 \right\} = \text{costante}, \end{aligned}$$

talmente che ancora qui risulta una ben nota ed importante proprietà delle curve a torsione costante vincolate da una trasformazione asintotica.

Se si indica con D il discriminante della equazione

$$v^2 + 2av + b = 0$$

è:

$$D = 4(a^2 - b)$$

e

$$t^2 = -4kD(kD + 1).$$

Volendo che sia:

$$t^2 \geq 0$$

bisognerà fare in modo che sia:

$$kD \leq 0, \quad kD + 1 \geq 0; \quad a^2 \geq -\frac{1}{4k} + b.$$

Deducesi inoltre facilmente:

$$|t_{m-s}| = 1$$

e ciò in perfetto accordo con la teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND delle curve a torsione costante.

Per quel che sarà ancora esposto non è necessario nemmeno supporre che le costanti a e b siano scelte in modo da aversi:

$$t^2 \geq 0,$$

le considerazioni che faremo essendo valide indifferentemente per superficie reali od immaginarie.

17. Anche col metodo attuale risulta subito il teorema, altrove dimostrato:

Si possono determinare quante si vogliano rigate Γ dipendentemente dai valori di una funzione arbitraria di una variabile.

Infatti le tre funzioni $U(u)$, $V(u)$, $W(u)$, arbitrarie per una superficie rigata generica, per una rigata Γ sono vincolate soltanto dalle relazioni già scritte:

$$U^2 + V^2 + W^2 = \varphi$$

$$U'^2 + V'^2 + W'^2 = \psi = 4\sqrt{\varphi} + 1$$

onde evidentemente potrà assegnarsi ad arbitrio una delle tre funzioni U , V , W , dopo di che le altre restano pienamente determinate dalle precedenti equazioni.

18. Considerisi la curva C_0 luogo del punto di mezzo $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ della congiungente due punti corrispondenti

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$$

delle asintotiche C_1 e C_2 a torsione costante.

Si ha:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Poniamo le coordinate del punto generico di C_0 sotto la forma (1) del § 1; facilmente si trova che lungo C_0 deve essere:

$$\frac{2}{u+v} = \frac{2(u-a)}{u^2 - 2ua + b} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi}$$

ovvero anche:

$$v = \frac{b - ua}{u - a}.$$

Convorrà tener presente tale risultato in vista di una conseguenza che ne dedurremo; intanto ce ne serviremo per dimostrare che la curva C_0 è la linea di stringimento della superficie.

Invero, fissata una generatrice $u = \text{cost.}$, anche qui, come al n. 12, costruiscasi la condizione

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0;$$

si ottiene per v precisamente il valore

$$v = \frac{b - u a}{u - a},$$

e come effettivamente tale valore corrisponde ad un massimo per il valore assoluto della curvatura $K = -\frac{1}{\rho^2}$ risulta appunto che la curva C_0 è il luogo dei punti centrali delle genetratrici della rigata e quindi anche qui il teorema:

La linea di stringimento di una rigata Γ è il luogo del punto di mezzo del segmento che le sue asintotiche a torsione costante intercettano sulle generatrici.

Da tale risultato deducesi poi subito che

Le due asintotiche a torsione costante di una rigata Γ si corrispondono anche per uguaglianza d'arco.

§ 6.

TEOREMI AUSILIARÎ.

LINEA FLECNODALE DI UNA SUPERFICIE RIGATA.

19. Chiamasi *punto flecnodale* di una superficie rigata un punto tale che per esso possa condursi una tangente alla superficie che abbia con questa un contatto del terzo ordine o, come dicesi, un contatto quadripunto (*tangente flecnodale*).

Il luogo dei punti flecnodali di una superficie è una linea che dicesi la *linea flecnodale* delle superficie ed il luogo delle tangenti flecnodali ad una superficie è una superficie rigata che dicesi la *rigata flecnodale* della superficie data (*).

Una tangente flecnodale non è, in generale, tangente della curva flecnodale, ma essa tocca manifestamente una delle asintotiche passanti per il punto flecnodale da cui parte.

Tale asintotica ha, in questo punto, indeterminato il suo piano osculatore; cioè nel punto flecnodale si verificano le proporzioni:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\frac{\partial z}{\partial u}}.$$

Le tre funzioni arbitrarie U, V, W che, mediante le formule di GOURSAT, servono a definire una superficie rigata, soddisfano manifestamente ad una equazione del tipo:

$$\Phi''' = p \Phi'' + q \Phi' + r \Phi$$

p, q, r essendo, come U, V, W , tre funzioni di u .

Tenendo conto di tale equazione si calcolino, per mezzo delle formule di GOURSAT, le derivate seconde $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; facilmente si trova p. es.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left(p - \frac{2}{u+v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - \left(\frac{p}{u+v} + r \frac{u+v}{2} + q \right) \frac{\partial x}{\partial v}$$

ed analogamente circolando per le altre due derivate.

Le proporzioni avanti scritte dimostrano allora che in un punto flecnodale si ha:

$$\frac{p}{u+v} + r \frac{u+v}{2} + q = 0$$

cioè:

$$r(u+v)^2 + 2q(u+v) + 2p = 0. \quad (5)$$

Questa equazione per ogni valore di u fornisce due valori di v onde concludesi:

Su ogni generatrice di una superficie rigata esistono due punti flecnodali.

La linea flecnodale di una superficie rigata componesi pertanto di due rami: diremo con TZITZEICA che sopra una superficie rigata esistono due linee flecnodali (*). Si osservi ancora qui che se il valore scelto di u annulla la funzione p la medesima equazione mostra che per un valore di v è

$$u + v = 0$$

e allora le formule di GOURSAT esprimono che il corrispondente punto flecnodale è un punto improprio.

Se contemporaneamente si ha poi, per il valore scelto di u :

$$p(u) = 0 \quad q(u) = 0$$

i due punti flecnodali sono entrambi impropri.

§ 7.

RIGATE Γ SPECIALI.

20. Nel caso che la superficie che si considera sia una rigata Γ , abbiamo visto essere:

$$\left. \begin{aligned} S U^2 = \varphi(u) &= k(u^2 - 2ua + b)^2 \\ S U'^2 = \psi(u) &= 4k(u^2 - 2ua + b) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Per derivazione da queste due uguaglianze facilmente deducesi

$$U U'' + V V'' + W W'' = 0.$$

L'equazione:

$$\Phi''' = p \Phi'' + q \Phi' + r \Phi$$

di cui U, V, W sono tre integrali porta allora alla relazione

$$p S U U'' + q S U U' + 2 S U^2 = 0$$

e quindi concludiamo che per ogni rigata Γ deve essere soddisfatta la relazione:

$$p(\varphi'' - 2\psi) + q\varphi' + 2r\varphi = 0. \quad (7)$$

21. Fra le rigate Γ ne esistono talune che meritano speciale attenzione.

Oltre alle condizioni (6) imponiamo alle funzioni U, V, W la nuova condizione:

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ U'' & V'' & W'' \end{vmatrix} = 0$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\frac{d}{du} \Delta = 0$$

indicando con Δ il Wronskiano delle funzioni U, V, W .

Tali funzioni restano allora pienamente determinate ed in questo caso si riconosce che è

$$p = 0$$

la quale circostanza dimostra, che per le rigate Γ che in tal modo definiti sconsi, una delle linee flecnodali è allontanata a distanza infinita.

Di più notisi che la relazione (7) trovata nel numero precedente scrivesi in questo caso:

$$q \varphi' + 2r \varphi = 0$$

ossia:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -2 \frac{r}{q} = 2 \frac{2(u-a)}{u^2 - 2ua + b};$$

ora per la (5) lungo la linea flecnodale a distanza finita si ha:

$$\frac{2}{u+v} = -\frac{r}{q} = +\frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi}$$

e siccome lo stesso avviene (cfr. n. 18) lungo la linea di stringimento, chiamando con Γ_0 una rigata di questa classe particolare, possiamo dire che:

La linea di stringimento di una rigata Γ_0 è anche una delle linee flecnodali,

o altrimenti:

La superficie flecnodale di una rigata Γ_0 è il luogo delle tangenti alle asintotiche curvilinee nei punti in cui sono secate dalla linea di stringimento.

Osserviamo infine che la condizione

$$\frac{d}{du} \Delta = 0$$

è caratteristica per le rigate Γ che hanno una linea flecnodale a distanza infinita (rigate Γ_0).

NOTE

(¹) Cfr. P. TORTORICI, *Intorno ad una classe di superficie rigate* [Annali di Matematica pura, tomo XXV].

(²) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*. 2.^a ediz. (Pisa, Spoerri, 1902-1907), Vol. I, pag. 162.

(³) Cfr. G. TZITZEICA, *Sur certaines courbes gauches*. Annales de l'École Normale Supérieure, 1907.

(⁴) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (²), pag. 116.

(⁵) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (²), pag. 165.

(⁶) Cfr. G. TZITZEICA, loc. cit. (³).

(⁷) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (²), pag. 50.

(⁸) Cfr. E. J. WILCZINSKY, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* [Teubner, Leipzig].

(⁹) Cfr. G. TZITZEICA, loc. cit. (³).