INTÉGRALES PASSANT PAR UN POINT SINGULIER D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Par M. **Henri Dulac** (Alger).

Adunanza del 22 marzo 1908.

1. Objet et résumé du présent travail. — En se servant des résultats bien connus, obtenus dans l'étude de l'équation

$$(1) \quad (x + \dots) \frac{dy}{dx} = \lambda y + \dots,$$

où on n'écrit que les termes du premier degré, on montre que dans certains cas, x peut tendre vers 0 de telle façon que y tende aussi vers 0 et que $y:x = t$ ne tende vers aucune limite. Il y a lieu de se demander s'il en est de même pour l'équation

$$(2) \quad Y(x, y)dy + X(x, y)dx = 0,$$

où X et Y sont des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, équation que nous écrirons

$$(2') \quad [Y_n(x, y) + \dots]dy + [X_n(x, y) + \dots]dx = 0$$

en mettant en évidence les termes de degré minimum n en x et en y . Cette question présente d'autant plus d'intérêt que, dès que n est supérieur à 1, on ne connaît pas, en général, de relation donnant, dans le voisinage de $x = y = 0$, l'intégrale générale de (2) et que, même lorsqu'on connaît une pareille relation, elle met difficilement en évidence les propriétés des intégrales. De plus, les méthodes habituellement employées dans l'étude des intégrales de (2), pour lesquelles y tend vers 0 avec x , considèrent exclusivement les intégrales pour lesquelles t tend vers une limite. Il est donc naturel de se demander si l'on obtient ainsi toutes les intégrales. Il n'en est rien: *en général, il y a une infinité d'intégrales telles que x tendant vers 0 d'une façon convenable, y tende vers 0, tandis que t ne tend vers aucune limite finie ou infinie.* Cette propriété est bien connue dans des cas particuliers. Par exemple, l'équation $x^2 y' = iy + xy$ a comme intégrale $y = Cx e^{-\frac{i}{x}}$; quand x tend vers 0 par valeurs réelles y tend vers 0 et $y:x$ est indéterminé. Mais on peut être tenté de croire que cette particularité ne se produit que pour des équations analogues à l'équation citée et présentant des singularités d'un caractère assez exceptionnel, tandis qu'elle se présente, en général, pour un point singulier quelconque.

Nous nous bornerons à examiner le cas où l'intégrale générale de l'équation

$$Y_n(x, y)dy + X_n(x, y)dx = 0$$

obtenue en ne considérant dans (2) que les termes de moindre degré peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad x^\mu \prod_{i=1}^{i=p} (y - a_i x)^{\mu_i} = \text{const.},$$

les a_i , les μ_i et μ étant des constantes. Ce cas que nous nous bornons à examiner est le cas général, qui se présente si X_n et Y_n sont quelconques; on a alors $\mu = 0$, $p = n + 1$. En prenant $p < n + 1$, nous pouvons considérer des classes importantes de cas particuliers. Si $x = 0$, $y = 0$ est un point dicritique de (2), on a

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = 0;$$

dans tous les autres cas, on peut supposer, comme nous le ferons, cette somme égale à 1.

Nous nous servirons des deux formes suivantes que, dans certains cas particuliers, peut prendre l'intégrale générale de l'équation (2)

$$(f) \quad x^\lambda e^{h(x,y)} \prod_{i=1}^{i=q} [y + \varphi_i(x)]^{\lambda_i} = \text{const.},$$

$$(L) \quad x[1 + xL_1 + x^2L_2 + \dots] \prod_{i=1}^{i=p} (t - a_i)^{\mu_i} = \text{const.}$$

Dans (L) nous supposons que $L_1, L_2, \dots$ sont des fractions rationnelles en $t = y : x$. Dans (f), les φ_i sont des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x = 0$; $h(x, y)$ est une série entière en x et y ; λ_i et λ sont des constantes, la dernière pouvant être nulle.

Le nombre q est en général égal à $n + 1$, mais il peut être plus grand ou plus petit. Lorsque la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ ne sera pas nulle, nous la supposons égale à 1, comme nous avons toujours le droit de le faire. Nous n'aurons besoin, sauf avis contraire, que de supposer l'existence formelle des développements (h) et (L), sans supposer leur convergence.

Entre ces deux formes d'intégrale, on a les relations suivantes: Si (f) existe et que $x = 0$, $y = 0$ ne soit pas un point dicritique, (L) existe (n° 4). Si (L) existe, si $yY_n + xX_n$ n'admet pas de facteur multiple et si aucun des exposants μ_i n'est un nombre rationnel et négatif, (f) existe (n° 5).

Pour plus de netteté, lorsque nous considérerons les valeurs d'une intégrale y pour des valeurs de x tendant vers 0 suivant un chemin déterminé (pouvant tourner autour de $x = 0$), nous dirons que nous considérons une *caractéristique* de (2). Nous ne parlerons d'intégrale y tendant vers 0 avec x que si y tend vers 0 quelle que soit la façon dont x tend vers 0. Les théorèmes suivants que nous démontrerons dans le n° indiqué à la suite de chacun d'eux se rapportent exclusivement aux caractéristiques ou intégrales pour lesquelles y tend vers 0 avec x .

I. Si, comme c'est le cas général, l'équation (2) n'admet pas d'intégrale de la forme

(L), il y a une infinité de caractéristiques pour lesquelles t ne tend vers aucune limite, tandis que x et y tendent vers 0 de telle manière que leurs arguments restent finis (11).

II. Si l'équation admet une intégrale de la forme (f) , si la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ n'est pas nulle et si les exposants μ_i ne sont pas tous réels, il y a une infinité de caractéristiques pour lesquelles t ne tend vers aucune limite [(12) et (13)].

III. Si, les deux premières hypothèses de (II) subsistant, on suppose que les μ_i sont tous réels, tandis que les λ_i ne le sont pas tous, on peut généraliser les résultats de (II) en disant: il existe, en général, un ou plusieurs polynômes $P(x)$ auxquels correspondent des nombres r supérieurs d'au moins une unité à leur degré et tels que, si l'on considère le rapport $v = [y - P(x)] : x'$, il existe une infinité de caractéristiques pour lesquelles v ne tend vers aucune limite [(15) et (16)].

IV. Si l'équation admet une intégrale de la forme (f) , si les exposants λ, λ_i sont tous réels et ne sont pas tous positifs, si de plus leur somme n'est pas nulle et si on désigne par $y = a_i x$ la tangente à l'origine à l'intégrale holomorphe $y + \varphi_i(x) = 0$, de la relation (f) , t tend nécessairement vers une limite qui est un des nombres a_i (17). Les seules caractéristiques pour lesquelles y tend vers 0 avec x sont fournies par des intégrales, pour lesquelles y tend vers 0 quelle que soit la façon dont x tend vers 0. Si l'exposant λ_i est négatif, il y a une infinité d'intégrales tangentes à l'origine à $y = a_i x$. Si λ_j est positif et si a_j est différent des autres nombres a_i , l'intégrale $y + \varphi_j(x) = 0$ est la seule intégrale tangente à $y = a_j x$ (18).

V. Dans les deux cas suivants: 1° l'équation (2) admet $x = 0, y = 0$ comme point dicritique, 2° $x = 0, y = 0$ n'étant pas un point dicritique, l'équation (2) admet une intégrale générale de la forme (f) , où la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ est nulle, t tend toujours vers une limite. Dans le premier cas cette limite peut être quelconque et, sauf des cas très particuliers, les caractéristiques pour lesquelles x et y tendent vers 0 sont fournies par des intégrales pour lesquelles y tend vers 0, quelle que soit la façon dont x tend vers 0 (21). Dans le second cas, t ne peut tendre que vers un certain nombre de valeurs qu'on obtient facilement en se servant de la relation (f) et les caractéristiques passant par l'origine sont fournies par des intégrales pour lesquelles y tend vers 0 avec x (24).

VI. La non existence d'une limite vers laquelle tende le rapport t n'est pas la seule singularité que puissent présenter les caractéristiques. En particulier, l'équation admettant une intégrale (f) et la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ n'étant pas nulle, s'il y a une intégrale $y + \varphi_i(x) = 0$, et une seule, tangente à la droite $y = 0$ et si l'exposant λ_i est un nombre complexe, il existe une infinité de caractéristiques telles que ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, $y : x$ tende vers 0, tandis que $y : x^{1+\varepsilon}$ croît indéfiniment (19).

2. *Délimitation des cas examinés.* — Considérons l'équation (2) et posons $y = tx$. L'équation devient

$$(4) \quad x[Y_n(1, t) + \dots]dt + [tY_n(1, t) + X_n(1, t) + \dots]dx = 0.$$

Les termes non écrits sont des puissances de x dont les coefficients sont des po-

lynômes en t . Si nous réduisons l'équation (4) aux termes qui sont écrits, nous obtenons

$$(5) \quad x Y_n(1, t) dt + [t Y_n(1, t) + X_n(1, t)] dx = 0.$$

Supposons que le polynôme $t Y_n(1, t) + X_n(1, t)$ ne soit pas identiquement nul. Nous supposons de plus qu'après avoir simplifié le quotient $Y_n : (t Y_n + X_n)$ par la suppression des facteurs communs, le dénominateur n'admette plus que des racines simples que nous désignerons par $a_1, a_2, \dots, a_p$. Nous avons donc après simplification ¹⁾

$$\frac{Y_n(1, t)}{t Y_n(1, t) + X_n(1, t)} = \frac{l(t)}{v} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\mu_i}{t - a_i},$$

en posant

$$v = (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_p).$$

On voit que, si nous posons

$$(6) \quad u = (t - a_1)^{\mu_1} (t - a_2)^{\mu_2} \dots (t - a_p)^{\mu_p},$$

l'intégrale générale de l'équation (5) peut s'écrire $xu = \text{const.}$, ou

$$(7) \quad x^\mu (y - a_1 x)^{\mu_1} (y - a_2 x)^{\mu_2} \dots (y - a_p x)^{\mu_p} = \text{const.}$$

et nous avons

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = 1.$$

μ peut être nul.

Réciproquement, si l'équation (5) admet une intégrale de cette forme, si la somme des exposants μ n'est pas nulle et si le dénominateur du quotient $Y_n : (t Y_n + X_n)$ n'est pas identiquement nul, ce dénominateur ne contiendra, après simplification, que des facteurs simples.

Si le polynôme $t Y_n + X_n$ est identiquement nul, le point $x = 0, y = 0$ est ce qu'on a appelé un *point dicritique*.

L'intégrale générale de (5) étant $t = \text{constante}$, on peut dire qu'elle est encore représentée par l'égalité (7) où $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont des nombres quelconques et où les exposants μ sont assujettis à la seule condition

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = 0.$$

Réciproquement, s'il en est ainsi, on vérifie immédiatement que $x = 0, y = 0$ est un point dicritique de (2).

Nous n'examinerons dans la suite que les cas où l'équation (5) admet une intégrale de la forme (3). Nous excluons par conséquent de nos recherches toutes les équations (2) pour lesquelles $t Y_n + X_n$ admet une racine d'ordre α sans que cette racine soit racine d'ordre $\alpha - 1$ de Y_n . On voit que les cas que nous examinons comprennent, en dehors de divers cas particuliers, le *cas général* où les polynômes $Y_n(x, y)$ et $X_n(x, y)$ n'ont entre eux aucune relation, de telle sorte que $t Y_n + X_n$ n'a pas de racine infinie et n'a que des racines simples qui ne sont pas racines de $Y_n(1, t)$. Dans ce cas général, on a $\mu = 0, p = n + 1$.

¹⁾ Nous supposons le numérateur d'un degré inférieur au dénominateur, comme cela a lieu en général.

Les cas que nous laissons de côté sont des cas exceptionnels pour lesquels subsistent des propriétés analogues à celles que nous établirons, mais leur démonstration nous obligerait à modifier nos raisonnements.

Les cas que nous examinons comprennent deux catégories: 1° les cas où la somme des exposants μ n'est pas nulle, nous pouvons toujours alors la supposer égale à 1; 2° les cas où la somme des exposants μ est nulle.

3. *Sur deux formes de l'intégrale générale.* — Nous savons ²⁾ que, dans certains cas, l'intégrale générale de (2) peut se mettre sous la forme

$$(8) \quad f \equiv x^\lambda e^{h(x,y)} \prod_{i=1}^{i=q} [y + \varphi_i(x)]^{\lambda_i} = \text{const.}$$

Les φ_i sont des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x = 0$; $h(x, y)$ est une série entière en x et y que l'on peut supposer sans terme constant. J'ai démontré, tout au moins dans le cas général où $q = n + 1$, que, si les rapports des exposants λ, λ_i ne sont pas tous positifs, le développement $h(x, y)$ est convergent si x et y sont suffisamment petits. Dans ce qui suivra nous ne supposons pas, sauf avis contraire, la convergence de $h(x, y)$.

Ainsi que nous le verrons dans la suite, nous aurons des propriétés bien distinctes suivant que la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ des exposants sera nulle ou non. Si elle n'est pas nulle, nous pourrions la supposer égale à 1, c'est ce que nous ferons.

Nous verrons dans la suite que, tout au moins dans certains cas, l'intégrale de l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(9) \quad L \equiv x u [1 + x L_1 + x^2 L_2 + \dots] = \text{const.},$$

où u a la valeur (6) et où $L_1, L_2, \dots$ sont des fractions rationnelles en t ($t = y : x$). Le dénominateur de ces fractions ne contient que des puissances des facteurs $t - a_i$. Nous ne nous préoccupons pas de la convergence de L ; il nous suffira de supposer qu'il existe formellement. En ne supposant pas la convergence de h et de L , nous nous affranchissons de restrictions inutiles pour la démonstration des propriétés que nous voulons considérer, mais nous serons parfois obligés de donner des démonstrations plus compliquées que s'il s'agissait de développements convergents.

Dans ce qui va suivre, nous allons d'abord étudier les relations qui existent entre les deux formes d'intégrale. Il pourra sembler que cette recherche n'est pas indispensable pour démontrer les propriétés que nous avons en vue. Elle me paraît cependant utile pour la clarté des idées et, de plus, nous aurions été obligés de refaire à d'autres propos, la plupart des démonstrations que nous rencontrerons dans cette recherche.

Nous laisserons de côté, dans la comparaison des deux formes d'intégrales, le cas

²⁾ a) *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* [Journal de l'École Polytechnique, 2^e série, IX^e cahier (1904), pp. 1-125], p. 93; b) *Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier* [Annales de l'Université de Grenoble, t. XVII (1905), pp. 1-51], p. 24.

Dans ces mémoires, j'ai supposé $\mu = 0$ et $q = n + 1$, mais il est facile de montrer par des exemples que q peut être supérieur ou inférieur à $n + 1$. Je me propose de revenir ailleurs sur ce sujet.

particulier où la somme: $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_g$ est nulle, qui nous obligerait à modifier légèrement la forme (L) d'intégrale, ainsi que nos raisonnements.

Pour rechercher quelles relations il y a entre les deux formes d'intégrale, prenons comme intermédiaire la forme que l'on obtient en remplaçant, dans (f), y par tx .

Nous avons

$$(10) \quad F \equiv x P e^{H(x,t)} = \text{const.},$$

en posant

$$(11) \quad P = \prod_{i=1}^{i=g} \left[t + \frac{\varphi_i(x)}{x} \right]^{\lambda_i}, \quad H(x, t) = h(x, tx);$$

f et F vérifient respectivement les équations

$$(12) \quad Y(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} - X(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(13) \quad x \bar{Y} \frac{\partial F}{\partial x} - (\bar{X} + t \bar{Y}) \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

L'équation (13) se déduit de l'équation (12) par le changement de variable, $y = tx$; $\bar{Y}$ et $\bar{X}$ sont ce que deviennent Y et X lorsqu'on fait ce changement de variable; la fonction L vérifie la même équation (13) que F ; h et H vérifient respectivement les équations

$$(14) \quad Y(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} - X(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = C(x, y),$$

$$(15) \quad x \bar{Y} \frac{\partial H}{\partial x} - (\bar{X} + t \bar{Y}) \frac{\partial H}{\partial t} = x C(x, tx).$$

L'équation (15) se déduit de (14) de la même manière que (13) se déduit de (12). Les équations (14) et (15) se déduisent respectivement de (12) et (13) en remplaçant f et F par leurs expressions; $C(x, y)$ est une série entière en x et y que l'on peut écrire

$$C(x, y) = C_n(x, y) + C_{n+1}(x, y) + \dots,$$

les différents termes étant des polynômes homogènes en x et y de degré égal à l'indice. Les termes de degré minimum de C sont de degré n comme ceux de X et Y ³⁾.

4. *L'existence de (f) entraîne celle de (L).* — Pour démontrer, sans supposer h convergent, que si (f) existe (L) existe aussi, posons

$$h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y) + \dots + h_r(x, y),$$

les différents termes étant des polynômes homogènes, et supposons que nous ayons pu déterminer les r polynômes $h_1, h_2, \dots, h_r$ par l'identification des termes de degré $n, n+1, \dots, n+r-1$ des deux membres de l'équation (14). Si dans (10) nous posons

$$H = x H_1 + x^2 H_2 + \dots + x^r H_r + \dots$$

et si nous cherchons à déterminer les polynômes en t : $H_1, H_2, \dots, H_r$, de degré

³⁾ Pour le calcul de C , voir le Mémoire cité ²⁾, a), page 97.

égal à l'indice, par l'identification des termes de degré $n, n+1, \dots, n+r-1$, par rapport à x dans les deux membres de (15), nous obtenons

$$H_i = h_i(1, t).$$

Considérons l'équation (15) et une valeur $t = \alpha$ telle que l'on n'ait pas

$$X_n(1, \alpha) + \alpha Y_n(1, \alpha) = 0.$$

Il existe alors un développement $\bar{H}$, holomorphe pour $x=0, t=\alpha$, vérifiant l'équation (15) et se réduisant pour $t = \alpha$ à une fonction arbitrairement choisie de x . En effet, en divisant les deux membres de (15) par x^n le théorème général d'existence s'applique. Prenons pour fonction arbitraire

$$x h_1(1, \alpha) + x^2 h_2(1, \alpha) + \dots + x^r h_r(1, \alpha).$$

Désignons par $\bar{H}$ le développement correspondant, nous avons

$$\bar{H} = x \bar{H}_1 + x^2 \bar{H}_2 + \dots + x^r \bar{H}_r + x^{r+1} \bar{H}_{r+1} + \dots$$

avec les conditions: $\bar{H}_i(\alpha) = H_i(\alpha)$, pour $i \leq r$, et $\bar{H}_i(\alpha) = 0$, pour $i > r$. Comme les fonctions $\bar{H}_i$ sont déterminées d'une façon unique par les conditions imposées, et que les polynômes $H_1, H_2, \dots, H_r$, satisfont précisément aux mêmes conditions que $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_r$, on voit que pour $i \leq r$ on a: $\bar{H}_i \equiv H_i$. Les fonctions $\bar{H}_i$ pour $i > r$ sont des fonctions analytiques de t , holomorphes pour $t = \alpha$, mais pouvant avoir des singularités quelconques, lorsqu'on les considère dans tout le plan de la variable t . L'équation (13) sera vérifiée par

$$F \equiv x P e^{\bar{H}(x,t)}.$$

Or, si nous posons

$$\varphi_i(x) = b_i x + x \psi_i,$$

ψ_i étant holomorphe et nul pour $x = 0$, nous avons

$$P \equiv (t + b_1)^{\lambda_1} (t + b_2)^{\lambda_2} \dots (t + b_q)^{\lambda_q} \prod_{i=1}^{i=q} \left(1 + \frac{\psi_i}{t + b_i} \right)^{\lambda_i}.$$

On a par conséquent, en développant suivant les puissances de x ,

$$\bar{F} \equiv x(t + b_1)^{\lambda_1} (t + b_2)^{\lambda_2} \dots (t + b_q)^{\lambda_q} [1 + x \bar{L}_1 + \dots + x^r \bar{L}_r + \dots].$$

Ce développement est convergent pour x voisin de 0 et t voisin de α .

On voit facilement que $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_r$, dans la formation desquels n'interviennent que $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_r$, sont des fractions rationnelles en t dont les dénominateurs ne contiennent que des puissances des facteurs $t + b_i$. $\bar{F}$ vérifiant l'équation (13), le terme du premier degré en x de $\bar{F}$ vérifie l'équation qui se déduit de (13) en n'y conservant que les termes en x^n . Cela revient à dire que

$$(t + b_1)^{\lambda_1} (t + b_2)^{\lambda_2} \dots (t + b_q)^{\lambda_q} = \text{const.}$$

donne l'intégrale générale de l'équation (5). Il en résulte que si tous les b sont différents, on a: $q = p$, $b_i = -a_i$, $\lambda_i = \mu_i$. Si quelques-uns des b sont égaux entre eux,

on a $p < q$ et certains des exposants μ_i sont égaux à la somme des exposants λ_i correspondants aux b qui sont égaux à $-a_i$.

Si $h(x, y)$ existe formellement, on peut prendre r aussi grand que l'on veut et $\bar{F}$ nous fournira une intégrale générale de (2) qui sera de la forme (L). Nous concluons que: *Si l'équation (2) admet une intégrale générale de la forme (f) et si la somme des exposants λ n'est pas nulle, elle admet une intégrale de la forme (L).*

5. Si (L) existe, en général (f) existe. — Il est évident qu'il y aura des cas d'exception; si nous considérons en effet l'équation

$$(y - x^2)dy + 2xydx = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$(16) \quad ye^{\frac{x^2}{y}} = \text{const.}$$

et ne saurait se mettre sous la forme (f), la relation (16) peut, en posant $y = tx$, s'écrire

$$xt \left[1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{2! t^2} + \frac{x^3}{3! t^3} + \dots \right] = \text{const.},$$

qui est bien de la forme (L). La démonstration qui va suivre mettra en évidence les cas d'exception.

Pour simplifier les raisonnements, nous supposons que dans (3) on ait $\mu = 0$. Il suffit pour qu'il en soit ainsi que Y_n ne contienne pas x en facteur et on peut toujours faire qu'il en soit ainsi, en prenant pour axe des x une droite ne faisant pas partie du faisceau $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$. Supposons qu'à chacune des directions $y - a_i x = 0$ corresponde au moins une intégrale de (2) tangente à cette direction et holomorphe et nulle pour $x=0$. Les nombres a_i ($i=1, 2, \dots, p$) sont les nombres définis au n° 2. S'il y a une seule intégrale tangente à la direction $y = a_i x$, nous la désignerons par $y + \varphi_i(x) = 0$, et nous lui ferons correspondre un exposant $\lambda_i = \mu_i$. S'il y a plusieurs intégrales holomorphes tangentes à $y - a_i x = 0$, nous en considérerons un nombre arbitraire, nous désignerons par $y + \varphi_i(x) = 0$ l'une d'elles et les autres par $y + \varphi_j(x) = 0$, j ayant une valeur supérieure à p ; nous ferons correspondre à ces intégrales des exposants λ assujettis à la seule condition que leur somme soit égale à l'exposant μ_i correspondant. Désignons par q le nombre total d'intégrales holomorphes que nous avons choisies et qui correspondent aux diverses directions $y - a_i x = 0$. On a $q \geq p$. Ceci posé, raisonnons comme au n° 4; supposons qu'on puisse déterminer les r premiers termes $L_1, L_2, \dots, L_r$ de (L) sous forme de fractions rationnelles. Cela signifie qu'on peut vérifier l'équation (13) au moyen d'une fonction $\bar{L}$ de la forme

$$\bar{L} = ux(1 + x\bar{L}_1 + x^2\bar{L}_2 + \dots + x^r\bar{L}_r + x^{r+1}\bar{L}_{r+1} + \dots).$$

$\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_r$ sont des fractions rationnelles identiques à $L_1, L_2, \dots, L_r$; $\bar{L}_i$ est pour $i > r$ une fonction analytique, holomorphe pour $t = \alpha$. $\bar{L}$ est convergent pour x voisin de 0 et t voisin de α . Nous pouvons donc vérifier l'équation (15) par une

fonction $\bar{H}$ de la forme

$$\bar{H} \equiv \log \frac{\bar{L}}{x^r P},$$

où nous posons

$$P \equiv \left[t + \frac{\varphi_1}{x} \right]^{\lambda_1} \left[t + \frac{\varphi_2}{x} \right]^{\lambda_2} \cdots \left[t + \frac{\varphi_q}{x} \right]^{\lambda_q}.$$

Or, P peut s'écrire, d'après les hypothèses que nous venons de faire sur les φ_i ,

$$P \equiv u \prod_{i=1}^{i=q} \left[1 + \frac{\psi_i}{t - a_i} \right].$$

En développant $\bar{H}$ suivant les puissances de x , on a donc

$$(17) \quad \bar{H} = x \bar{H}_1 + x^2 \bar{H}_2 + \cdots + x^r \bar{H}_r + x^{r+1} \bar{H}_{r+1}.$$

Ce développement est convergent dans les mêmes conditions que $\bar{L}$; $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_r$, sont des fractions rationnelles en t ; $\bar{H}_i$, pour $i > r$ est une fonction analytique de t . Nous allons montrer que si $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_r$ sont des fonctions uniformes et à fortiori si ce sont des fractions rationnelles, ce sont, en général, des polynômes.

Nous poserons

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= x^n \bar{Y}_n + x^{n+1} \bar{Y}_{n+1} + \cdots, \\ \bar{X} &= x^n \bar{X}_n + x^{n+1} \bar{X}_{n+1} + \cdots, \\ A_{n+i} &= t \bar{Y}_{n+i-1} + \bar{X}_{n+i-1}. \end{aligned}$$

Ainsi que nous le verrons, nous serons obligés de supposer que A_{n+i} , ou, ce qui revient au même, $y Y_n(x, y) + x X_n(x, y)$ n'admet que des facteurs simples. Posons pour simplifier l'écriture

$$t \bar{Y}_n + X_n = V = \prod_{i=1}^{i=n+1} (t - a_i) = v(t - a_{p+1})(t - a_{p+2}) \cdots (t - a_{n+1}),$$

$a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{n+1}$ étant des racines simples de V qui sont racines de $\bar{Y}_n$.

L'équation que vérifie $\bar{H}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} &[x \bar{H}_1 + 2x^2 \bar{H}_2 + 3x^3 \bar{H}_3 + \cdots][\bar{Y}_n + x \bar{Y}_{n+1} + x^2 \bar{Y}_{n+2} + \cdots] \\ &- [x \bar{H}'_1 + x^2 \bar{H}'_2 + x^3 \bar{H}'_3 + \cdots][V + x A_{n+2} + x^2 A_{n+3} + \cdots] = x \bar{C}_n + x^2 \bar{C}_{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} V \bar{H}'_1 - \bar{Y}_n \bar{H}_1 &= -\bar{C}_n, \\ \bar{H}_1 &= u \left[\int \frac{-\bar{C}_n dt}{V u} - d_1 \right], \end{aligned}$$

d_1 étant une constante. Supposons que nous ayons démontré que $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_{s-1}$ sont des polynômes de degré égal à l'indice, montrons qu'il en est de même pour $\bar{H}_s$ ($s \leq r$). La démonstration, comme on le verra, est valable pour $s = 1$.

On a

$$s \bar{Y}_n \bar{H}_s + (s-1) \bar{Y}_{n+1} \bar{H}_{s-1} + (s-2) \bar{Y}_{n+2} \bar{H}_{s-2} + \dots + \bar{Y}_{n+s-1} \bar{H}_1 \\ - V \bar{H}'_s - A_{n+2} \bar{H}'_{s-1} - A_{n+3} \bar{H}'_{s-2} - \dots - A_{n+s} \bar{H}'_1 = \bar{C}_{n+s-1}.$$

Si on remplace $\bar{H}_{s-1}, \bar{H}_{s-2}, \dots, \bar{H}_1$ par leurs expressions, et si on remarque que le terme en t^{n+i+1} de A_{n+i+1} et le terme en t^{n+i} de $\bar{Y}_{n+i}$ ont même coefficient, on voit que les termes de degré $n+s$ disparaissent. On a donc

$$V \bar{H}'_s - s \bar{Y}_n \bar{H}_s = D_{n+s-1},$$

D étant un polynôme de degré égal à l'indice. Si nous posons

$$I = \int_0^t \frac{D_{n+s-1} dt}{V u^s}$$

nous aurons, en désignant par d une constante,

$$\bar{H}_s = u'(I - d).$$

Nous allons montrer que s'il existe, comme cela a lieu par hypothèse, une valeur de d telle que $\bar{H}_s$ soit uniforme, $\bar{H}_s$ n'admettra pas d'autre point singulier que le point à l'infini qui sera un pôle d'ordre s . Les points singuliers de H_s ne peuvent provenir que des valeurs $t = a_j$ annulant V . Soit ν_j l'exposant de $t - a_j$ dans u' , exposant qui est nul si on a $p < n+1$ et si j a l'une des valeurs: $p+1, p+2, \dots, n+1$. Cet exposant est réel ou imaginaire, positif ou négatif, rationnel ou non. Le facteur $t - a_j$ aura dans le produit $V u'$ l'exposant $\nu_j + 1$.

Examinons d'abord les cas où cet exposant est entier. S'il est entier et négatif ou encore nul, le point a_j sera un point ordinaire de $I - d$; comme, en général, ce ne sera pas un zéro de $I - d$, ce sera un pôle d'ordre $-\nu_j$ de $\bar{H}_s$. Si $\nu_j + 1$ est entier et positif, $t = a_j$ est un pôle d'ordre $\nu_j + 1 - s'$ de $\frac{D_{n+s-1}}{V u^s}$, en désignant par s' l'ordre de multiplicité de $t = a_j$, dans le cas où cette valeur est un zéro de D_{n+s-1} . Le résidu relatif à ce pôle est nul. En effet, si ce résidu avait une valeur r' différente de 0, en décrivant un lacet partant de $t=0$ et y revenant après avoir tourné autour de a_j , u reprendrait la même valeur, tandis que I augmenterait de $2\pi i r'$; donc $\bar{H}_s$ ne serait pas uniforme. Nous voyons en particulier que D_{n+s-1} est divisible par les facteurs $t - a_{p+1}, t - a_{p+2}, \dots, t - a_{n+1}$ de V qui ne figurent pas dans u . Nous voyons ensuite que $t = a_j$ est un pôle d'ordre $\nu_j - s'$ de I [point ordinaire, si $(\nu_j - s')$ est négatif]: c'est donc un point ordinaire de $\bar{H}_s$.

Le même raisonnement montre que $\frac{D_{n+s-1}}{V u^s}$ dont toutes les déterminations sont uniformes pour t infini (puisque la somme des exposants des facteurs de u est égale à 1) a son résidu pour $t = \infty$ nul; $t = \infty$ est un zéro d'ordre 2 de cette expression et par suite point ordinaire de I et infini d'ordre s au plus de $\bar{H}_s$.

Considérons maintenant les points a_j pour lesquels ν_j n'est pas un entier positif ou négatif. S'il existe de pareils points, il y en a au moins 2, puisque la fonction u^s

ne peut avoir un seul point critique. Soient a_j et a_k deux points tels que ν_j et ν_k ne soient pas des entiers. Désignons par b_j un lacet partant de $t=0$ et y revenant après avoir tourné dans le sens direct autour de a_j ; b'_j désigne le même lacet décrit en sens inverse. Soit $\alpha_j u^{-s}$ ce que devient u^{-s} lorsqu'on décrit le lacet b_j . On a $\alpha_j e^{2\pi i \nu_j} = 1$. Soit B_j la valeur de l'intégrale I prise le long de ce lacet. Des notations analogues seront employées pour a_k . Décrivons successivement les lacets b_k, b_j, b'_k, b'_j dont l'ensemble forme un contour fermé C_{kj} . Après que l'on a décrit ce contour, u reprend la même valeur. Si l'on veut que $\bar{H}_s$ soit uniforme, il faut que l'intégrale I prise le long de C_{kj} soit nulle. Un calcul facile montre que pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$(1 - \alpha_k)B_j - (1 - \alpha_j)B_k = 0.$$

Nous aurons donc, pour toutes les valeurs de j pour lesquelles ν_j n'est pas un entier

$$\frac{B_j}{1 - \alpha_j} = c,$$

c étant une constante qui ne dépend pas de j . Considérons alors

$$K(t) = u^s(I - c).$$

Désignons par u_0 la détermination de u que nous choisissons pour $t=0$. Nous avons

$$K(0) = -c u_0^s.$$

Si nous décrivons le lacet b_j , $K(t)$ devient

$$\frac{u_0^s}{\alpha_j}(B_j - c) = \frac{u_0^s}{\alpha_j}(c - c\alpha_j - c) = -c u_0^s;$$

$K(t)$ est par conséquent une fonction de t qui n'admet pas a_j comme point critique. Or, nous avons

$$\bar{H}_s = K(t) + u^s(c - d);$$

il faut donc pour que $\bar{H}_s$ soit uniforme que l'on ait $d = c$ et par suite $\bar{H}_s = K(t)$. Voyons si $t = a_j$ peut être un point singulier de $\bar{H}_s$. Dans le voisinage de a_j nous avons

$$\frac{D_{n+s-1}}{V u^s} = \frac{1}{(t - a_j)^{\nu_j + 1 - s'}} [c_0 + c_1(t - a_j) + c_2(t - a_j)^2 + \dots],$$

s' étant l'ordre de multiplicité de $t = a_j$ dans le cas où cette valeur est un zéro de D_{n+s-1} . On a, par suite,

$$I - c = \beta_j - c - \frac{1}{(t - a_j)^{\nu_j - s'}} \left[\frac{c_0}{\nu_j - s'} + \frac{c_1(t - a_j)}{\nu_j - s' - 1} + \dots \right],$$

β_j étant une constante. On a, d'autre part,

$$u^s = (t - a_j)^{\nu_j} u_1,$$

u_1 étant holomorphe pour $t = a_j$. Nous avons donc

$$\bar{H}_s = (\beta_j - c)(t - a_j)^{\nu_j} u_1 - (t - a_j)^{\nu_j} [d_0 + d_1(t - a_j) + \dots].$$

Si l'on a $\beta_j - c \neq 0$, il est impossible que $\bar{H}_j$ soit uniforme. Donc, pour toutes les valeurs de j considérées, on a $\beta_j = c$, et $t = a_j$ est un point ordinaire de $\bar{H}_j$.

En résumé, les seuls points singuliers de $\bar{H}_j$ sont: 1° le point à l'infini qui est un pôle d'ordre s au plus; 2° les points a_j pour lesquels $v_j = s\mu_j$ est un entier négatif, ces points sont des pôles d'ordre au plus égal à $-v_j$. Ces derniers points singuliers ne peuvent exister que si certains des exposants μ_i sont des nombres rationnels négatifs. Si nous supposons qu'il n'en soit pas ainsi, $\bar{H}_j$ sera un polynôme de degré s .

Nous pouvons donc vérifier l'équation (15) par un développement (17), où dans les r premiers termes $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_r$ sont des polynômes de degré égal à l'indice. En remplaçant t par $y:x$ nous voyons que l'équation (14) sera vérifiée par un développement (b) dont les r premiers termes seront des polynômes homogènes en x et y , dont le degré est égal au rang; les termes suivants sont des fonctions analytiques homogènes en x et y , de degré égal au rang. S'il existe un développement (L) dont tous les termes $xL_1, x^2L_2, \dots$ sont des fractions rationnelles en t , on peut prendre r aussi grand que l'on veut; il existe donc un développement $h(x, y)$ vérifiant (14) et dont tous les termes sont des polynômes homogènes en x et y . Il existe par suite une intégrale de la forme (F). Nous arrivons à l'énoncé suivant: *S'il existe une intégrale générale de (2) de la forme L, si aucun des exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ n'est un nombre rationnel négatif, si le faisceau $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ n'admet pas de droite double et s'il y a pour chacune des droites de ce faisceau au moins une intégrale de (2) holomorphe pour $x=0$ et tangente à l'origine à cette droite, il existe également une intégrale générale de la forme (f).*

6. Remarques sur l'énoncé précédent. — Deux des hypothèses faites dans cet énoncé ne sont pas indépendantes. En effet, si on cherche les intégrales holomorphes tangentes à $y - a_i x = 0$, pour $i = 1, 2, \dots, p$, on est ramené, en posant $y = a_i x + \chi x$, à chercher les intégrales $\chi(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$ d'une équation de la forme

$$(x + \dots) \frac{d\chi}{dx} + \frac{\chi}{\mu_i} + \dots = 0.$$

Or, il existe toujours une telle intégrale et une seule, si μ_i n'est pas l'inverse d'un entier négatif, ce qui a toujours lieu si les exposants μ_i ne sont pas des nombres rationnels négatifs. Nous n'avons donc besoin que de supposer l'existence d'intégrales holomorphes correspondant aux directions $y - a_i x = 0$ ($i = p + 1, p + 2, \dots, n + 1$). En général, il n'existe pas d'intégrales holomorphes tangentes à ces directions exceptionnelles, et je compte démontrer dans un autre travail que, lorsqu'il existe de ces droites exceptionnelles, droites simples du faisceau $yY_n(x, y) + xX_n(x, y) = 0$ et faisant partie du faisceau $Y_n(x, y) = 0$, l'équation ne peut admettre d'intégrale de la forme (f). Ceci admis, nous pouvons supprimer dans notre énoncé l'hypothèse relative à l'existence d'intégrales holomorphes.

Si les conditions de l'énoncé ne sont pas remplies, le théorème peut être en défaut, ainsi que le montre l'exemple (16) pour lequel $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ admet un

facteur double. Dans le cas particulier où certains des exposants μ_i sont les inverses d'entiers négatifs, on sait que, s'il existe une intégrale holomorphe tangente à $y - a_i x = 0$, il y en a une infinité; le théorème peut être vrai si on prend pour intégrales $y + \varphi_i(x) = 0$ certaines de ces intégrales et faux si on en choisit d'autres. On le vérifie facilement sur l'équation

$x(1+x)(y - \mu y - \mu x)dy + y[-x - x^2 - 2y - 2xy + \mu(y+x)(1+2x)] = 0$,
dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$x^{1-\mu}(y+x)y^{-\mu}(1+x)^{\mu} = \text{const.},$$

mais ne peut se mettre sous la forme

$$x^{\mu-2}(y+x+x^2)y^{-\mu}e^{b(x,y)} = \text{const.}$$

bien que $y+x+x^2=0$ soit une intégrale de l'équation.

7. Caractéristiques et intégrales. — Dans la suite, nous considérerons le plus souvent les valeurs que prend la fonction pour des valeurs de x figurées dans le plan de la variable complexe x par les points d'un arc de courbe. Pour éviter toute confusion, nous dirons alors que nous considérons une *caractéristique* de l'équation (2), au lieu de dire que nous considérons une intégrale. En particulier, nous ferons tendre x vers 0 suivant un chemin pouvant tourner ou non une infinité de fois autour de l'origine; si y tend en même temps vers 0, nous dirons que nous avons une *caractéristique* passant par l'origine. Nous étudierons exclusivement les *caractéristiques* passant par l'origine. Nous n'emploierons l'expression: *intégrale* passant par l'origine que si, de quelque façon que x tende vers 0, y tend aussi vers 0.

8. Forme sous laquelle peut se mettre l'équation (2), lorsqu'il n'existe pas d'intégrale (L). — Si, ayant posé $y = tx$, nous cherchons l'intégrale générale de l'équation (L) sous la forme: $F = \text{const.}$, F est une fonction de x et de t qui vérifie l'équation

$$x[\bar{Y}_n + x\bar{Y}_{n+1} + \dots] \frac{\partial F}{\partial x} = [V + xA_{n+2} + x^2A_{n+3} + \dots] \frac{\partial F}{\partial t}$$

qui est identique à l'équation (13). Nous savons que cette équation est vérifiée, et cela d'une infinité de façons, par une fonction

$$F = xF_1 + x^2F_2 + x^3F_3 + \dots,$$

où $F_1, F_2, \dots$ sont des fonctions analytiques de t régulières pour $t = \alpha$ (on peut prendre $\alpha = 0$). Nous avons vu également que, tout au moins dans certains cas, on peut prendre

$$F_i = u, \quad F_{i+1} = uL_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$L_1, L_2, \dots$ étant des fractions rationnelles en t . Supposons, comme c'est le cas général, qu'il n'en soit pas ainsi. Nous supposons que les s premiers termes de F aient la forme indiquée, mais qu'on ne puisse mettre F_{s+1} sous la forme uL_s , L_s étant une fraction rationnelle; F_{s+1} vérifie l'équation

$$(s+1)\bar{Y}_n F_{s+1} + s\bar{Y}_{n+1} F_s + \dots + \bar{Y}_{n+s} F_1 - V F'_{s+1} - A_{n+2} F'_s - \dots - A_{n+s+1} F'_1 = 0.$$

Remplaçons $F_s, F_{s-1}, \dots, F_1$ et les dérivées $F'_s, F'_{s-1}, \dots, F'_1$ par leurs expres-

sions, en remarquant que l'on a $\frac{d u}{d t} V = u \bar{Y}_n$. Nous obtenons

$$V F'_{s+1} - (s+1) \bar{Y}_n F_{s+1} = \frac{u P(t)}{V^r},$$

P étant un polynôme et r un entier positif. Si nous posons

$$J = \int_0^t \frac{P(t) dt}{V^{r+1} u^s}, \quad K = u^s (J - d),$$

d étant une constante, nous avons

$$(18) \quad F_{s+1} = u K.$$

Nous pouvons reprendre au sujet de K les raisonnements déjà faits à propos de $\bar{H}_s$ et nous en concluons que deux cas seulement sont possibles: 1° Il existe au moins un circuit partant de l'origine, y revenant et tel que, lorsque t décrit ce circuit, u reprend la même valeur, tandis que l'intégrale J prise le long de ce circuit n'est pas nulle; 2° On peut déterminer la constante d de telle façon que K soit une fraction rationnelle en t ; le dénominateur de cette fraction est en général V^r , mais peut être une puissance supérieure, si certains des exposants μ_i sont des nombres rationnels négatifs. Par hypothèse, le cas 2° ne peut se présenter, nous sommes donc dans le cas 1°. Le circuit C peut être, soit un lacet tournant autour d'un point logarithmique, soit un contour C_{kj} tournant autour de deux points a_j, a_k .

Écrivons l'équation (4) en divisant les deux membres par le coefficient de dx . Si nous considérons des valeurs de t appartenant à un domaine D , pour lequel $|t|$ reste inférieur à une limite fixe, tandis que $|V|$ et $|u|$ restent supérieurs à des limites fixes ⁴⁾, choisies d'ailleurs arbitrairement, nous pourrions écrire l'équation (4) sous la forme

$$(19) \quad \frac{dx}{dt} = x f_1 + x^2 f_2 + \dots;$$

les coefficients $f_1, f_2, \dots$ sont des fonctions rationnelles de t . Le second membre de l'équation est convergent lorsque, t appartenant au domaine D , x est suffisamment petit. Cette équation admet une intégrale générale de la forme

$u x (1 + x L_1 + x^2 L_2 + \dots + x^{s-1} L_{s-1}) + x^{s+1} F_{s+1} + x^{s+2} F_{s+2} + \dots = \text{const.};$
 F_{s+1} est donné par la formule (18), les coefficients des puissances supérieures de x sont des fonctions analytiques régulières pour $t = 0$, et le développement est convergent pour x et t voisins de 0.

Faisons le changement de variable

$$(20) \quad z = u(x + x^2 L_1 + x^3 L_2 + \dots + x^s L_{s-1}).$$

Si t appartient au domaine D et si z est assez petit, cette relation peut être résolue

⁴⁾ L'hypothèse relative au module de u ne nous sera nécessaire que plus tard, elle exige, si certains des exposants μ_i sont des nombres complexes, que t ne tourne pas indéfiniment dans le même sens autour des points a_i correspondants, car dans ces conditions u pourrait tendre vers 0 sans que $t - a_j$ tende vers 0.

par rapport à x . L'équation en z et t déduite de (19) par ce changement de variable admet une intégrale générale de la forme

$$z + z^{s+1}(J - d) + z^{s+2}\bar{F}_{s+2} + z^{s+3}\bar{F}_{s+3} + \dots = \text{const.}$$

On en conclut que l'équation en z et t est de la forme

$$(21) \quad \frac{dz}{dt} = -z^{s+1} \frac{P(t)}{V^{r+1}u^s} + z^{s+2}\chi_2(t) + z^{s+3}\chi_3(t) + \dots;$$

$\chi_2, \chi_3, \dots$, de même que $\bar{F}_{s+2}, \bar{F}_{s+3}, \dots$, sont des fonctions analytiques de t qui s'expriment rationnellement au moyen de t et de u . Cette équation (21) est valable pour toutes les valeurs de t appartenant au domaine D , pourvu que z soit assez petit.

9. Équation permettant d'étudier certaines caractéristiques.—Considérons maintenant un des contours C tels que l'intégrale J prise le long de ce contour ne soit pas nulle. Nous pourrions remplacer ce contour C par un contour équivalent Γ , assujetti à rester dans le domaine D et à être tel que, si on désigne par σ l'arc de ce contour compté à partir d'une origine fixe, la variable t soit, lorsqu'on se déplace sur ce contour, une fonction de σ ayant une dérivée qui soit elle-même continue ⁵⁾. Dans ce qui va suivre, l'abscisse de t ne se déplacera que sur ce contour. Nous désignerons par l la longueur totale du contour, par ω la valeur de l'intégrale J prise le long du contour décrit dans un sens que nous appellerons sens négatif; l'arc σ sera compté négativement si on décrit le contour dans le sens négatif, positivement dans le cas contraire. Lorsque t décrit le contour, t et les fonctions $\chi_2, \chi_3, \dots$ deviennent des fonctions de σ . Soit $g(\sigma)$ ce que devient $J - d$. Lorsque σ augmente de l , $g(\sigma)$ augmente de $-\omega$. Nous avons

$$g'(\sigma)d\sigma = dJ = \frac{P(t)dt}{V^{r+1}u^s}.$$

Faisons le nouveau changement de variable

$$(22) \quad z = w - w^{s+1} \left[g(\sigma) + \frac{\omega\sigma}{l} \right].$$

Nous pouvons faire cette substitution dans (21) en donnant à σ n'importe quelle valeur, sans que z cesse d'être petit, si w reste assez petit, en effet $g(\sigma) + \frac{\omega\sigma}{l}$ est une fonction périodique qui reste toujours finie. Remplaçons t et dt en fonction de σ et $d\sigma$; nous avons, toutes réductions faites

$$(23) \quad \frac{dw}{d\sigma} = \frac{\omega}{l} w^{s+1} [1 + w\rho_1(\sigma) + w^2\rho_2(\sigma) + \dots];$$

$\rho_1, \rho_2, \dots$ sont des fonctions périodiques de σ ayant pour période l . Posons

$$(24) \quad w = \left(\frac{l}{\omega} \right)^{\frac{1}{s}} r l^{\frac{\theta}{s}};$$

⁵⁾ On pourrait supposer la dérivée discontinue en certains points, c'est-à-dire supposer le contour Γ formé d'un nombre fini d'arcs ne se raccordant pas. Au lieu d'avoir dans la suite, pour étudier w , à considérer une seule équation, il faudrait successivement, suivant la valeur de σ , considérer plusieurs équations.

θ et r sont deux nouvelles variables réelles; $\left(\frac{l}{\omega}\right)^{\frac{1}{s}}$ est une quelconque des déterminations de cette quantité. L'équation (23) pourra s'écrire

$$(25) \quad \frac{dr}{r} + i \frac{d\theta}{s} = r^s e^{i\theta} (1 + \alpha + i\beta) d\sigma,$$

α et β étant des expressions réelles qui, quelles que soient les valeurs de σ et de θ , deviennent aussi petites que l'on veut lorsque r tend vers 0.

10. Étude de l'équation (25). — Si nous séparons la partie réelle et la partie imaginaire, nous avons

$$(26) \quad \frac{dr}{d\sigma} = r^{s+1} [(1 + \alpha) \cos \theta - \beta \sin \theta],$$

$$(27) \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = s r^s [\beta \cos \theta + (1 + \alpha) \sin \theta].$$

Nous pouvons supposer que la valeur initiale θ_0 que prend θ , pour $\sigma = 1$, est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. S'il n'en était pas ainsi, on remplacerait θ par $\theta - k\pi$ de telle façon que la valeur initiale de la nouvelle variable soit comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et, si k était impair, on changerait de plus σ en $-\sigma$, de manière à ne pas changer les équations (26) et (27). Il existe un nombre η , tel que, si l'on a $|r| < \eta$, toutes les conditions dont il a été question et qui sont nécessaires pour qu'on puisse employer les développements qui entrent dans (26) et (27), soient vérifiées. Nous supposerons de plus que η soit assez petit pour que, si l'on a $|r| < \eta$, on ait $|\alpha| < \frac{1}{2}$, $|\beta| < \frac{1}{2}$. Nous ne considérerons que des valeurs de r telles que l'on ait $|r| < \eta$. A chaque valeur de r correspond un nombre ε tel que $(1 + \alpha) \cos \theta - \beta \sin \theta$ soit positif lorsque θ est compris entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et cela quel que soit σ . Comme β tend vers 0 avec r , il est permis de supposer que ε tend aussi vers 0 avec r . De même, il existe pour chaque valeur de r un nombre ε' tendant vers 0 avec r et tel que $(1 + \alpha) \sin \theta + \beta \cos \theta$ ait même signe que $\sin \theta$, lorsque θ n'est pas compris entre $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon'$.

Formons le tableau des signes que prennent $\frac{dr}{d\sigma}$ et $\frac{d\theta}{d\sigma}$ lorsque θ varie entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$:

θ	$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$	$-\varepsilon'$	ε'	$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$
$\frac{dr}{d\sigma}$	+		+	+
$\frac{d\theta}{d\sigma}$	—	+ ou —		+

Il résulte de ce tableau que, si l'on part de la valeur initiale θ_0 et si σ va en décroissant, r ira en décroissant. Montrons que θ restera toujours compris entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$. 1° Si nous partons d'une valeur θ comprise entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $-\varepsilon'$, θ ira en croissant; 2° Si nous partons d'une valeur de θ comprise entre ε' et $-\varepsilon'$, θ peut croître ou décroître; 3° Si θ est compris entre ε' et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, θ décroîtra. Nous n'avons donc que les deux cas suivants: 1° θ se rapproche de 0; 2° θ est compris entre les nombres ε' et $-\varepsilon'$ qui se rapprochent de 0: dans les deux cas, θ ne peut sortir de l'intervalle $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Complétons le théorème en montrant que r ne peut tendre vers 0 pour une valeur finie de σ et que r tend vers 0 lorsque σ croît indéfiniment par valeurs négatives. En effet, l'équation (26) donne

$$\int_0^\sigma d\sigma = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^{s+1}[(1+\alpha)\cos\theta - \beta\sin\theta]}.$$

Si r tendait vers 0 pour une valeur finie de σ , le premier membre serait fini et le second infini. De même si, lorsque σ croît indéfiniment, r qui tend nécessairement vers une limite tendait vers une limite différente de 0, le premier membre serait infini, tandis que le second serait fini, puisque le dénominateur ne devient pas nul.

θ tend aussi vers la limite 0. En effet, d'après ce que nous avons dit plus haut, cela est intuitif, si, quel que grand que soit σ , θ prend des valeurs rentrant dans le cas 2°. S'il n'en est pas ainsi, θ qui se rapproche toujours de 0, tendra vers une limite; cette limite ne peut être différente de 0, car de (26) et (27) on conclut

$$\int_{\theta_0}^0 d\theta = \int_{r_0}^r \frac{(1+\alpha)\sin\theta + \beta\cos\theta}{(1+\alpha)\cos\theta - \beta\sin\theta} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Si θ ne tendait pas vers 0, lorsque r tend vers 0, le premier membre, qui est fini, ne pourrait égaler le second qui deviendrait infini, puisque $(1+\alpha)\sin\theta + \beta\cos\theta$ ne devient pas nul.

Si nous posons $\cotg\varepsilon = A$, au lieu de dire que la valeur initiale θ_0 est comprise entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, nous pourrions dire que l'on a

$$(28) \quad |\operatorname{tg} \theta_0| < A.$$

Cette même condition s'appliquera, sans qu'il soit nécessaire de ramener, comme nous l'avons fait dans la démonstration, la valeur θ_0 à être comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; elle sera comprise par exemple entre $k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $k\pi + \frac{\pi}{2}$. La condition (28) étant vérifiée, il résulte de ce qui précède que r tendra vers 0 et θ vers $k\pi$. On voit qu'on peut énoncer le théorème suivant: *Déterminons un nombre η' tel que, si l'on a $|r| < \eta'$, on ait, quels que soient θ et σ ,*

$$\left| \frac{1+\alpha}{\beta} \right| > A.$$

Prenons des valeurs initiales r_0 et θ_0 , vérifiant les conditions

$$(28') \quad |r_0| < n', \quad |\operatorname{tg} \theta_0| < A.$$

Faisons varier σ en croissant ou en décroissant suivant que $\cos \theta_0$ est négatif ou positif, r ira en décroissant et tendra vers 0, θ tendra vers la valeur $k\pi$ la plus rapprochée de θ_0 .

II. Conséquences relatives à l'équation (2). — Si r tend vers 0, w et z tendent vers 0, il en est de même pour x d'après (20) puisque u reste supérieur en module à une limite fixe positive, y qui est égal à tx tend aussi vers 0 puisque t reste fini.

Nous avons donc une infinité de caractéristiques pour lesquelles x et y tendent simultanément vers 0, tandis que $y:x=t$ ne tend vers aucune limite. Il y a une infinité de ces caractéristiques, puisque, pour un même contour Γ , nous pouvons faire varier les conditions initiales r_0 et θ_0 , pourvu qu'elles vérifient les conditions (28'). On peut également déformer dans certaines limites le contour Γ , ce qui donnera des caractéristiques distinctes des précédentes. S'il y a plusieurs contours jouissant des propriétés du contour C nous aurons plusieurs familles de caractéristiques de l'espèce indiquée.

Étudions pour ces caractéristiques les arguments de x et y . L'argument de w d'après (24) tend vers une limite finie, les différentes valeurs possibles de cette limite diffèrent entre elles de $\frac{\pi}{5}$. Il en est de même de l'argument de z . D'après (20) la différence entre l'argument de z et l'argument de x tend vers l'argument de u . Si le contour C , tel que l'intégrale J prise le long de ce contour ne soit pas nulle, est un contour C_{jk} équivalent à 2 lacets décrits chacun une fois dans chaque sens, l'argument de u oscillera entre deux valeurs finies. Il en sera de même de l'argument de x et par suite de celui de y , si on suppose que le contour Γ équivalent à C ne tourne pas autour de $t=0$. *Les arguments de x et de y restent finis.* Si le contour C est un lacet entourant un point logarithmique, on peut faire voir, qu'en considérant au besoin un contour tournant à la fois autour de tous les points a_i , il y a au moins 2 contours C . En parcourant ces 2 contours successivement dans un sens convenable, l'argument de u restera fini, on montrerait ainsi que dans tous les cas, *il y a des caractéristiques pour lesquelles les arguments de x et de y restent finis.* On peut encore faire en sorte que le contour Γ équivalent à C tourne dans un sens convenable autour de $t=0$, de telle façon que si l'argument de x devient infini, celui de $y=tx$ reste fini, comme du reste on peut permuter le rôle de x et de y , on démontre ainsi qu'à chaque contour correspond une famille de caractéristiques pour lesquelles l'argument de x reste fini, x et y tendant vers 0.

12. (f) existe et les exposants λ_i ne sont pas tous réels. — Nous supposons que l'intégrale générale de (2) puisse se mettre sous la forme

$$(29) \quad x^\lambda e^{h(x,y)} \prod_{i=1}^{i=q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C,$$

φ_i étant une série entière en x , nulle pour $x=0$, et dont nous désignerons par $-a_i x$ le terme du premier degré. La somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ n'est pas nulle et

sera par conséquent supposée égale à 1. Si nous supposons que les exposants λ, λ_i ne soient pas tous réels, nous pouvons toujours supposer qu'un des λ_i, λ_1 par exemple, n'est pas réel. Supposons de plus, tout d'abord, que a_1 est distinct des autres nombres a_i . Posons

$$y + \varphi_1 = zx, \quad c_i = a_i - a_1, \\ \varphi_i - \varphi_1 = x(c_i + \psi_i), \quad k(x, z) = h(x, zx - \varphi_1).$$

La relation (29) devient

$$(30) \quad xl(x, z) = u,$$

en posant

$$l(x, z) = e^{k(x, z)} \prod_{i=2}^{i=q} \left(1 + \frac{\psi_i}{c_i + z}\right)^{\lambda_i}, \\ u = Cz^{-\lambda_1} \prod_{i=2}^{i=q} (c_i + z)^{-\lambda_i}.$$

Traçons dans le plan de la variable z un contour fermé entourant le point $z=0$, ne passant par aucun des points $z=-c_i$ et n'entourant aucun de ces points. Ce contour étant choisi, nous supposons dans tout ce qui suit que z ait pour affixe un point de ce contour.

Prenons ε assez petit pour que si l'on a $|x| < \varepsilon$, les divers facteurs de $l(x, z)$ soient développables en séries convergentes ⁶⁾ ordonnées suivant les puissances de x . Nous aurons

$$l(x, z) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ de ce développement étant des fonctions rationnelles de z . On sait qu'on peut trouver un nombre η tel que si l'on a $|u| < \eta$ la valeur de x qui vérifie la relation (30) et qui tend vers 0 avec u soit donnée par le développement convergent

$$x = u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \dots.$$

Les β sont comme les α des fonctions rationnelles de z . Pour démontrer l'existence de caractéristiques telles que x et y tendent vers 0 tandis que $y:x=t$ ne tend vers aucune limite, il nous suffit de faire voir que, lorsque z parcourt indéfiniment le contour choisi en tournant dans un sens convenable, u tend vers 0. En effet, d'après $y = -\varphi_1 + zx$, y tendra vers 0 avec x puisque z reste fini. D'autre part on a $t = z - \frac{\varphi_1}{x}$ et $\frac{\varphi_1}{x}$ tend vers $-a_1$; z ne tendra donc vers aucune limite.

Pour montrer que u tend vers 0, partons d'une valeur arbitraire de z , choisissons, pour cette valeur initiale, une détermination quelconque de $z^{-\lambda_1}$ ainsi que de $(c_i + z)^{-\lambda_i}$. Prenons la constante C assez petite pour que, lorsqu'on parcourt une fois le contour choisi dans le sens que nous allons indiquer on ait constamment $|u| < \eta$. Si nous décrivons le contour choisi et si nous revenons au point de départ, tous les facteurs de u

⁶⁾ La convergence de $h(x, y)$ et par suite celle de $k(x, z)$ pour les valeurs considérées de z et de x résulte de ce que les exposants ne sont pas tous positifs.

reprendront la même valeur, à l'exception du facteur $z^{-\lambda_1}$ qui, si l'on pose: $-\lambda_1 = a + ib$, et si l'on décrit le contour dans le sens direct, est multiplié par $e^{2i\pi a} e^{-2\pi b}$. Il en résulte que si nous décrivons le contour un nombre indéfini de fois, en tournant dans le sens direct si b est positif, en sens contraire si b est négatif, $|u|$ restera inférieur à η et tendra vers 0. Nous pouvons énoncer le théorème suivant: *La somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ étant supposée différente de 0 et par suite égale à 1, à chacune des intégrales holomorphes $y + \varphi_i = 0$, dont l'exposant λ_i est un nombre complexe, correspond, si cette intégrale n'est tangente à l'origine à aucune des autres intégrales $y + \varphi_i = 0$, une famille de caractéristiques pour lesquelles x et y tendent vers 0, tandis que $t = y:x$ ne tend vers aucune limite.*

Les arguments de x et de y des diverses caractéristiques dont nous venons d'établir l'existence croissent indéfiniment. On se rendra cependant facilement compte que si les exposants λ_i présentent entre eux certaines relations (rapport rationnel des parties réelles de deux exposants et signes convenables des coefficients des parties imaginaires correspondantes) on peut modifier les raisonnements de manière à mettre en évidence des caractéristiques pour lesquelles l'argument de x reste fini.

13. Généralisation du théorème précédent. — Supposons, pour fixer les idées, que les intégrales $y + \varphi_1 = 0$, $y + \varphi_2 = 0$, $y + \varphi_3 = 0$ aient même tangente à l'origine: $y - a_1 x = 0$, et soient les seules, parmi les intégrales $y + \varphi_i = 0$, à admettre cette tangente à l'origine. Pour abrégé nous dirons que ces 3 intégrales forment un *groupe* d'intégrales ayant même tangente. Posons $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Nous supposons que la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ étant comme précédemment égale à 1, le nombre μ_1 soit un nombre complexe. Faisons le même changement de variable que dans le cas précédent et employons les mêmes notations; la relation (29) devient

$$x l(x, z) = u,$$

en posant

$$l(x, z) = \left(1 + \frac{\psi_2}{z}\right)^{\lambda_2} \left(1 + \frac{\psi_3}{z}\right)^{\lambda_3} e^{h(x,z)} \prod_{i=4}^{i=q} \left(1 + \frac{\psi_i}{c_i + z}\right)^{\lambda_i},$$

$$u = C z^{-\mu_1} \prod_{i=4}^{i=q} (c_i + z)^{-\lambda_i}.$$

Nous pouvons répéter les raisonnements du n° 12, μ_1 jouant le rôle que jouait λ_1 . On voit d'autre part facilement (n° 4) que l'exposant μ_1 , dont il est ici question, est identique à l'exposant μ_1 de la formule (6). On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si l'équation (2) admet une intégrale générale de la forme (f) (29), si la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ est supposée différente de 0 et par suite égale à 1, à chacun des exposants μ_i de la formule (6) qui n'est pas réel correspond une infinité de caractéristiques pour lesquelles x et y tendent vers 0, tandis que $y:x = t$ ne tend vers aucune limite.

14. Cas qui échappent au théorème précédent. — Si la somme des exposants λ étant toujours supposée égale à 1, les exposants μ sont tous réels, tandis que les exposants

λ ne le sont pas tous, il peut encore y avoir des caractéristiques passant par l'origine sans que $y:x$ tende vers une limite. Pour justifier cette assertion, j'indiquerai l'exemple suivant :

Considérons l'équation, facile à former, dont l'intégrale générale est donnée par

$$y^{-i}(y+x^2)^{1+i} = C.$$

Posons $y = ux^2$; nous avons

$$x = C^{\frac{1}{2}} u^{\frac{i}{2}} (1+u)^{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}.$$

Faisons décrire à la variable u , dans son plan, le contour suivant: nous décrirons d'abord un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon inférieur à 1 ($\frac{1}{2}$ par exemple); ce cercle sera décrit dans le sens direct en partant du point situé sur la partie positive de l'axe des quantités réelles. Après avoir décrit une fois ce cercle, nous parcourons l'axe des quantités u réelles et positives jusqu'à un point A_1 ; nous revenons ensuite sur nos pas de manière à rejoindre le cercle à notre point de départ, nous décrivons encore une fois le cercle dans le sens direct, nous allons jusqu'à un point A_2 de l'axe des quantités réelles et positives u , nous revenons au point de départ et ainsi de suite. Nous déterminerons ultérieurement les points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, selon les besoins de notre démonstration. Nous allons montrer que le module de $y:x$ ne tend vers aucune limite, mais reste fini, tandis que $|x|$ et par suite $|y|$ tendent vers 0. Posons

$$u = e^{\log \rho + i\theta}, \quad 1+u = e^{\log \rho' + i\theta'}.$$

En parcourant le contour considéré, θ croît indéfiniment, θ' reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Nous avons

$$x = C^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\theta - \log \rho' + \theta'}{2}} e^{\frac{i}{2}(\log \rho - \log \rho' + \theta')}.$$

Il nous suffit de prouver que $e^{-\theta - \log \rho'}$, qui représente le module de x^2 , abstraction faite d'un facteur qui reste fini, tend vers 0, tandis que $e^{-\theta - \log \rho' + 2i \log \rho}$ qui représente le module de $(y:x)^2 = u^2 x^2$ abstraction faite du même facteur, ne tend vers aucune limite. Il suffit de montrer que $\rho' e^{\theta}$ croît indéfiniment, tandis que $r = \frac{\rho^2}{\rho' e^{\theta}}$ ne tend vers

aucune limite. Le premier point est évident, puisque ρ' reste supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, tandis que θ croît indéfiniment. Pour démontrer la second, remarquons que, sur les cercles successifs décrits, r tend vers 0, et montrons qu'on peut choisir A_n de telle façon qu'en ce point r soit supérieur à 1. Pour A_n on a $\theta = 2n\pi$, $\rho' = \rho + 1$; il suffit que l'on ait

$$\rho^2 - e^{2n\pi} \rho - e^{2n\pi} > 0.$$

On voit que cette inégalité sera vérifiée si, en désignant par α_n la distance de A_n à l'origine, on prend $\alpha_n = 1 + e^{2n\pi}$. Au lieu de considérer le contour choisi, nous pourrions prendre un contour voisin, les valeurs de x, y diffèreraient très peu des valeurs précédentes, et du reste le même mode de démonstration s'appliquerait. x et y tendent

vers 0 et leur rapport ne tend vers aucune limite. Nous pouvons remarquer que, si l'argument de y ne reste pas fini, l'argument de x reste fini, il ne diffère en effet que d'une constante de $\frac{\theta'}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\rho}{\rho'}$. Or les 2 termes de cette expression restent finis.

On traiterait par la même méthode des exemples analogues. On peut considérer par exemple l'équation qui a pour intégrale générale

$$(y + ix^2)^{1+i}(y - ix^2)^{1-i} = C,$$

équation qui est à coefficients réels. Il semble difficile de donner une démonstration générale relative aux cas que nous considérons, où tous les exposants μ sont réels, tandis que les λ ne le sont pas tous.

15. Seconde généralisation du théorème du n° 12. — Supposons, comme précédemment, que l'équation (2) admette une intégrale générale de la forme (29) et que les rapports des divers exposants $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ ne soient pas tous réels. Nous allons montrer que : *En général, il existe un ou plusieurs polynômes $P(x)$ nuls pour $x = 0$, de degré égal à $r - 1$ au plus, et tels qu'il y ait des caractéristiques pour lesquelles x et y tendent vers 0, tandis que $[y - P(x)] \cdot x^r$ ne tend vers aucune limite.* — La démonstration préciserà les cas d'exception.

Comme précédemment, si la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ n'est pas nulle, nous la supposons égale à 1. Nous voyons alors que 3 cas seulement peuvent se présenter, lorsque nous considérons des intégrales $y + \varphi_i = 0$ faisant partie d'un même groupe, c'est-à-dire ayant même tangente à l'origine.

1° On a $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q = 1$, et les sommes des exposants λ_i relatifs aux intégrales d'un même groupe ne sont pas toutes réelles.

2° On a $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q = 1$, et les sommes des exposants λ_i relatifs aux intégrales d'un même groupe sont toutes réelles.

3° On a $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q = 0$.

D'après ce que nous avons vu (n° 13) le théorème sera démontré si on est dans le cas 1°; on a : $r = 1, P \equiv 0$. Dans le cas 3° le théorème peut être en défaut, nous reviendrons au reste sur ce point. Il nous reste à démontrer que le théorème est encore vrai, en général, dans le cas 2°, si les exposants λ_i ne sont pas tous réels. Supposons, pour fixer les idées, que λ_1 ne soit pas réel et que les intégrales qui font partie du même groupe que $y + \varphi_i = 0$, c'est-à-dire tangentes à $y = a_i x$ soient les intégrales $y + \varphi_i = 0$ relatives aux valeurs 1, 2, ..., q' de l'indice i . Par hypothèse, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{q'}$ est un nombre réel. Posons

$$(31) \quad y = a_1 x + x y_1.$$

L'équation (2) est remplacée par une équation en x et y_1 dont l'intégrale générale, dans le voisinage de $x = 0, y_1 = 0$ sera donnée, ainsi qu'on le voit facilement en partant de (29), par une relation de la forme

$$(32) \quad x e^{k_1(x, y_1)} \prod_{i=1}^{i=q'} (y_i + \psi_i)^{\lambda_i} = C.$$

Si la somme $1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ est nulle, nous sommes dans le cas 3° et le théorème peut être en défaut. Si cette somme n'est pas nulle, nous pourrions multiplier tous les exposants, y compris $k_1(x, y_1)$, par une constante réelle c , de telle façon que la somme considérée prenne la valeur 1; l'intégrale (32) s'écrit alors

$$(33) \quad x^{\lambda_1} e^{\bar{k}_1(x, y_1)} \prod_{i=1}^{i=q'} (y_i + \psi_i)^{\lambda_i'} = C.$$

Cette intégrale rentre dans le cas 1° ou le cas 2°. Dans le cas 1°, d'après le n° 13, il y a des caractéristiques pour lesquelles x et y_1 tendent vers 0, tandis que $y_1 : x$ ne tend vers aucune limite; ceci revient à dire que $(y - a_1 x) : x^2$ ne tend vers aucune limite; le théorème est démontré. Dans le cas 2°, nous remarquons que λ_1' , qui est le produit $c\lambda_1$, n'est pas réel; nous raisonnerons alors sur l'équation en x et y_1 , comme sur l'équation en x et y , en posant $y_1 = c_1 x + x y_2$, si l'intégrale $y_1 + \psi_1 = 0$ est tangente à $y_1 = c_1 x$. Nous continuerons ainsi, jusqu'à ce que nous arrivions à une équation pour laquelle le cas 2° ne se présente plus. Il en sera toujours ainsi, en effet, la suite de s changements de variable du genre indiqué revient au changement de variable unique

$$y = \varphi(x) + x^s y_s,$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme formé en prenant les termes de $-\varphi_1$ de degré inférieur à $s + 1$. Or, si nous supposons que s soit celui des ordres de contact de $y + \varphi_1 = 0$ avec une intégrale $y + \varphi_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, q$) qui est de l'ordre le plus élevé, il est évident que dans le plan des variables réelles x, y , l'intégrale $y + \frac{\varphi(x) + \varphi_1}{x^s} = 0$, qui correspond à $y + \varphi_1 = 0$, ne sera tangente, en $x = 0, y_1 = 0$, à aucune des intégrales correspondant à $y + \varphi_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, q$). La plupart de ces intégrales ne passeront pas même par $x = 0, y_1 = 0$. Si donc on arrive à l'équation en x, y , sans rencontrer les cas 1° ou 3°, l'un ou l'autre de ces cas se présentera pour cette équation.

Si le cas 1° se présente pour une des équations, le théorème énoncé est démontré. Si le cas 3° se présente, le théorème peut être en défaut. Il nous est donc facile de reconnaître les cas exceptionnels où le théorème peut être en défaut, et dans les autres cas de trouver le polynôme $P(x)$ et le nombre r .

Nous voyons qu'il y a en général autant de polynômes $P(x)$ qu'il y a d'exposants λ_i imaginaires. Si on considère une des courbes, $y = P(x)$, qu'on obtient ainsi, cette courbe a avec une des intégrales $y + \varphi_i = 0$ un contact d'ordre égal à r .

16. Remarque sur le cas d'exception du théorème du n° 15.—Si le cas 3° se présente pour l'intégrale générale (29) de l'équation (2) et si, en désignant par $y = a_i x$ la tangente à $y + \varphi_i = 0$, on fait les divers changements de variable $y = a_i x + x y_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$), en général, pour plusieurs de ces changements de variable, l'intégrale générale, analogue à (32) de l'équation en x, y_1 , ne rentrera pas dans le cas 3°. Si même ce cas 3° se présente pour toutes ces équations en x et y_1 , il ne se présentera plus, en général, pour les équations qu'on déduit des équations en x et y_1 , en opérant sur elles comme sur

l'équation en x, y . On voit donc que, presque toujours, on pourra obtenir une équation pour laquelle le cas 1^o se présentera. Donc, même si le cas 3^o se présente, presque toujours le théorème restera exact. Pour montrer que cependant le théorème peut être en défaut, considérons l'équation qui admet pour intégrale générale

$$x^4 y^{1+i} (y + x^2)^{1-i} = C.$$

En posant $y = ux^2$, on voit que l'intégrale générale est $u = \text{const.}$ Donc il est impossible qu'il y ait un polynôme $P(x)$ et un entier r tel que $[y - P(x)] : x^r$ ne tende vers aucune limite.

17. Cas où les exposants sont tous réels. — Si, en supposant toujours que l'équation (2) admette une intégrale de la forme (29) et que la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ soit égale à 1, nous supposons de plus, contrairement à ce qui précède, que les exposants λ_i sont tous réels, nous pouvons affirmer que $y : x$ tend toujours vers une limite finie ou infinie, quelle que soit la caractéristique pour laquelle x et y tendent tous les deux vers 0. Nous supposerons toutefois ici que le développement $h(x, y)$ est convergent, condition qui est toujours vérifiée si les exposants λ ne sont pas tous positifs. En posant $y = tx$, la relation (29) devient

$$(34) \quad x e^{k(x,t)} \prod_{i=1}^{i=q} (t - a_i + \psi_i)^{\lambda_i} = C,$$

ψ_i étant holomorphe et nul pour $x = 0$. Cette relation (34) est valable pour tous les couples de valeurs de x et t qui correspondent à des valeurs suffisamment petites de x et de y . Il en résulte, qu'on peut trouver un nombre η tel que, si l'on considère une caractéristique pour laquelle y tend vers 0 avec x , la relation (34), où C a une valeur fixe, soit vérifiée pour toutes les valeurs de t correspondant à des valeurs telles que l'on ait : $|x| < \eta$. Je vais montrer qu'il est absurde de supposer qu'il y ait une caractéristique pour laquelle t ne tende vers aucune limite, tandis que x et y tendent vers 0. Tout d'abord, si t ne tend vers aucune limite, il est impossible que la valeur de t correspondant à une valeur de x annule constamment un des facteurs $t - a_i + \psi_i$, puisque la valeur de t annulant un de ces facteurs tend vers a_i lorsque x tend vers 0. Il est donc impossible que la caractéristique considérée soit fournie par une valeur nulle ou infinie de la constante C .

Désignons par α la somme de ceux des exposants $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ qui sont positifs; par $-\beta$ la somme de ceux de ces exposants qui sont négatifs. Pour fixer les idées, nous supposons que les exposants $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_q$ sont positifs, tandis que les exposants $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont négatifs. Supposons que t ne devienne pas infini et ne tende vers aucune des limites correspondant aux facteurs affectés d'exposants négatifs. On sait 7) qu'on peut prendre R assez grand et ε assez petit pour que t prenne, pour

7) Voir, pour une démonstration rigoureuse de ce fait: PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède et de Norvège* (Paris, Hermann, 1897), p. 25.

des valeurs de x aussi petites que l'on veut, des valeurs vérifiant les deux inégalités

$$|t| < R, \quad |t - a_i| > 2\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

et vérifiant par suite, si l'on prend ρ assez grand, l'inégalité: $|t - a_j| < \rho - \varepsilon$, si l'on a $j = r + 1, r + 2, \dots, q$.

On pourra donc prendre η' assez petit pour que l'on ait pour des valeurs de x inférieures en module à η' et aussi petites que l'on veut

$$|t - a_i + \psi_i| > \varepsilon \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r$$

$$|t - a_j + \psi_j| < \rho \quad \text{pour } j = r + 1, r + 2, \dots, q.$$

On peut également supposer que pour $|x| < \eta'$ on a

$$|e^{k(x,t)}| = |e^{h(x,y)}| < 2.$$

Nous voyons que le premier membre de la relation (29) est inférieur en module à

$$\frac{2|x|\rho^\alpha}{\varepsilon^\beta}.$$

Comme cette expression tend vers 0 avec x , on voit qu'il est impossible que, pour la caractéristique considérée, le premier membre de (29) soit égal à une constante C non nulle. C ne pouvant pas non plus être nul, on voit qu'il est absurde de supposer que t ne tend vers aucune limite. Par conséquent, t tend vers une limite lorsque x et y tendent vers 0. Notre démonstration montre de plus que si on met à part les intégrales $y + \varphi_i = 0$ affectées d'un exposant positif, la limite vers laquelle tend $y : x = t$ est ou bien infinie, ou bien coïncide avec un des nombres $a_1, a_2, \dots, a_r$, correspondants aux intégrales $y + \varphi_i = 0$ affectées d'un exposant négatif. Il est bien évident que la direction $x = 0$ ne joue aucun rôle particulier; par conséquent t ne devient infini que si l'exposant λ dans (29) est négatif, on s'en rend d'ailleurs compte en changeant le rôle de x et de y . Nous pouvons dire, en employant le langage géométrique: *Toutes les caractéristiques passant par l'origine y passent avec une tangente déterminée; si on laisse de côté les intégrales obtenues en égalant à 0 les facteurs affectés d'exposants positifs dans (29), toutes les caractéristiques passant par l'origine y sont tangentes au moins à une des intégrales obtenues en égalant à 0 un des facteurs x ou $y + \varphi_i$ affectés d'exposants négatifs.*

Les hypothèses dont nous nous sommes servis dans cette démonstration sont: 1° l'intégrale de l'équation est de la forme (29); 2° la somme des exposants λ n'est pas nulle; 3° les rapports de ces exposants sont tous réels. Si les hypothèses 1° et 3° sont vérifiées, les trois hypothèses 1°, 2°, 3° seront en général vérifiées pour l'équation en ζ et x obtenue en faisant le changement de variable

$$y = P(x) + x'\zeta,$$

où P est un polynôme de degré au plus égal à $s - 1$. Il n'y a, pour s'en rendre compte, qu'à considérer la relation qui se déduit de (29) par ce changement de variable. Nous avons donc démontré qu'en général $\zeta : x$ tend vers une limite, lorsque x et y

tendent simultanément vers 0. La démonstration des différents théorèmes est en défaut lorsque la somme des exposants est nulle; nous verrons que les théorèmes restent exacts.

18. Étude des caractéristiques dans le cas du n° 17. — Puisque toutes les caractéristiques, pour lesquelles y tend vers 0 avec x , sont tangentes soit à la droite $x = 0$, soit à une des droites $y = a_i x$ ($i = 1, 2, \dots, q$), nous les étudierons toutes en étudiant successivement celles qui sont tangentes à chacune de ces droites. Cette étude nous conduira aux deux théorèmes suivants: 1° *Toute caractéristique pour laquelle y tend vers 0 avec x est fournie par une intégrale $y(x)$ telle que y tende vers 0, quelle que soit la façon dont x tend vers 0.*

2° *Il y a une infinité d'intégrales passant par l'origine et tangentes à la droite $y = a_k x$, si une au moins des intégrales $y + \varphi_i = 0$ tangentes à cette droite est affectée d'un exposant négatif.*

Le premier théorème résulte de ce qui a été dit (n° 17), si on considère les caractéristiques tangentes à la droite $x = 0$, si λ est positif, ou tangentes à une droite $y = a_j x$, telle que toutes les intégrales $y + \varphi_j = 0$ tangentes à cette droite soient affectées d'exposants positifs.

Supposons que λ_i soit négatif et étudions les caractéristiques tangentes à $y = a_i x$. Nous supposons tout d'abord que seule l'intégrale $y + \varphi_i = 0$ est, parmi les intégrales $y + \varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), tangente à $y = a_i x$. Posons

$$(35) \quad y = a_i x + x y_1.$$

L'intégrale générale de l'équation en y_1 , x se déduit facilement de l'intégrale générale (29) de l'équation en y et x , et se met sous la forme

$$(36) \quad (y_1 + \psi_1) e^{b_1(y_1, x)} \prod_{i=2}^{i=q} \left(1 + \frac{y_1 + \psi_i}{c_i} \right)^{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}} = C x^{-\frac{1}{\lambda_1}} = u.$$

Nous avons posé, comme au n° 12, $c_i = a_i - a_1$, et C désigne une constante arbitraire. Toutes les caractéristiques de l'équation (2) pour lesquelles y_1 tendra vers 0 avec x seront fournies par la relation (36). Les divers facteurs du premier membre de (36), peuvent être développés en série suivant les puissances de x et de y_1 . En résolvant la relation (36) par rapport à y_1 , nous voyons que y_1 est donné par un développement procédant suivant les puissances de x et de u développement qui sera convergent lorsque x sera suffisamment petit. A chaque valeur de C correspond donc une intégrale $y(x)$ passant par l'origine et tangente à la droite $y = a_i x$. Nous voyons, de plus, que toute caractéristique pour laquelle $y : x$ tend vers a_i est fournie par une de ces intégrales.

Si l'exposant λ de x^λ est négatif, nous montrerons sans autre hypothèse, en posant $x = x_1 y$ qu'il y a une infinité d'intégrales tangentes à $0y$, telles que y tend vers 0 avec x . Toute caractéristique tangente à $0y$ est fournie par une de ces intégrales.

Supposons maintenant que λ_i étant encore négatif, il y ait plusieurs intégrales $y + \varphi_i = 0$ tangentes à la droite $y = a_i x$; soient par exemple

$$y + \varphi_1 = 0, \quad y + \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad y + \varphi_q = 0,$$

les intégrales tangentes à cette droite. Faisons encore le changement de variable (35). L'intégrale générale de l'équation en x et y_i peut, pour x et y_i voisin de 0, se mettre sous la forme

$$(37) \quad x e^{h_1(y_i, x)} \prod_{i=1}^{i=q'} (y_i + \bar{\varphi}_i)^{\lambda_i} = C.$$

Deux cas peuvent se présenter : 1° la somme $1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{q'}$, des exposants n'est pas nulle; nous sommes de plus certains que tous ces exposants ne sont pas de même signe puisque 1 et λ_1 sont de signes contraires; 2° la somme

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{q'}$$

est nulle.

Dans le cas 2° l'équation en x et y_i est, ainsi que nous le démontrerons (n° 20), une équation pour laquelle $x = 0$, $y_i = 0$ est un point dicritique, et qui, en mettant en évidence les termes de degré minimum en x et y_i , peut s'écrire

$$x[A(x, y_i) + \dots] \frac{dy_i}{dx} = y_i A(x, y_i) + \dots$$

En posant $\bar{\varphi}_i = -\bar{a}_i x - \bar{b}_i x^2 - \bar{c}_i x^3 \dots$, nous pouvons prendre

$$A(x, y_i) \equiv (y_i - \bar{a}_1 x)(y_i - \bar{a}_2 x) \dots (y_i - \bar{a}_{q'} x) \sum_{i=1}^{i=q'} \frac{\lambda_i}{y_i - \bar{a}_i x}.$$

$A(x, y_i)$ est de degré $q' - 1$ et le terme en $y_i^{q'-1}$ a pour coefficient -1 ; $A(0, y_i)$ n'est donc pas nul. Il résulte alors de théorèmes que j'ai démontré ailleurs ⁸⁾ qu'il y a une infinité d'intégrales, en général holomorphes, telles que, lorsque x tend vers 0, y_i tend toujours vers 0. De plus, toute fonction vérifiant l'équation différentielle et prenant pour une valeur $\bar{x}$ suffisamment petite une valeur $\bar{y}_i$ suffisamment petite est fournie par une de ces intégrales et tend par conséquent vers 0 avec x . Les propriétés énoncées sont donc démontrées, dans ce cas 2°, pour toutes les caractéristiques telles que y_i et x prennent des valeurs suffisamment petites.

Considérons le cas 1°. En multipliant tous les exposants de (37) par une constante convenable, on peut faire en sorte que la somme de tous les exposants considérés soit égale à 1. La relation (37) s'écrit alors

$$(38) \quad x^{\lambda'} e^{\bar{h}_1(y_i, x)} \prod_{i=1}^{i=q'} (y_i + \bar{\varphi}_i)^{\lambda'_i} = \text{const.}$$

Nous pouvons raisonner sur l'équation en y_i et x comme sur l'équation en y et x . Pour étudier les caractéristiques telles que y_i tende vers 0 avec x et pour établir les théorèmes énoncés, il suffira d'étudier successivement les caractéristiques tangentes à $x = 0$ et aux diverses droites $y_i = \bar{a}_i x$ du plan des x, y_i . On suppose, comme précédemment, que $y_i + \bar{\varphi}_i = 0$ est tangente à $y_i = \bar{a}_i x$ ($i = 1, 2, \dots, q'$). Si les deux

⁸⁾ Sur les points dicritiques [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6^e série, t. II (1906), pp. 381-402].

théorèmes énoncés sont démontrés pour l'équation en x et y_1 , le théorème 1° sera démontré pour toutes les caractéristiques $y(x)$ tangentes à $y = a_1 x$; le théorème 2° le sera également; en effet, dans (38) λ' et λ'_1 sont de signes contraires et il y aura une infinité d'intégrales $y_1(x)$ tangentes soit à $x = 0$, soit à $y_1 = a_1 x$: il y aura donc une infinité d'intégrales $y(x)$ tangentes à $y = a_1 x$.

Il résulte de ce qui précède, que les deux théorèmes sont démontrés pour l'équation en x et y , sauf s'il existe un ou plusieurs groupes formés d'au moins 2 intégrales, $y_1 + \bar{\varphi}_1 = 0$, tangentes entre elles et telles que l'exposant d'une intégrale au moins de chaque groupe soit négatif. En général, il n'existe pas de pareils groupes et les 2 théorèmes sont démontrés. Supposons qu'il existe de pareils groupes. Pour fixer les idées, supposons que $y_1 = a_1 x$ soit la tangente à l'origine aux intégrales de l'un de ces groupes. Faisons le changement de variable $y_1 = a_1 x + x y_2$ et raisonnons sur l'équation en x, y_2 comme sur l'équation en x, y_1 . Nous pourrions continuer à opérer de la même façon et à faire des changements de variables analogues, aussi longtemps qu'on n'arrivera pas à une équation pour laquelle les théorèmes seront démontrés, d'après ce qui précède. On arrivera toujours à une telle équation; en effet, nous avons vu n° 15 et nous verrons n° 23 qu'il est impossible que les diverses intégrales $y + \bar{\varphi}_i = 0$ fournissent indéfiniment, au moyen de changements successifs de l'espèce indiquée, des intégrales $y_1(x), y_2(x), \dots$ tangentes entre elles à l'origine.

Les deux théorèmes énoncés sont donc démontrés dans tous les cas.

19. Particularité des intégrales dans le cas considéré au n° 12. — La méthode que nous avons employée n° 18, et qui consiste à résoudre la relation (36) par rapport à y_1 , aurait pu être utilisée au n° 12 en résolvant la relation (30) par rapport à z , mais le champ d'indétermination de z serait moins étendu que celui que nous avons obtenu au n° 12. Nous pouvons cependant utiliser cette méthode pour démontrer une propriété de certaines caractéristiques. Supposons que l'équation (2) admette une intégrale générale de la forme (29) et que la somme des exposants λ, λ_i ne soit pas nulle. Supposons de plus qu'une des intégrales $y + \bar{\varphi}_i = 0$ et une seule, $y + \bar{\varphi}_1 = 0$, par exemple, soit tangente à la droite $y = 0$, l'exposant λ_1 étant un nombre complexe

$$\lambda_1 = \frac{-1}{\alpha + i\beta}.$$

En faisant le changement de variable $y + \bar{\varphi}_1 = z x$ et résolvant comme au début du n° 18 la relation en z et x par rapport à z , on a

$$z = u[1 + g(x, u)] \quad \text{avec} \quad u = Cx^{\alpha+i\beta}.$$

C est une constante convenable, g est une fonction de x et de u holomorphe et nulle pour $x = 0, u = 0$.

Montrons qu'on peut faire tendre x vers 0 de telle façon que z tende vers 0, mais que $z : x^\varepsilon$ croisse indéfiniment, si petit que soit ε . Il suffit pour cela de montrer que $x^{\alpha+i\beta}$ tend vers 0, mais que $x^{\alpha-\varepsilon+i\beta}$ croît indéfiniment. Si nous posons $x = \rho e^{i\theta}$, les modules de $x^{\alpha+i\beta}$ et de $x^{\alpha-\varepsilon+i\beta}$ sont respectivement $\rho^{\alpha \log \rho - \beta \theta}$ et $\rho^{\alpha \log \rho - \beta \theta - \varepsilon \log \rho}$. Or, si nous prenons par exemple $\alpha \log \rho - \beta \theta = -\log(-\log \rho)$, le premier module tend

vers 0, lorsque ρ tend vers 0, et le second croît indéfiniment. Nous en concluons que : *Il y a des caractéristiques telles que $y : x$ tende vers 0, tandis que $y : x^{1+\varepsilon}$ croît indéfiniment.* Si on suppose que λ soit un nombre complexe, on montre d'une façon analogue qu'il y a des caractéristiques telles que y tend vers 0 avec x et que $y : x$ croît indéfiniment, tandis que si petit que soit ε , $y : x^{1-\varepsilon}$ tend vers 0. De même, si λ_i est un nombre complexe et si l'intégrale $y + \varphi_i = 0$ est la seule à être tangente à $y = a_i x$, il y a des caractéristiques telles que $(y - a_i x) : x$ tende vers 0 tandis que $(y - a_i x) : x^{1+\varepsilon}$ croît indéfiniment.

20. Cas où dans (f) la somme des exposants est nulle. — Nous avons constamment laissé de côté le cas où, l'équation admettant une intégrale de la forme (f), la somme $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q$ est nulle. Montrons tout d'abord que, s'il en est ainsi, deux cas bien distincts peuvent se présenter.

Si nous prenons la dérivée logarithmique de (f) et si nous chassons les dénominateurs, nous avons

$$(39) \quad \left[b'_x dx + b'_y dy + \frac{\lambda dx}{x} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\lambda_i (dy + \varphi'_i dx)}{y + \varphi_i} \right] x \prod_{i=1}^{i=q} (y + \varphi_i) = 0.$$

Comme précédemment, on a $\varphi_i = -a_i x - b_i x^2 - c_i x^3$.

Considérons dans le coefficient de dx et dans celui de dy les termes de degré q en x et y ; ce sont les termes de degré minimum. Si λ n'est pas nul, il est impossible que l'ensemble de ces termes soit nul; il faudrait en effet que l'on ait

$$(40) \quad \frac{\lambda dx}{x} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\lambda_i (dy - a_i dx)}{y - a_i x} \equiv 0,$$

quels que soient dx, dy, x, y ; or si x tend vers 0, le premier membre de (40) croît indéfiniment. Supposons $\lambda = 0$, supprimons dans (39) le facteur x et demandons-nous dans quel cas l'ensemble des termes de degré $q - 1$ de (39) peut être identiquement nul. Il faut pour cela que l'on ait

$$(41) \quad \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\lambda_i (dy - a_i dx)}{y - a_i x} \equiv 0$$

et en particulier que l'on ait

$$\frac{\lambda_1}{y - a_1 x} + \frac{\lambda_2}{y - a_2 x} + \dots + \frac{\lambda_q}{y - a_q x} \equiv 0.$$

Pour que cette identité soit vérifiée, il faut que la somme des numérateurs des fractions ayant même dénominateur soit nulle. Si cette condition est vérifiée, on voit immédiatement que l'identité de (41) est satisfaite. *Pour que les termes de moindre degré en x et y disparaissent dans le premier membre de (39), il faut et il suffit que la somme des exposants λ_i des intégrales $y + \varphi_i = 0$ ayant même tangente à l'origine soit nulle.*

Algébriquement, on peut dire que, quels que soient x et y , le produit $\prod_{i=1}^{i=q} (y - a_i x)^{\lambda_i}$ doit être égal à 1. Si ces conditions sont réalisées, nous dirons que nous sommes dans le cas *exceptionnel*. Supposons que nous ne soyons pas dans le cas *exceptionnel*, comme

cela a toujours lieu si λ n'est pas nul. Désignons par $dyB(x, y) + dx C(x, y)$ l'ensemble des termes de moindre degré dans le premier membre de (39). Nous voyons d'après (41) ou (40), suivant que λ est nul ou non, que, si dans ces termes on remplace dy par y et dx par x , on a

$$yB(x, y) + xC(x, y) \equiv 0.$$

Il existe donc un polynôme $A(x, y)$ de degré $q - 2$ si λ est nul, et de degré $q - 1$ si λ n'est pas nul, et tel que l'on ait

$$B(x, y) \equiv xA(x, y), \quad C(x, y) = -yA(x, y).$$

Le premier membre de l'équation (2) peut s'obtenir en divisant les deux membres de (39) par un facteur $M(x, y)$ holomorphe pour $x = 0, y = 0$ et en général différent de 0 pour $x = 0, y = 0$. Dans tous les cas, on voit que l'équation en x et y sera de la forme

$$(42) \quad [xA(x, y) + \dots] \frac{dy}{dx} = yA(x, y) + \dots$$

en n'écrivant que les termes de degré minimum. Le point $x = 0, y = 0$ est un point dicritique. Dans le cas *exceptionnel*, le point $x = 0, y = 0$ ne peut jamais, comme nous le verrons, être un point dicritique. Lorsque la somme des exposants λ, λ_i est nulle, nous avons deux cas bien distincts: 1° le cas d'un point dicritique; 2° le cas *exceptionnel*.

21. Cas d'un point dicritique. — Montrons que, dans le cas d'un point dicritique, $y:x$ tend nécessairement vers une limite, lorsque x tend vers 0. En effet, en posant $y = tx$, l'équation (42) devient

$$[A(1, t) + \dots] \frac{dt}{dx} = P(t) + \dots$$

Les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$; $P(t)$ est un polynôme en t qui peut être identiquement nul, tandis que $A(1, t)$ n'est jamais identiquement nul. Cette équation est valable pour toutes les valeurs de t et de x correspondant à des valeurs suffisamment petites de y et de x . Comme x n'est pas en facteur dans le coefficient de $\frac{dt}{dx}$, on sait, d'après un théorème de M. PAINLEVÉ que t tend nécessairement vers une limite, lorsque x tend vers 0. A chaque valeur $t = t_i$ correspond une intégrale telle que t tende vers t_i lorsque x tend vers 0. Si $x = 0, y = 0$ est un point dicritique de l'équation (2), toutes les caractéristiques ou intégrales qui passent par l'origine ont en ce point une tangente qui peut occuper n'importe quelle position autour de l'origine. Je n'insisterai pas davantage sur les propriétés que j'ai étudié ailleurs ⁹⁾ des intégrales et des caractéristiques dans le cas d'un point dicritique, ni sur quelques remarques particulières au cas où l'équation (2) admet une intégrale générale de la forme (f) ¹⁰⁾.

⁹⁾ Mémoire cité, §8.

¹⁰⁾ On peut montrer que toute caractéristique $y(x)$ passant par l'origine est fournie par une intégrale passant par l'origine. Il n'y a pas lieu d'attacher trop d'importance à cet énoncé. Dans certains cas, au moins, il ne signifie pas qu'il existe un nombre fixe ε , tel que si l'on a une caractéristique pas-

22. Forme de l'intégrale générale dans le cas exceptionnel. — Complétons le raisonnement du n° 4, en montrant que, dans le cas exceptionnel, on peut de l'existence de l'intégrale (f) conclure l'existence d'une intégrale L . Posons $y = tx$, la relation (f) ou (29) prend la forme

$$e^{k(x,t)} \prod_{i=1}^{i=q} \left(1 - \frac{b_i x + c_i x^2 + \dots}{t - a_i} \right)^{\lambda_i} = C.$$

En développant le premier membre en série ordonnée suivant les puissances de x et supposant que nous choisissons pour chacun des facteurs la détermination qui est égale à 1 pour $x = 0$, nous obtenons

$$(43) \quad x^s \left[\frac{P(t)}{Q(t)} + x \frac{P_1(t)}{Q_1(t)} + x^2 \frac{P_2(t)}{Q_2(t)} + \dots \right] = C - 1.$$

On a, en général, $s = 1$; $P_1, P_2, \dots, P, Q, Q_1, Q_2, \dots$ sont des polynômes en t , dont les derniers n'ont pas d'autres racines que $a_1, a_2, \dots, a_q$. On voit que si on pose $u^s = \frac{P(t)}{Q(t)}$, l'égalité peut s'écrire

$$xu [1 + x L_1 + x^2 L_2 + \dots] = \text{const.}$$

Il se présente ici la particularité que dans u tous les exposants sont des nombres rationnels positifs ou négatifs. L'équation obtenue en ne considérant dans (2) que les termes de moindre degré admet pour intégrale générale $xu = \text{constante}$; on voit alors facilement que cette équation n'admet jamais $x = 0, y = 0$ comme point dicritique.

23. Étude du cas exceptionnel. — Supposons que les intégrales

$$y + \varphi_1 = 0, \quad y + \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad y + \varphi_r = 0$$

soient tangentes à l'origine à la droite $y = \alpha x$, et soient les seules parmi les intégrales $y + \varphi_i = 0$ à être tangentes à cette droite. La somme des exposants relatifs à ces diverses intégrales est nulle par hypothèse. Faisons le changement de variable

$$(44) \quad y = \alpha x + x y_1.$$

Nous obtenons une équation en x et y_1 dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$(45) \quad e^{b_1(x,y_1)} \prod_{i=1}^{i=r} (y_1 - b_i x - c_i x^2 - \dots)^{\lambda_i} = C,$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$, étant nul; l'équation en x et y_1 rentre donc ou bien dans le cas d'un point dicritique, ou bien dans le cas exceptionnel. Nous pouvons faire, de même, les divers changements de variable obtenus en donnant à α , dans (44), les valeurs $a_1,$

sant par l'origine et prenant pour $x = \bar{x}$ une valeur $y = \bar{y}$, l'intégrale $y(x)$ relative aux valeurs initiales $\bar{x}, \bar{y}$ tend vers 0, lorsque x tend vers 0, si l'on a: $|\bar{x}| < \epsilon, |\bar{y}| < \epsilon$. Pour que cet énoncé soit applicable dans tous les cas que nous considérons, il faut admettre que ϵ peut varier avec l'intégrale considérée et peut tendre vers 0. En d'autres termes, si on considère une intégrale $y(x)$, les points critiques autour desquels se permutent, une détermination de cette intégrale tendant vers 0 et une détermination ne tendant pas vers 0, n'ont pas pour point limite le point $x = 0$ dans le plan de la variable complexe x .

$a_2, \dots, a_q$. Nous obtenons diverses équations en x et y_1 , que nous appellerons *équations transformées*, et pour lesquelles se présentera soit le cas d'un point dicritique, soit le cas exceptionnel. Considérons celles pour lesquelles se présente le cas exceptionnel, nous pouvons opérer sur elles comme nous avons opéré sur l'équation en x et y . Continuons à opérer ainsi, aussi longtemps que se présentera le cas exceptionnel. *Nous finirons toujours par obtenir des équations à point dicritique*, car le cas exceptionnel ne peut se présenter indéfiniment. En effet, pour qu'il se présente lorsqu'on fait les changements de variables successifs $y = \alpha x + x y_1$, $y = \beta x + x y_2$, $\dots$, $y_{n-1} = \alpha x + x y_n$, il faut, et cela ne suffit pas, que les intégrales $y + \varphi_i = 0$ fournissent pour l'équation en x et y_n plusieurs intégrales $y_n(x)$ tangentes entre elles à l'origine; cela est impossible si n est supérieur au plus grand des ordres de contact des diverses intégrales $y + \varphi_i = 0$ entre elles.

24. Propriétés des caractéristiques dans le cas exceptionnel. — Si nous nous trouvons dans le cas exceptionnel, $y:x$ tend toujours vers une limite lorsque x et y tendent vers 0. La démonstration de cette propriété est plus laborieuse que dans le cas d'un point dicritique; je donnerai néanmoins cette démonstration, parce qu'elle établit une propriété intéressante des fonctions $y(x)$ vérifiant une relation (f) et parce qu'elle complète l'étude que je viens de faire.

Examinons tout d'abord le cas général où, si on groupe ensemble les intégrales $y + \varphi_i = 0$, qui ont entre elles un contact du second ordre, les sommes des exposants relatifs aux intégrales d'un même groupe sont toutes différentes de 0. Si on fait alors un quelconque des changements de variable $y = a_i x + x y_i$, les diverses équations obtenues ont toutes $x = 0$, $y_i = 0$ comme point dicritique. Supposons, pour simplifier les notations, qu'en groupant ensemble les intégrales $y + \varphi_i = 0$ qui sont tangentes, ces intégrales forment 3 groupes distincts. Les intégrales relatives aux valeurs 1, 2, 3, ..., r , de l'indice i sont tangentes à la droite $y = \alpha x$; r' autres sont tangentes à $y = \alpha' x$; r'' tangentes à $y = \alpha'' x$. En posant $y = tx$, la relation (29) devient

$$(46) \quad e^{b_1(x,t)} \prod_{i=1}^{i=r} \left(1 - \frac{b_i x + \dots}{t - \alpha}\right)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{i=r'} \left(1 - \frac{b'_i x + \dots}{t - \alpha'}\right)^{\lambda'_i} \prod_{i=1}^{i=r''} \left(1 - \frac{b''_i x + \dots}{t - \alpha''}\right)^{\lambda''_i} = C.$$

Soient ε et η deux nombres que nous prendrons suffisamment petits pour vérifier les différentes conditions que nous rencontrerons, et R un nombre que nous prendrons suffisamment grand. Nous considérerons la relation (46) pour des valeurs de x vérifiant la condition $|x| < \varepsilon$ et en particulier pour des valeurs de t formant un domaine T représenté dans le plan de la variable complexe t par les points intérieurs à un cercle de rayon R , ayant l'origine pour centre, et extérieurs à des cercles de rayon η ayant pour centres les points $t = \alpha$, $t = \alpha'$, $t = \alpha''$. Nous pouvons supposer que ces derniers cercles, que nous désignerons par (α) , (α') , (α'') , ne se coupent pas et sont intérieurs au premier, le cercle (R) . Si nous considérons une caractéristique $y(x)$ correspondant à des valeurs de x tendant vers 0, suivant un chemin déterminé, nous pouvons faire les remarques suivantes :

A) Si t ne sort pas du cercle (R) , y tend vers 0 avec x .

B) Si t ne sort pas du domaine T , y tend vers 0 avec x , et t tend vers une limite. En effet, nous pouvons supposer ε et η assez petits pour qu'on puisse, pour les valeurs considérées de x et de t , développer le premier membre de (46) en série ordonnée suivant les puissances de x , les coefficients étant des fractions rationnelles en t . Nous pouvons supposer, en changeant au besoin la valeur de la constante C , que la détermination que nous considérons pour chacun des facteurs est celle qui se réduit à 1 pour $x = 0$. Les caractéristiques que nous considérons vérifient alors la relation (43). Nous voyons tout d'abord que l'on doit avoir $C - 1 = 0$; en effet, dans le premier membre de (43) le facteur entre crochets reste fini, tandis que x' tend vers 0. Nous avons donc

$$(47) \quad \frac{P(t)}{Q(t)} + x \frac{P_1(t)}{Q_1(t)} + x^2 \frac{P_2(t)}{Q_2(t)} + \dots = 0.$$

t doit tendre vers une limite annulant $P(t)$. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre fixe η' , tel que pour des valeurs de x aussi petits que l'on veut, on ait, pour la valeur correspondante de t ,

$$\frac{P(t)}{Q(t)} > \eta'.$$

Il y aurait donc des valeurs de x telles que le premier membre de (47) ne soit pas nul.

Il est évident que si $P(t)$ n'est pas une constante, il existe des caractéristiques vérifiant les conditions indiquées. Si $t = t_1$ est une racine de $P(t)$, nous aurons, en résolvant la relation (47) par rapport à $t - t_1$, $t = t_1 + \chi(x)$, χ étant nul pour $x = 0$ et étant holomorphe ou algébroïde pour $x = 0$. On voit que toutes ces caractéristiques sont fournies par des intégrales passant par l'origine.

C) Supposons que t sorte à l'extérieur du cercle (R) , mais supposons que y prenne des valeurs telles que le développement (47) soit valable, il suffit pour cela que y soit suffisamment petit; nous pouvons supposer qu'il en est ainsi, puisque y tend vers 0 avec x . t variera en vérifiant la relation (47) et les déterminations des divers facteurs de (46) resteront celles que nous avons choisies au début. t pourra tendre vers l'infini, lorsque x et y tendent vers 0, et il est facile de montrer que les caractéristiques pour lesquelles il en est ainsi sont fournies par une ou plusieurs intégrales algébroïdes telles que y tende vers 0 lorsque x tend vers 0. Si t ne croît pas indéfiniment, nous pouvons toujours supposer R assez grand pour que t prenne des valeurs intérieures au cercle (R) , pour des valeurs de x aussi petites que l'on veut.

D) Supposons que t devienne intérieur à un des cercles (α) , (α') , (α'') , intérieur au cercle (α) par exemple. Posons $t = \alpha + y_1$; nous aurons $|y_1| < \eta$ et l'équation transformée en y_1 et x est, par hypothèse, une équation à point dicritique, de la forme

$$(48) \quad [x A(x, y_1) + \dots] \frac{dy_1}{dx} = y_1 A(x, y_1) + \dots$$

Cette équation admet l'intégrale $x = 0$, comme on le voit en remarquant que, dans (45), $b_1(x, y_1)$ est nul pour $x = 0$. Or j'ai montré ¹¹⁾ que, en général, il existe un

¹¹⁾ Mémoire cité, ⁸⁾, page 401.

nombre ε_i , tel que toute caractéristique $y_i(x)$ pour laquelle x et y_i prennent des valeurs telles que l'on ait $|x| < \varepsilon_i$, $|y_i| < \varepsilon_i$, est fournie par une intégrale telle que y_i tend vers 0, quelle que soit la façon dont x tend vers 0. Comme nous pouvons supposer ε et η inférieurs à η_i , y_i tend vers 0 avec x .

E) La propriété sur laquelle nous venons de nous appuyer peut être fausse, si $x = 0$ est une *direction singulière* relative au point dicritique $x = y_i = 0$, c'est-à-dire si $A(0, y_i)$ est identiquement nul. Toutefois, il résulte des théorèmes établis dans le mémoire cité (pp. 396-398), qu'en choisissant un nombre R_i , aussi grand que l'on veut, il lui correspond un nombre ε_i tel que si x et y_i prennent des valeurs vérifiant les conditions

$$(49) \quad |x| < \varepsilon_i, \quad |y_i| < \varepsilon_i, \quad |y_i : x| < R_i,$$

la caractéristique considérée est fournie par une intégrale pour laquelle y_i tend vers 0 avec x . Nous pouvons supposer $R_i > R$, ε et η inférieurs à ε_i et nous voyons que si nous considérons une caractéristique pour laquelle y_i ne tend pas vers 0 avec x , on aura $\frac{y_i}{x} > R_i$ pour toutes les valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs de y_i inférieures en module à η . Nous pouvons écrire la relation (46) sous la forme

$$(50) \quad e^{\bar{h}_i(x, y_i)} \prod_{i=1}^{i=r} \left[1 - \frac{b_i x + c_i x^2 + \dots}{y_i} \right]^{2i} = C$$

en mettant seulement en évidence les facteurs dont la détermination peut changer pour y_i voisin de 0, et faisant rentrer les autres dans $\bar{h}_i$. Si nous posons $x = u y_i$, l'égalité (50) devient

$$(51) \quad e^{h_i(u y_i, y_i)} \prod_{i=1}^{i=r} (1 - b_i u - c_i u^2 y_i - \dots)^{2i} = C.$$

Considérons les valeurs de x et y_i vérifiant les conditions

$$(52) \quad |x| < \varepsilon_i, \quad |y_i| < \varepsilon_i, \quad |y_i : x| > R;$$

nous pouvons supposer ε_i assez petit et R_i assez grand pour que les déterminations des divers facteurs de (51) et par suite de (46) ne changent pas. A l'aide de (51), on montre que les caractéristiques pour lesquelles y_i tend vers 0 avec x , tandis que les conditions (52) sont vérifiées, sont fournies par une ou plusieurs intégrales holomorphes ou algébroides pour lesquelles y et y_i tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Pour toutes les autres caractéristiques on voit, à l'aide de (51), que les déterminations des divers facteurs de (46) ne changeront pas, même lorsqu'on aura $|x| < \varepsilon$, $|y_i| < \eta$.

F) *Conclusion.* — Si t n'a pas pour limite l'infini ou une des valeurs α , α' , α'' , on peut supposer R assez grand et η assez petit pour que, pour des valeurs de x aussi petites que l'on veut, t prenne des valeurs appartenant au domaine T . Nous avons vu (C, F) que si t sort du domaine T et y rentre ensuite, les déterminations des divers facteurs de (46), que nous avons choisies primitivement égales à 1, pour $x = 0$, ne seront pas changées. Nous pouvons alors appliquer, pour les valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs de t appartenant à T , le raisonnement de (B). *t tend nécessairement*

rement vers une limite. Les valeurs possibles de cette limite, à la différence de ce qui se présentait dans le cas du point dicritique (n° 21), ne peuvent être qu'un certain nombre de valeurs fournies par l'intégrale générale (46): les valeurs $t = a_i$, $t = \infty$, où une valeur annulant $P(t)$.

Considérons maintenant le cas où, en faisant les divers changements de variable $y = a_i x + x y_i$, les diverses équations en x et y_i n'ont pas toutes, pour $x = 0$, $y = 0$, un point dicritique: le cas exceptionnel se présente pour certaines d'entre elles. Opérons sur ces dernières équations comme nous avons opéré sur l'équation en x et y . Continuons à opérer ainsi, jusqu'à ce que nous n'obtenions que des équations à point dicritique. Supposons, pour fixer les idées, qu'en faisant la suite de changements de variable qui est équivalente au changement de variable

$$y = a_i x + b_i x^2 + \dots + h_i x^n y_n,$$

l'équation en x et y_n , que l'on obtient, présente le cas exceptionnel, tandis que les diverses équations transformées en x , y_{n+1} relatives à cette équation sont des équations à point dicritique. Nous supposons que les q' intégrales $y + \varphi_1 = 0$, $y + \varphi_2 = 0$, ..., $y + \varphi_{q'} = 0$ aient entre elles à l'origine un contact d'ordre n et soient les seules, parmi les intégrales $y + \varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), à admettre un contact d'ordre aussi élevé avec $y + \varphi_1 = 0$. L'équation en x , y_n aura une intégrale générale que nous écrirons sous la forme

$$(53) \quad e^{h_n(x, y_n)} \prod_{i=1}^{i=q'} (y_n - k_i x - l_i x^2 - \dots)^{\lambda_i} = C.$$

Nous mettons en évidence les facteurs dont la détermination peut changer pour y_n voisin de 0. Nous pouvons déterminer ε_n de telle façon que, pour $|y_n| \leq \varepsilon_n$ et $|x| < \varepsilon$, $h_n(x, y_n)$ soit une fonction holomorphe. Employons l'intégrale (53) et l'équation en y_n et x pour étudier les caractéristiques telles que l'on ait $|x| < \varepsilon$ et $|y_n| < \varepsilon_n$. Nous pouvons appliquer à cette équation les résultats que nous avons démontrés tout d'abord pour l'équation en x et y . Nous en concluons que, si on pose $y_n = t_n x$, ou bien t_n a pour limite une des valeurs $k_1, k_2, \dots, k_{q'}$, ou bien les déterminations des divers facteurs du produit

$$(54) \quad \prod_{i=1}^{i=q'} \left(1 - \frac{l_i x + m_i x^2 + \dots}{t_n - k_i} \right)^{\lambda_i}$$

ne changent pas lorsque x tend vers 0, et si on a choisi la détermination qui se réduit à 1 pour $x = 0$, on conserve cette même détermination. Si nous considérons le rapport des q' facteurs du produit (54) au rapport des q' facteurs correspondants de (46)

$$(55) \quad \prod_{i=1}^{i=q'} \left(1 - \frac{b_i x + c_i x^2 + \dots}{t - a_i} \right)^{\lambda_i},$$

nous voyons que, puisque la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{q'}$, est nulle, le rapport des deux produits est égal à 1. Il en résulte que si t_n ne tend pas vers une des limites indiquées, les q' facteurs du produit (55) peuvent individuellement changer de détermination; mais

comme la détermination du produit ne change pas, tout se passe comme si la détermination des facteurs ne changeait pas. Nous pourrions raisonner de la même façon pour les autres groupes de facteurs de (46) jouissant des mêmes propriétés que les q' facteurs que nous avons considérés. Nous voyons que deux cas seulement sont possibles : 1° une des variables y_n que nous employons dans les équations transformées successives tend vers 0; 2° on peut raisonner comme si dans (46) la détermination d'aucun des facteurs ne changeait lorsque x tend vers 0. Dans le premier cas il est évident que t tend vers une limite. Dans le second cas cette conclusion résulte du raisonnement que nous avons fait dans les remarques B) et F). Dans les deux cas, nos raisonnements montrent que les caractéristiques pour lesquelles y tend vers 0 avec x sont fournies par des intégrales pour lesquelles y tend vers 0 de quelque façon que x tende vers 0.

Grehoble, le 21 janvier 1908.

H. DULAC.